

РЕЗОНАНСНОЕ ДВУХКАНАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН ИЛИ ЧАСТИЦ НА ТОЧЕЧНОМ И ПЛОСКОМ ДЕФЕКТЕ

А. М. Косевич*

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
Национальной академии наук Украины
310164, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 21 мая 1998 г.

Изучено рассеяние волны (квазичастицы) с дисперсионной кривой, состоящей из двух квадратичных ветвей, на плоском дефекте. Аналогом такого процесса является рассеяние подобной волны (квазичастицы) в $1D$ -системе на точечном дефекте. Показало, что даже при наличии пассивного дефекта (не обладающего внутренними степенями свободы) рассеяние может приобрести резонансный характер. Физическое объяснение эффекта заключается в том, что рассеивающаяся на дефекте волна с более низколежащим спектром резонирует на локализованном (связанном) состоянии, обусловленном взаимодействием с дефектом волны с более высоколежащим спектром.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов рассеяния разного типа волн в среде с точечными или плоскими дефектами имеет долгую историю и представляет не только научный, но и большой прикладной интерес. В теоретическом плане процессы рассеяния на плоском дефекте интересны тем, что их анализ сводится к одномерным динамическим задачам, а потому во многих случаях допускает простое аналитическое описание. Именно это обстоятельство позволяет легко заметить некоторые особенности рассеяния в резонансной ситуации. Поэтому основное внимание уделим изучению рассеяния на плоском дефекте.

Возникновение резонансного рассеяния на дефекте нетрудно объяснить в двух случаях: 1) когда дефект обладает некоторой структурой, и длина рассеивающейся волны λ оказывается согласованной с геометрическим размером этой структуры h , например, $\lambda = 2nh$, где n — целое число (геометрический резонанс), 2) когда дефект обладает внутренней динамической степенью свободы, характеризующейся определенной частотой, и частота рассеивающейся волны совпадает с собственной частотой дефекта. При изучении явления резонансного рассеяния в квантовой механике обычно рассматривается рассеяние частицы с квадратичным законом дисперсии на некоем двугорбом потенциале, который в одномерном случае имеет вид, схематически изображенный на рис. 1. Если потенциал дефекта обладает квазистационарным уровнем, то рассеивающаяся частица с квадратичным законом дисперсии и энергией E в интервале $E_0 < E < E_m$ может испытывать резонансное взаимодействие с этим уровнем. Все особенности такого резонансного рассеяния в $1D$ -случае определяются видом потенциала и подробно описаны в литературе (см., например, [1]). В случае плоского дефекта координата x отсчитывается вдоль нормали к плоскости дефекта.

*E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua

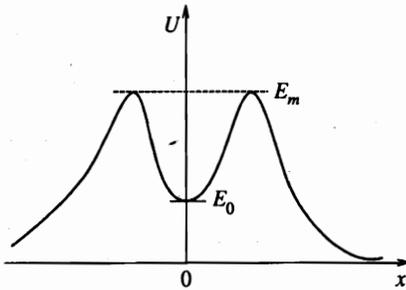


Рис. 1.

Если плоский дефект очень тонкий и длина волны заведомо превышает его ($\lambda \gg h$), то геометрический резонанс невозможен. С другой стороны, если рассматриваемый дефект пассивный, т. е. не обладает внутренними модами колебаний (или квазистационарными уровнями энергии в квантовой задаче), то невозможен и обычный (частотный) резонанс. В таком случае коэффициент отражения (или коэффициент прозрачности) волны не имеет особенностей.

Тем не менее в недавней работе [2] было описано резонансное отражение поперечной упругой волны от тонкого пассивного плоского дефекта при условии, что фазовая скорость падающей волны близка к скорости продольной упругой волны. Этот результат стимулировал наши исследования физических причин описанного резонансного эффекта.

Чтобы пояснить постановку задачи, рассмотрим простой пример рассеяния на точечном дефекте в одномерной системе. Этот пример описан во многих учебниках по рассеянию волн и частиц, но его анализ позволит ввести или напомнить необходимые обозначения и термины.

Рассмотрим $1D$ -систему, состояние которой описывается полем $\Psi(x, t)$, подчиняющимся в случае стационарных колебаний ($\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\epsilon t}$) уравнению

$$\epsilon\psi = \epsilon_0\psi - \frac{1}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}. \quad (1)$$

Собственным решениям этого уравнения $\psi(x) = \psi_0 \exp(ikx)$, отвечает энергия ϵ с законом дисперсии

$$\epsilon = \epsilon_0 + k^2/2m. \quad (2)$$

При наличии точечного дефекта, локализованного в точке $x = 0$, к правой части уравнения (1) добавляется слагаемое с локальным потенциалом. В длинноволновом приближении локальный потенциал всегда может быть записан в виде

$$U(x) = U_0 h \delta(x), \quad (3)$$

где h — эффективная ширина локализованного возмущения ($kh \ll 1$).

Задача о рассеянии связана с нахождением решения типа

$$\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \quad x < 0; \quad \psi(x) = Be^{ikx}, \quad x > 0. \quad (4)$$

Амплитуды A и B определяют коэффициенты отражения $R = |A|^2$ и прохождения (прозрачности) $T = |B|^2$, причем $R + T = 1$. Эти коэффициенты легко находятся; в част-

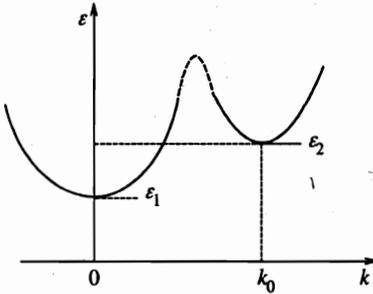


Рис. 2.

ности, коэффициент прозрачности равен

$$T = \frac{k^2}{k^2 + (mhU_0)^2}. \tag{5}$$

При $U_0 \neq 0$ коэффициент T не имеет особенностей для вещественных k , т. е. в области существования плоских волн ($\epsilon > \epsilon_0$), и всегда $0 < T < 1$.

Особенность T может возникнуть только при $\epsilon < \epsilon_0$ и отрицательном U_0 (локальном потенциале притяжения), когда $k = i\kappa$, $\kappa = \sqrt{2m(\epsilon_0 - \epsilon)}$. Однако значения $\epsilon < \epsilon_0$ приводят к локализованному состоянию:

$$\psi(x) = \psi_0 e^{-\kappa|x|}, \tag{6}$$

отвечающему собственному значению, лежащему в запрещенной полосе для собственных частот свободных волн (частиц). Подобное состояние обычно не имеет прямого отношения к процессам рассеяния свободных волн ($\epsilon > \epsilon_0$).

Ситуация меняется, если закон дисперсии $\epsilon = \epsilon(k)$ в бездефектной среде обладает несколькими ветвями (несколькими долинами — на языке электронной теории полупроводников). Тогда возможны дополнительные «каналы» рассеяния, которые обусловлены существованием нескольких долин.

Как правило, независимые ветви колебаний (или группы частиц) отличаются параметрами их законов дисперсии. В простейшем варианте двух типов частиц (волн) закон дисперсии в некоторой окрестности собственных значений может иметь вид $\epsilon = \epsilon_1(k)$ и $\epsilon = \epsilon_2(k)$ соответственно для первой и второй группы, где

$$\epsilon_1(k) = \epsilon_1 + k^2/2m_1, \quad \epsilon_2(k) = \epsilon_2 + (k - k_0)^2/2m_2, \tag{7}$$

причем $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (рис. 2).

В идеальной среде возбуждения разных ветвей независимы. При наличии дефекта происходит их локальная гибридизация, которая может существенно повлиять на процессы рассеяния. Допустим, что пассивный локальный потенциал притяжения допускает локальные состояния типа (6) для второй группы при $\epsilon < \epsilon_2$. Тогда рассеивающаяся частица первой группы в состоянии типа (4) при условии $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$ может оказаться в резонансе с собственными локальными состояниями возбуждений второй ветви. В разд. 2 будет показано, что в такой ситуации для частиц первого типа возможны условия, при которых $T = 0$ ($R = 1$), а также условия, для которых $T = 1$ ($R = 0$).

В разд. 3 изучено резонансное рассеяние поперечной звуковой волны на плоском дефекте при условии, что фазовая скорость волны вдоль дефекта находится в интервале между скоростями поперечного и продольного звуков. Показано, что при определенных частотах возможны как полное отражение, так и полное прохождение поперечной волны через дефект. Наконец, в разд. 3 рассмотрено рассеяние частицы (волны) с двухдолинным законом дисперсии на точечном дефекте в $3D$ -среде и найдена энергия частицы, при которой волна не рассеивается на точечном дефекте.

2. $1D$ -МОДЕЛЬ: РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ДВУМЯ ВЕТВЯМИ ЗАКОНА ДИСПЕРСИИ, НА ТОЧЕЧНОМ ДЕФЕКТЕ

Допустим, что элементарные возбуждения системы имеют две ветви закона дисперсии подобно изображенному на рис. 2, где ε — энергия (или квадрат частоты), а k — волновой вектор. В области энергий $\varepsilon \sim \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ динамика системы описывается двумя группами возбуждений с законами дисперсии (7). В идеальной системе эти волны-частицы не взаимодействуют и их динамика подчиняется уравнениям типа волновых уравнений или уравнений Шредингера:

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi_1 - \varepsilon_1\psi_1 + \frac{1}{2m_1} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= 0, \\ \varepsilon\psi_2 - \varepsilon_2\psi_2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right)^2 \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Взаимодействие квазичастиц возникает при наличии дефекта. Дефект порождает взаимодействие, которое соответствует дополнительной энергии изучаемой системы, локализованной на дефекте. Предположим, что плотность этой энергии имеет вид

$$U_{int}(x) = U_0 \{ \alpha_1 |\psi_1|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \beta(\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) \} \delta(x). \quad (9)$$

В результате уравнения динамики в системе с дефектом приобретают вид

$$\varepsilon\psi_1 - \varepsilon_1\psi_1 + \frac{1}{2m_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = U_0 [\alpha_1 \psi_1(0) + \beta\psi_2(0)] \delta(x), \quad (10)$$

$$\varepsilon\psi_2 - \varepsilon_2\psi_2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right)^2 \psi_2 = U_0 [\alpha_2 \psi_2(0) + \beta\psi_1(0)] \delta(x). \quad (11)$$

Ясно, что наличие локального потенциала возмущений (9) эквивалентно дополнительным граничным условиям для уравнений (8) в точке $x = 0$ (при непрерывных функциях $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1^+}{dx} - \frac{d\psi_1^-}{dx} &= 2m_1 U_0 [\alpha_1 \psi_1(0) + \beta\psi_2(0)], \\ \frac{d\psi_2^+}{dx} - \frac{d\psi_2^-}{dx} &= 2m_2 U_0 [\alpha_2 \psi_2(0) + \beta\psi_1(0)], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\varphi_\alpha^+ = \varphi_\alpha(+0), \quad \varphi_\alpha^- = \varphi_\alpha(-0), \quad \alpha = 1, 2.$$

Заметим, что принятый нами потенциал локального взаимодействия полей ψ_1 и ψ_2 на дефекте аналогичен введенной в работе [3] поверхностной свободной энергии сверхпроводника, выраженной через параметр порядка ψ при наличии двойниковой границы. Пространственное распределение параметра порядка ψ при наличии плоского дефекта сводится к решению одномерного уравнения типа (8) (если отвлечься от существования вектор-потенциала магнитного поля), удовлетворяющего граничным условиям, частным случаем которых можно считать соотношения (12).

Рассмотрим стандартную задачу рассеяния волны $\psi_1(x)$ с энергией в интервале ($\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$) на таком дефекте. Волна $\psi_1(x)$ ищется в стандартном виде (4), а для волны $\psi_2(x)$ естественно взять выражение, обобщающее (6), а именно

$$\psi_2(x) = M e^{ik_0x - \kappa|x|}, \tag{13}$$

где $k^2 = 2m_1(\varepsilon - \varepsilon_1)$, $\kappa^2 = 2m_2(\varepsilon_2 - \varepsilon)$. При записи (13) учтена непрерывность функции $\psi_2(x)$ при $x = 0$ и естественные граничные условия на бесконечности.

Непрерывность функции $\psi_1(x)$ связывает амплитуды отраженной A и прошедшей B волн: $1 + A = B$, а из (12) следует

$$B = \frac{ik(\kappa + \alpha_2 m_2 U_0)}{\Delta(\varepsilon)}, \tag{14}$$

$$M = -\frac{ik\beta m_2 U_0}{\Delta(\varepsilon)}, \tag{15}$$

$$\Delta(\varepsilon) = ik(\kappa + \alpha_2 m_2 U_0) + m_1 U_0 [\alpha_1 \kappa + (\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2) m_2 U_0]. \tag{16}$$

Мы видим, что $B = 0$ при условии

$$\kappa(\varepsilon) + \alpha_2 m_2 U_0 = 0. \tag{17}$$

Соотношение имеет смысл, если $\alpha_2 U_0 < 0$, т. е. при потенциале притяжения к дефекту частицы $\psi_2(x)$. В этом случае коэффициенты отражения и прохождения равны $R = 1$, $T = 0$.

Если же может выполняться условие

$$\alpha_1 \kappa + (\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2) m_2 U_0 = 0, \tag{18}$$

то $B = 1$, и процесс рассеяния характеризуется величинами $R = 0$, $T = 1$.

Физический смысл резонансных условий совершенно прозрачен и легко объясним на основе анализа уравнений (11) и (12). Равенство $B = 0$ возникает при условии $\psi_1(0) = 0$, означающем, что уравнение (11) становится автономным и обладающим локализованным решением при (17) (это следует из (12), если $\psi_1(0) = 0$). Локализованное колебание поля $\psi_2(x)$ есть та динамическая система, которая резонирует с падающей волной поля $\psi_1(x)$ и создает условия для полного отражения этой волны.

Равенство $T = 1$ возникает при условии $\alpha_1 \psi_0(0) + \beta \psi_2(0) = 0$, означающим, что поле $\psi_1(x)$ не ощущает возмущающего действия потенциала U_0 , а потому падающая волна проходит через дефект, не деформируясь. Что же касается поля $\psi_2(x)$, то оно вновь становится автономным, так как в его правой части

$$\alpha_2 \psi_2(0) + \beta \psi_1(0) = (\alpha_2 - \beta^2 / \alpha_1) \psi_2(0).$$

Поэтому уравнение (12) снова имеет локализованное решение, но отвечающее другой энергии, при которой выполняется (18).

Таким образом, оказывается, что резонансные особенности рассеяния волны поля $\psi_1(x)$ на точечном дефекте связаны, как и должно быть, с особенностями проблемы собственных стационарных состояний изучаемого полного поля $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Нам представляется полезным детальный анализ той части указанной задачи для собственных состояний, которая имеет отношение к затронутому вопросу. Решая проблему собственных стационарных решений поля $\psi = \psi_1 + \psi_2$, запишем

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A \sin(kx - \varphi_1), & x < 0, \\ B \sin(kx - \varphi_2), & x > 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\psi_2(x) = M \exp\{-\kappa|x| + ik_0x\},$$

где определения k и κ прежние.

Наличие решений (19) означает, что стационарное состояние имеет два слагаемых: первое — это стоячая волна поля $\psi_1(x)$ на всей оси x , второе — это локализованное вблизи дефекта колебание. Подобное стационарное состояние поля $\psi(x)$ естественно назвать квазилокализованным.

Решение (19) характеризуется пятью параметрами: амплитудами A , B , M и фазами φ_1 , φ_2 . Непрерывность функции $\psi_1(x)$ и граничные условия (12) приводят к следующей системе алгебраических однородных уравнений для нахождения амплитуд A , B и M :

$$\begin{aligned} A \sin \varphi_1 - B \sin \varphi_2 &= 0, \\ A(2\alpha_1 m_1 U_0 \sin \varphi_1 + k \cos \varphi_1) - Bk \cos \varphi_2 + 2\beta m_1 U_0 M &= 0, \\ A\beta m_2 U_0 \sin \varphi_1 + (\kappa + \alpha_2 m_2 U_0)M &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство нулю детерминанта системы (20) определяет связь фаз φ_1 и φ_2 , оставляя одну из них (или их разность) в качестве свободного параметра.

Отсюда следует: 1. Если энергия ϵ находится в интервале $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$, то стационарное состояние системы — это квазилокализованное колебание; 2. При фиксированном ϵ имеется непрерывный спектр квазилокализованных состояний.

Удивительной особенностью совокупности квазилокализованных колебаний является то, что имеется стационарное состояние поля $\psi(x)$, в котором стоячая волна существует только на полуоси, а локализованное колебание существует на обеих полуосях. Действительно, полагая $B = 0$ в (20), мы видим, что при этом автоматически $\varphi_1 = 0$, т.е. $\psi_1(0) = 0$ и, кроме того, $\kappa + \alpha_2 m_2 U_0 = 0$. Что же касается амплитуды M , она однозначно определяется формулой

$$M = -kA/2\beta m_1 U_0. \quad (21)$$

Естественно, что условие существования квазилокализованного колебания описанного типа (с $B = 0$) совпадает с условием полного резонансного отражения. Следовательно, стоячая волна $\psi_1(x)$ с амплитудой A может существовать только на одной полуоси ($x < 0$), если

$$\epsilon = \epsilon_2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 m_2 U_0^2 \quad (22)$$

и одновременно существует локализованное колебание поля $\psi_2(x)$ с амплитудой (21).

Наконец, стационарное состояние с единой стоячей волной на всей оси x при $\psi_1(0) \neq 0$ отвечает условиям

$$A = B, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2. \quad (23)$$

В этом случае, как следует из (20), амплитуда $M = -\alpha_1 A/\beta$, а частота находится из условия (18), дающего

$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta^2/\alpha_1)^2 m_2 U_0^2. \quad (24)$$

Такая ситуация возможна, если $(\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2)U_0 < 0$.

Легко убедиться, что полученные в настоящем разделе результаты слабо зависят от вида граничных условий, «перепутывающих» поля ψ_1 и ψ_2 , а также от конкретного вида динамических уравнений, приводящих к «двухдолинному» закону дисперсии с разными «глубинами» долин. Более того, основные выводы справедливы не только по отношению к системам с непрерывным распределением поля, но и к дискретным моделям.

3. РАССЕЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОМ ДЕФЕКТЕ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Примеры плоских (или планарных) дефектов в кристаллах хорошо известны — это двойниковые границы, межфазные границы, плоские дефекты упаковки и пр. В интересующем нас длинноволновом приближении когда динамика кристаллов описывается теорией упругости, подобный дефект можно считать расположенным на некоторой плоскости. В таком случае, как мы видели в разд. 2, присутствие дефекта проявляется в дополнительных граничных условиях для уравнений поля (в данном случае — для упругих смещений u) на этой плоскости. Начнем с обсуждения возможных граничных условий. Пусть дефект совпадает с плоскостью $z = 0$. Вдоль выделенной плоскости может локализоваться нарушение свойств твердого тела двух типов.

1). Поверхность $z = 0$ совпадает с моноатомным слоем изотопов — атомов с массой M , отличающимися от масс регулярных атомов среды m . Если σ_{ik} — тензор упругих напряжений, а ρ — плотность среды, то динамическое уравнение упругости, возмущенное дефектной плоскостью, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \eta \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} h \delta(z), \quad (25)$$

где $\eta = (M - m)/m$, h — толщина дефектного слоя.

Из (25) следуют очевидные граничные условия:

$$\sigma_{iz}^+ - \sigma_{iz}^- = \eta h \rho \frac{\partial^2 u_i(0)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Рассмотрим рассеяние плоской упругой волны на описанном дефекте, предполагая волну поляризованной в плоскости падения. Выберем в качестве плоскости падения плоскость (zx) . Тогда актуальными остаются только условия (26) для $i = x$ и $i = z$.

Учитывая непрерывность вектора \mathbf{u} и его производных по x на плоскости $z = 0$, а также монохроматичность волны, условия (26) можно свести к следующим двум:

$$c_t^2 \left(\frac{\partial u_z^+}{\partial z} - \frac{\partial u_z^-}{\partial z} \right) = W_0 u_z(0), \quad (27)$$

$$c_t^2 \left(\frac{\partial u_x^+}{\partial z} - \frac{\partial u_x^-}{\partial z} \right) = W_0 u_x(0), \quad (28)$$

где $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(z = +0)$, $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}(z = -0)$, $W_0 = -\eta \hbar \omega^2$, ω — частота, а c_l и c_t — скорости соответственно продольного и поперечного звуков.

Условия (27) и (28) обобщают граничные условия (12) в одномерном случае. Заметим, что условия (26)–(28) соответствуют непрерывности смещений на плоскости $z = 0$ и скачку напряжений на противоположных берегах дефектной плоскости и в этом смысле аналогичны условиям (12).

2). Иные граничные условия возникают в том случае, когда изменяется межатомное взаимодействие вдоль дефектной плоскости.

Возможны различные выводы макроскопических граничных условий, основанные на изучении длинноволнового предела динамики кристаллической решетки. Однако чаще используется модель трехслойного упругого сэндвича с последующим переходом к пределу нулевой толщины среднего слоя. (Таким способом, например, получены граничные условия в работах [2, 4]. Иногда граничные условия формулируются феноменологически [5].)

В простейшем случае, когда эффективные упругие модули дефектного слоя малы по сравнению с упругими модулями среды, граничные условия предполагают непрерывность нормальных компонент тензора напряжений при наличии скачка соответствующих компонент вектора смещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^+ &= \sigma_{xz}^- = \frac{\mu}{l_1} (u_x^+ - u_x^-), \\ \sigma_{zz}^+ &= \sigma_{zz}^- = \frac{\mu}{l_3} (u_z^+ - u_z^-), \end{aligned} \quad (29)$$

где l_1 и l_3 — эффективные толщины дефектного слоя, обратно пропорциональные упругим модулям этого слоя, а μ — модель сдвига изотропной среды.

Граничные условия (29) имеют широкую область применения, если считать заданными параметры l_1 и l_3 . Они обладают естественными предельными свойствами: при $l = \infty$ (возникновение свободной поверхности) σ_{xz} и σ_{zz} обращаются в нуль на дефектном слое ($z = 0$), а при $l = 0$ смещения (как и напряжения) становятся непрерывными на плоскости $z = 0$.

Имея граничные условия (27), (28) или (29), мы можем приступить к решению задачи с рассеяния поперечной волны. Предположим, что волна падает под углом θ к оси z . Тогда зависимость поля смещений от координаты x будет одинаковой для всех компонент поля и будет описываться волной $\exp(ikx)$, где $k = (\omega/c_t) \sin \theta$. Предположим далее (это весьма важное предположение), что фазовая скорость волны вдоль поверхности $c = \omega/k = c_t / \sin \theta < c_l$, т. е. примем, что $\sin \theta > c_t/c_l$.

Запишем вектор смещений в рассматриваемой геометрии \mathbf{u} ($u_x = 0, u_z$) в виде

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{u}(z) \exp(ikx - i\omega t), \quad (30)$$

где поле $\mathbf{u}(z)$ определяет зависимость суммы продольных и поперечных колебаний упругой среды от координаты z :

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}^{(t)} + \mathbf{u}^{(l)}, \quad ku_x^{(t)} = i \frac{du_z^{(t)}}{dx}, \quad ku_z^{(l)} = -i \frac{du_x^{(l)}}{dz}. \quad (31)$$

В объеме ($z \neq 0$) продольная и поперечная составляющие подчиняются следующим уравнениям:

$$(\omega^2 - c_t^2 k^2) \mathbf{u}_t = c_t^2 \frac{d^2 \mathbf{u}_t}{dz^2}, \quad (32)$$

$$(\omega^2 - c_l^2 k^2) \mathbf{u}_l = c_l^2 \frac{d^2 \mathbf{u}_l}{dz^2}. \quad (33)$$

Напомним, что по предположению

$$c_t k < \omega = ck < c_l k, \quad (34)$$

и стандартная задача о рассеянии поперечной волны сводится к нахождению следующего решения:

$$\mathbf{u}^{(t)} = \begin{cases} \mathbf{a}e^{iqz} + \mathbf{A}e^{-iqz}, & z < 0 \\ \mathbf{B}e^{iqz}, & z > 0 \end{cases}; \quad (35)$$

$$\mathbf{u}^{(l)} = \begin{cases} \mathbf{M}e^{\kappa z}, & z < 0 \\ \mathbf{N}e^{-\kappa z}, & z > 0 \end{cases}; \quad (36)$$

где $ka_x + qa_z = 0$ для вектора поляризации падающей поперечной волны, $c_t q = \sqrt{\omega^2 - c_t^2 k^2} = k\sqrt{c^2 - c_t^2}$, $c_l \kappa = \sqrt{c_l^2 k^2 - \omega^2}$.

Вначале рассмотрим задачу рассеяния волны на дефекте, приводящем к граничным условиям (27) и (28). Условия непрерывности полных смещений $u_x(z)$ и $u_z(z)$, а также (27) и (28) составляют систему четырех линейных алгебраических уравнений для определения четырех амплитуд \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{M} и \mathbf{N} , компоненты которых связаны соотношениями, вытекающими из (31). Решение задачи представляет чисто технические трудности, и мы приведем лишь интересующую нас часть результатов. Чтобы далее обсудить проблему резонансного отражения, запишем выражение для амплитуды \mathbf{B} , вычисление которой дает¹⁾

$$\mathbf{B} = -\frac{2iq}{\Delta} [2\kappa c_l^2 + \eta h \omega^2] \mathbf{a}, \quad (37)$$

$$\Delta = \eta h \left[(\eta h \omega^2 - 2\kappa c_l^2) \frac{\omega^2}{c_t^2} + (\kappa^2 - q^2) \eta h k^2 c_l^2 \right] - 2iq [(2\kappa c_l^2 - \eta h \omega^2) - (\eta h k)^2 c_l^2 \kappa],$$

где $\sigma = c_t^2/c_l^2$.

Видно, что полное отражение ($B = 0$) происходит при условии

$$2c_l^2 \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} = -\frac{\Delta m}{t} h \omega^2. \quad (38)$$

¹⁾ Расчеты были выполнены студентом ХГУ Д. Семагиным [8].

Полное отражение возможно только при наличии тяжелого дефектного слоя ($M > m$). В длинноволновом пределе ($hk \ll 1$) фазовая скорость резонансно отражающей волны $c = \omega/k$ близка к скорости продольного звука c_l и определяется соотношением

$$c = c_l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{2m} hk \right)^2 \right]. \quad (39)$$

Как обычно в подобных ситуациях, $\Delta c/c \sim (\Delta m/m)^2 h^2 k^2$.

Заметим, что условие (38) определяет частоту (или фазовую скорость c) стационарной локализованной продольной волны, подчиняющейся граничному условию (27) в отсутствие поперечной составляющей. Полное стационарное решение, помимо волн (36), включает стоячую поперечную волну

$$u^{(t)} = \begin{cases} a \sin qz, & z < 0 \\ 0, & z > 0 \end{cases},$$

существующую только с одной стороны от плоского дефекта.

Перейдем теперь ко второму случаю, в котором используются граничные условия (29). Решение рассматриваемой задачи для таких граничных условий изложено в работе [6]. Снова приведем полученные результаты, связанные с вычислением коэффициента прозрачности $T = |B|^2$. Оказывается, что

$$T = \frac{4s^2(s-1)}{\Delta(s)} \left[\frac{(2-s)^2}{kl_1} - \frac{2s\sqrt{1-\sigma s}}{kl_1 kl_2} - \frac{4(1-\sigma s)}{kl_3} \right]^2, \quad (40)$$

где $s = (c/c_l)^2 = (\omega/kc_l)^2$, $\sigma = (c_t/c_l)^2$, а $\Delta(s)$ — это заведомо положительная функция s при $s > 1$, т. е. при $c > c_t$.

Условие полного отражения волны отвечает равенству $T = 0$. Из (40) следует, что это возможно либо при $s = 1$ ($c = c_t$, что соответствует волне, скользящей вдоль плоского дефекта), либо при выполнении условия

$$2s\sqrt{1-\sigma s} = (2-s)^2 kl_3 - 4(1-\sigma s)kl_1, \quad (41)$$

которое является уравнением для нахождения фазовой скорости.

Если $l_1, l_3 \rightarrow 0$, то соотношение (41) упрощается и приводит к заключению, что искомая фазовая скорость $c \rightarrow c_l$, а именно:

$$c^2 = c_l^2 - \frac{\lambda^4 (kl_3)^2}{[2\mu(\lambda + 2\mu)]^2}, \quad kl_3 \ll 1, \quad (42)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе.

Зависимость такого типа от величины $(kl_3)^2$ для резонансной фазовой скорости была получена в работе [2]. Однако соотношение (42) определяет более сложную зависимость в широком интервале значений параметров l_1 и l_3 .

В работе [6] показано, что условие (41) совпадает с условием существования стационарного квазилокализованного решения, имеющего вид стоячей поперечной волны при $z < 0$ и локализованного вблизи дефекта продольного колебания (в полном соответствии с результатами, полученными с другими граничными условиями).

Обозначим $\xi = l_1/l_3$. Тогда соотношение (41), дающее зависимость фазовой скорости от величины, например, kl_3 удобно представить в виде обратной функции:

$$kl_3 = \frac{2s\sqrt{1-\sigma s}}{(2-s)^2 - 4(1-\sigma s)\xi} \quad (43)$$

Сравнивая (43) с законом дисперсии псевдоповерхностных волн [4, 7], мы убеждаемся, что соответствующая квазилокализованная волна имеет фазу φ , определяемую равенством

$$\xi = \sqrt{\frac{1-s}{1-\sigma s}} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Таким образом, мы еще раз продемонстрировали общую закономерность возникновения резонансных условий рассеяния поперечной волны на плоском дефекте, связанную с «многоканальным» характером закона дисперсии рассеивающейся волны.

4. РЕЗОНАНСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИ РАССЕЯНИИ НА ТОЧЕЧНОМ ДЕФЕКТЕ В 3D-СРЕДЕ

Наконец, подтвердим отмеченную закономерность анализом 3D-случая. Пусть состояние частиц с «двухдолинным» законом дисперсии описывается суммой волновых функций $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\psi_2(\mathbf{r})$, отвечающих законам дисперсии $\varepsilon = \varepsilon_\alpha(\mathbf{k})$, $\alpha = 1, 2$, которые отличаются от законов дисперсии (7) только трехмерностью волновых векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 .

Дефект, расположенный в точке $\mathbf{r} = 0$, «перепутывает» состояния ψ_1 и ψ_2 . Запишем простейшее локальное условие на дефекте, выполняющее роль граничных условий и обобщающее (12):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi_1) - 2m_1 r U_0 (\alpha_1 \psi_1 + \beta \psi_2) \right] = 0, \quad (44)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\mathbf{k}_0 \mathbf{n} \right) r\psi_2 - 2m_2 r U_0 (\alpha_2 \psi_2 + \beta \psi_1) \right] = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/r.$$

Задача о рассеянии частицы с энергией $\varepsilon < \varepsilon_0$ сводится в 3D-случае к нахождению следующего решения:

$$\psi_1 = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \frac{\chi}{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (45)$$

$$\psi_2 = \frac{Q}{r} e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \kappa r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (46)$$

где $q^2 = 2m_1\varepsilon$, $\kappa^2 = 2m_2(\varepsilon_0 - \varepsilon)$. Множители χ и Q находятся из граничных условий (44):

$$\chi = \frac{\kappa + 2m_2\alpha_2 U_0}{\Delta}, \quad Q = -\frac{2m_2\beta U_0}{\Delta}, \quad (47)$$

$$\Delta = (2m_1\alpha_1 U_0 - i\mathbf{q}\mathbf{n})(2m_2\alpha_2 U_0 + \kappa) - 4m_1 m_2 \beta^2 U_0^2. \quad (48)$$

Мы видим, что если точечный дефект обеспечивает притяжение частицы ($\alpha_2 U_0 < 0$), то возможна ситуация с $\chi = 0$ при условии

$$\sqrt{2m_2(\varepsilon_0 - \varepsilon)} = 2m_2|\alpha_2 U_0|, \quad (49)$$

аналогичном (38). Соотношение (49) определяет энергию, при которой возникло бы локальное состояние (46) в отсутствие волны ψ_1 . В рассматриваемом случае рассеяния волны (45) амплитуда локального состояния определяется равной единице амплитудой падающей волны:

$$Q = \frac{1}{2m_1\beta U_0}.$$

Таким образом, показана возможность резонансной «прозрачности» точечного дефекта в процессе своеобразного двухканального рассеяния. Эта возможность связана с тем фактом, что при соответствующей энергии в системе существует стационарное квазилокальное состояние.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные результаты примечательны с двух точек зрения. С точки зрения теории рассеяния описанные резонансные эффекты являются одной из форм рассеяния частицы (волны) на квазистационарном состоянии. Отличие обсуждаемых резонансов от обычно изучаемых и описанных в литературе в том, что в данном случае резонансный эффект целиком обусловлен особенностями двухдолинного закона дисперсии частицы в идеальной среде (без дефекта) и слабо зависит от вида локального потенциала, вызывающего рассеяние. С точки зрения теории квазилокальных состояний полученные нами результаты можно рассматривать как дополнение к исследованиям [4, 7], в которых была получена полная однопараметрическая система собственных решений динамической теории упругости, отвечающих псевдоповерхностным волнам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и технологии Украины (проект 2.4/163).

Литература

1. Д. Бом, *Квантовая механика*, Физматиз, Москва (1961).
2. A. N. Darinskii and G. A. Maugin, *Wave Motion* **23**, 363 (1996).
3. А. Ф. Андреев, *Письма в ЖЭТФ* **46**, 463 (1987).
4. А. М. Kosevich and A. V. Tutov, *Phys. Lett. A* **213**, 265 (1996).
5. L. J. Purak-Nolte, J. Xu, and G. M. Hallay, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3650 (1992).
6. А. М. Kosevich and A. V. Tutov, *Phys. Lett. A* **248**, 271 (1998).
7. А. М. Косевич, А. В. Тутов, *ФНТ* **19**, 905 (1993).
8. A. Kosevich and D. Semagin, *Cond. Matter. Phys. (Lviv)* **1**, 409 (1998).