ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 1, стр. 101–114

ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СУПЕРПАРАМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ С КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Ю. П. Калмыков, С. В. Титов†*

Институт радиотехники и электроники Российской академии наук
141120, Фрязино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 23 апреля 1998 г.

Исследован линейный отклик системы однодоменных частиц с кубической анизотропией на слабое переменное внешнее магнитное поле. Путем усреднения уравнения Гильберта с флуктуирующим полем для намагниченности частицы выведены рекуррентные уравнения для спектров равновесных корреляционных функций, описывающих продольную релаксацию в системе. Найдено решение этих уравнений с помощью матричных непрерывных дробей. Рассчитаны время релаксации продольной компоненты намагниченности и спектр комплексной магнитной восприимчивости. Показано, что характер дисперсии восприимчивости определяется параметрами как анизотропии, так и диссипации.

1. Однодоменные ферромагнитные частицы характеризуются внутренним потенциалом анизотропии, который может иметь несколько локальных положений равновесия с потенциальными барьерами между ними. Если частицы малы (~ 100 Å) и, следовательно, потенциальные барьеры низки, вектор намагниченности $\mathbf{M}(t)$ из-за тепловых флуктуаций может переориентироваться через барьеры из одного положения равновесия в другое [1]. Тепловая неустойчивость намагниченности приводит к так называемому суперпарамагнетизму [2]. Исследование тепловых флуктуаций и релаксации намагниченности однодоменных частиц в настоящее время привлекает внимание в контексте улучшения характеристик магнитных носителей записи [3].

При теоретическом изучении релаксационных процессов в суперпарамагнетиках для упрощения математических расчетов обычно рассматриваются одноосные однородно намагниченные частицы [2, 4–12]. Хотя использование одноосного потенциала анизотропии значительно упрощает анализ, полученные в этом приближении результаты имеют ограниченную область применимости [13]. Для других типов анизотропии, таких как кубическая, ранее применялось либо приближение дискретных ориентаций, либо удалось получить и исследовать только асимптотические решения для модели непрерывной диффузии (например, [2, 13–19]). Оба этих подхода, однако, неприменимы в наиболее интересном случае, когда энергия анизотропии сравнима с тепловой энергией kT.

Для диффузионной модели динамика вектора намагниченности $\mathbf{M}(t)$ однодоменной частицы аналогична броуновскому вращению макромолекулы в жидкости и описывается уравнением Фоккера—Планка для плотности вероятности распределения $W(\{\mathbf{M}\}, t)$ намагниченности [2, 20, 21]. Уравнение Фоккера—Планка выводится из уравнения

*E-mail: ypk169@ire216.msk.su
†E-mail: svt245@ire216.msk.su

Гильберта [2, 20] с флуктуирующим полем, которое учитывает тепловые флуктуации намагниченности индивидуальной частицы. Для случая кубической анизотропии уравнение Фоккера—Планка может быть формально решено, например, путем разложения функции распределения W в ряд по сферическим гармоникам [19]. При таком подходе задача сводится к решению бесконечной системы рекуррентных уравнений для усредненных сферических гармоник (моментов) [19]. Систему уравнений для моментов можно также получить путем усреднения уравнения Гильберта без использования уравнения Фоккера—Планка [12]. Применение известных методов решения такой системы уравнений в характерном для однодоменных частиц случае слабой диссипации[1] затруднительно, так как при расчетах для получения сходимости необходимо учитывать порядка 10^4–10^5 и более уравнений. По этой причине расчет и анализ спектра комплексной магнитной восприимчивости в случае кубической анизотропии для диффузионной модели до сих пор не проводился. Однако задачу можно существенно упростить, если воспользоваться методом матричных непрерывных дробей, разработанным в [22, 23] для решения бесконечных систем рекуррентных уравнений для моментов. В данной работе с помощью этого метода рассчитаны время релаксации $\tau_\parallel$ продольной компоненты намагниченности и динамическая магнитная восприимчивость $\chi_\parallel(\omega)$ системы невзаимодействующих однодоменных частиц при произвольных значениях параметров энергии анизотропии σ и диссипации α. Определено и исследовано поведение $\tau_\parallel$ и $\chi_\parallel(\omega)$ во всех диапазонах изменения σ и α.

2. С учетом тепловых флуктуаций уравнение Гильберта для намагниченности **M** однодоменной частицы имеет вид [2, 24]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \gamma\left[\mathbf{M}(t)\left[\mathbf{H}(t) + \mathbf{h}(t) - \eta\dot{\mathbf{M}}(t)\right]\right], \tag{1}$$

где γ — гиромагнитное отношение, η — коэффициент трения, **H** — суммарное магнитное поле, которое может состоять из внешних приложенных полей и эффективного магнитного поля анизотропии, $\mathbf{h}(t)$ — случайное поле, обладающее свойствами белого шума:

$$\overline{h_i(t)} = 0, \quad \overline{h_i(t_1)h_j(t_2)} = \frac{2kT\eta}{v}\,\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2). \tag{2}$$

Здесь v — объем частицы, черта сверху означает статистическое среднее по ансамблю частиц, имеющих в момент времени t одинаковую намагниченность $\mathbf{M}(t)$. По порядку величины амплитуду $\mathbf{h}(t)$ можно оценить как kT/vM_s (M_s — намагниченность материала частицы), что дает при комнатной температуре величину ≥ 100 Э, и, таким образом, случайное поле соизмеримо с полем магнитной анизотропии [8].

Если V — свободная энергия единицы объема, выраженная через компоненты **M**, то поле **H** определяется уравнением

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} V. \tag{3}$$

Для рассматриваемого случая кубической анизотропии будем использовать представле-

---

[1] Методы экспериментальных и теоретических оценок параметра диссипации α обсуждались, например, в [6, 13]. Эти оценки дают значения α порядка 0.01–0.1.

ние [2, 23]

$$V = K\left(u_x^2 u_y^2 + u_x^2 u_z^2 + u_y^2 u_z^2\right) = \frac{K}{4}\left(\sin^4\vartheta \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\vartheta\right), \tag{4}$$

где K — константа анизотропии, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения (далее будем использовать безразмерный параметр анизотропии $\sigma = vK/4kT$). При $K > 0$ потенциал (4) имеет 6 минимумов, 8 максимумов и 12 седловых точек (например, в направлениях [100], [111] и [110] соответственно) [2]. При $K < 0$ минимумы и максимумы меняются местами. При $K > 0$ как высоты всех потенциальных барьеров, так и энергия в седловых точках равны σ, тогда как при $K < 0$ высоты барьеров равны $|\sigma|/3$, а в седловых точках энергия равна $|\sigma|$ (см. [2]). Ниже мы ограничимся рассмотрением случая положительной анизотропии $K > 0$. Случай $K < 0$ рассматривается аналогично.

Преобразовав уравнение Гильберта (1) к виду уравнения Ландау—Лифшица [2] и записав его по компонентам в лабораторной системе координат, получим [12]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha g' M_s}\frac{d}{dt}u_x(t) = {} & \left[1 - u_x^2(t)\right]h_x(t) - \left[\alpha^{-1}u_z(t) + u_x(t)u_y(t)\right]h_y(t) + \\ & + \left[\alpha^{-1}u_y(t) - u_z(t)u_x(t)\right]h_z(t) + \left[1 - u_x^2(t)\right]H_x(t) - \\ & - \left[\alpha^{-1}u_z(t) + u_x(t)u_y(t)\right]H_y(t) + \left[\alpha^{-1}u_y(t) - u_z(t)u_x(t)\right]H_z(t),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha g' M_s}\frac{d}{dt}u_y(t) = {} & \left[\alpha^{-1}u_z(t) - u_x(t)u_y(t)\right]h_x(t) + \left[1 - u_y^2(t)\right]h_y(t) - \\ & - \left[\alpha^{-1}u_x(t) + u_y(t)u_x(t)\right]h_z(t) + \left[\alpha^{-1}u_z(t) - u_x(t)u_y(t)\right]H_x(t) + \\ & + \left[1 - u_y^2(t)\right]H_y(t) - \left[\alpha^{-1}u_x(t) + u_y(t)u_x(t)\right]H_z(t),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha g' M_s}\frac{d}{dt}u_z(t) = {} & -\left[\alpha^{-1}u_y(t) + u_x(t)u_z(t)\right]h_x(t) + \left[\alpha^{-1}u_x(t) - u_y(t)u_z(t)\right]h_y(t) + \\ & + \left[1 - u_z^2(t)\right]h_z(t) - \left[\alpha^{-1}u_y(t) + u_x(t)u_z(t)\right]H_x(t) + \\ & + \left[\alpha^{-1}u_x(t) - u_y(t)u_z(t)\right]H_y(t) + \left[1 - u_z^2(t)\right]H_z(t),\end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha = \gamma\eta M_s$ — безразмерный коэффициент диссипации,

$$g' = \frac{\gamma}{(1+\alpha^2)M_s}, \tag{8}$$

$$u_x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad u_y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad u_z = \cos\vartheta \tag{9}$$

(φ, ϑ — азимутальный и полярный углы). Здесь не учитываются поверхностные эффекты, а также предполагается, что намагниченность внутри частицы однородна.

Ниже будем использовать сферические гармоники $Y_{n,m}$ [26], которые в переменных u_x, u_y, u_z записываются в виде

$$Y_{n,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}\,(u_x + iu_y)^m \frac{d^m P_n(u_z)}{du_z^m}, \quad m \ge 0, \tag{10}$$

$$Y_{n,-m} = (-1)^m Y_{n,m}^*, \tag{11}$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра [26]. Кроме того, при усреднении и преобразованиях стохастических дифференциальных уравнений (5)–(7) с мультипликативным шумом удобно применить подход Стратоновича [25]. В частности, в этом случае не требуется предварительного преобразования уравнений (5)–(7) в эквивалентную форму уравнений Ито [22]. Таким образом, принимая во внимание, что при преобразованиях стохастических дифференциальных уравнений в рамках подхода [25] применимы правила обычного анализа [22, 23], нетрудно получить стохастическое дифференциальное уравнение для сферических гармоник:

$$\frac{d}{dt}Y_{n,m}(t) = \frac{1}{u_x(t)+iu_y(t)} \times \\ \times \left[mY_{n,m}(t)\left(\frac{d}{dt}u_x(t)+i\frac{d}{dt}u_y(t)\right) - Y_{n,m+1}(t)\sqrt{\frac{n+m+1}{n-m-1}}\,\frac{d}{dt}u_z(t)\right], \quad (12)$$

где $\dot{u}_x$, $\dot{u}_y$, $\dot{u}_z$ определяются соответственно из (5)–(7). Далее, используя метод, разработанный в [12, 23, 27] для решения нелинейных уравнений Ланжевена с мультипликативным шумом, можно вывести из (12) после ряда алгебраических преобразований систему связанных уравнений для равновесных корреляционных функций, характеризующих линейный отклик системы:

$$\tau_N \frac{d}{dt}c_{n,m}(t) = \sum_{s=-1}^{1}\sum_{r=-4}^{4} d_{n,m,r,s}c_{n+r,m+4s}(t), \quad (13)$$

где

$$c_{n,m}(t) = \langle \cos\vartheta(0) Y_{n,m}(t)\rangle_0. \quad (14)$$

Угловые скобки $\langle\,\rangle_0$ означают усреднение по равновесному состоянию в момент времени $t=0$,

$$\tau_N = \frac{v}{2kT\alpha g'} \quad (15)$$

— характерное время тепловых флуктуаций намагниченности. Коэффициенты $d_{n,m,r,s}$ приведены в Приложении А. Система уравнений (13) может быть также выведена из соответствующего уравнения Фоккера—Планка [19]

$$2\tau_N\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\left[\frac{v}{kT}\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\alpha\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)W + \frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right]\right\} + \\ + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{v}{kT}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)W + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right]. \quad (16)$$

Определив из (13) $c_{1,0}(t)$, можно рассчитать продольную динамическую восприимчивость и время релаксации, так как согласно теории линейной реакции [23] уменьшение намагниченности $\langle\mathbf{M}\rangle(t)$ при мгновенном выключении в момент времени $t=0$ слабого постоянного внешнего поля $\mathbf{H}_1$, параллельного оси z лабораторной системы координат, имеет вид

$$\langle M_\parallel\rangle(t) = \chi_\parallel H_1 C_\parallel(t), \quad (17)$$

где

$$C_{\parallel}(t) = c_{1,0}(t)/c_{1,0}(0) \tag{18}$$

— нормированная релаксационная функция продольной компоненты намагниченности,

$$\chi_{\parallel} = \frac{v^2 M_s^2 N_0}{3kT} \tag{19}$$

— статическая магнитная восприимчивость (здесь учтено, что для случая кубической анизотропии $\langle u_x^2 \rangle_0 = \langle u_y^2 \rangle_0 = \langle u_z^2 \rangle_0 = 1/3$), N_0 — число частиц в единице объема. Продольная динамическая магнитная восприимчивость $\chi_{\parallel}(\omega)$ выражается через спектр $C_{\parallel}(t)$ соотношением

$$\chi_{\parallel}(\omega) = \chi'_{\parallel}(\omega) - i\chi''_{\parallel}(\omega) = \chi_{\parallel}\left\{1 - i\omega\tilde{C}_{\parallel}(i\omega)\right\}, \tag{20}$$

где

$$\tilde{C}_{\parallel}(i\omega) = \int_0^{\infty} C_{\parallel}(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{21}$$

Кроме того, в экспериментах может быть измерено, а из (21) рассчитано время релаксации продольной компоненты намагниченности $\tau_{\parallel}$, определяемое как площадь под кривой $C_{\parallel}(t)$:

$$\tau_{\parallel} = \int_0^{\infty} C_{\parallel}(t)dt = \tilde{C}_{\parallel}(0). \tag{22}$$

Выше предполагалось, что все частицы являются идентичными. Чтобы учесть полидисперсность частиц, нужно также усреднить восприимчивость и время релаксации по соответствующим функциями распределения [8].

3. Формальный подход с использованием матричных непрерывных дробей к решению рекуррентных уравнений типа (13), где меняются два индекса, предлагался в [22, 23]. Однако применить этот подход на практике весьма затруднительно, так как при преобразованиях приходится вводить матрицы бесконечной размерности [28]. Ниже будем использовать усовершенствованный метод, который позволяет свести задачу к операциям с матрицами только конечной размерности. Введем вектор $\mathbf{C}_n(t)$:

$$\mathbf{C}_n(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{4n}(t) \\ \mathbf{c}_{4n-1}(t) \\ \mathbf{c}_{4n-2}(t) \\ \mathbf{c}_{4n-3}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{4n-i}(t) = \begin{pmatrix} c_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})}(t) \\ c_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})}(t) \\ \vdots \\ c_{4n-i,4(n-1+\delta_{i0})}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{23}$$

Вектор $\mathbf{C}_n(t)$ содержит $8n - 2$ элементов. Таким образом, уравнение (13) может быть преобразовано в матричное уравнение:

$$\tau_N \frac{d}{dt}\mathbf{C}_n(t) = \mathbf{Q}_n^- \mathbf{C}_{n-1}(t) + \mathbf{Q}_n \mathbf{C}_n(t) + \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{C}_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\mathbf{C}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{C}_1(t) = \begin{pmatrix} c_{4,-4}(t) \\ c_{4,0}(t) \\ c_{4,4}(t) \\ c_{3,0}(t) \\ c_{2,0}(t) \\ c_{1,0}(t) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Явный вид матриц $\mathbf{Q}_n^-$, $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^+$ приведен в Приложении А.

Применяя общий метод решения матричных рекуррентных уравнений из [23] (см. Приложение Б), получаем точное решение для образа Лапласа $\mathbf{C}_1(t)$ в виде

$$\tilde{\mathbf{C}}_1(s) = \tau_N \left[\tau_N s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_1^+ \mathbf{S}_2(s)\right]^{-1} \left\{ \mathbf{C}_1(0) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\prod_{k=2}^{n} \mathbf{Q}_{k-1}^+ \mathbf{S}_k(s) \left(\mathbf{Q}_k^-\right)^{-1} \right] \mathbf{C}_n(0) \right\}, \tag{26}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, матричная непрерывная дробь $\mathbf{S}_n(s)$ определяется соотношением

$$\mathbf{S}_n(s) = \cfrac{\mathbf{I}}{\tau_N s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_n^+ \cfrac{\mathbf{I}}{\tau_N s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^+ \cfrac{\mathbf{I}}{\tau_N s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{n+2} - \ldots} \mathbf{Q}_{n+2}^-} \mathbf{Q}_{n+1}^-} \mathbf{Q}_n^-. \tag{27}$$

Метод вычисления векторов начальных значений $\mathbf{C}_n(0)$ с помощью матричных непрерывных дробей изложен в Приложении В.

Формула (26) — точное решение уравнения (24), выраженное через матричные непрерывные дроби. В таком виде решение было получено в [23]. По своей сути формула (26) является аналитическим представлением численного алгоритма матричных непрерывных дробей, использованного в монографии [22]. Существенным развитием результатов [22] является то, что, во-первых, решение получено в аналитическом виде и выражается формулой (26) и, во-вторых, дано обобщение метода на случай, когда размерности матриц $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^-$, $\mathbf{Q}_n^+$ зависят от n. Как показано в [23] на многих примерах, соотношение (26) удобно для численных расчетов. Для рассматриваемой задачи максимальная размерность всех необходимых при расчетах матриц имеет порядок 10^2, что позволяет проводить вычисления на обычном персональном компьютере.

4. Рассмотрим вначале зависимость времени релаксации $\tau_\parallel$ от параметра анизотропии $\sigma = vK/4kT$ при различных значениях параметра диссипации α. Эти зависимости, рассчитанные по формулам (22), (26), показаны на рис. 1. По физическому смыслу $\tau_\parallel$ определяется, главным образом, самой низкочастотной продольной релаксационной модой, связанной с переходами вектора намагниченности через потенциальный барьер из одной потенциальной ямы в другую. Характерное время релаксации τ этой низкочастотной моды определяется обратной величиной наименьшего собственного значения λ_1 оператора Фоккера—Планка в (16). В низкотемпературном пределе ($\sigma \gg 1$) и при сильной и/или умеренной диссипации ($\alpha \geq 1$) оценка τ дается соотношением [2, 15] (в наших обозначениях)

$$\tau \sim \frac{\tau_N \pi e^{\sigma}}{2\sqrt{2}\sigma\left(\sqrt{9+8/\alpha^2}+1\right)}, \quad \sigma > 0. \tag{28}$$

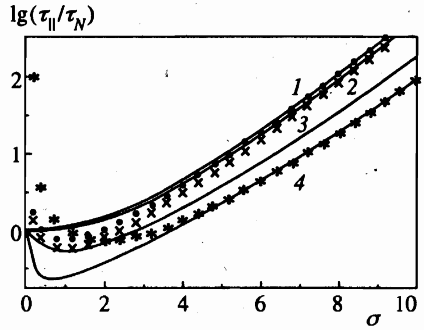


Рис. 1. Зависимости $\lg(\tau/\tau_N)$ от параметра анизотропии σ при различных значениях параметра диссипации α. Сплошные кривые — численный расчет по формулам (22) и (26) при $\alpha \to \infty$ (*1*), 1 (*2*), 0.1 (*3*), 0.01 (*4*). •, × — асимптотические зависимости (28) при $\alpha \to \infty$ и 1, $*$ — расчет по формуле (29) при $\alpha = 0.01$

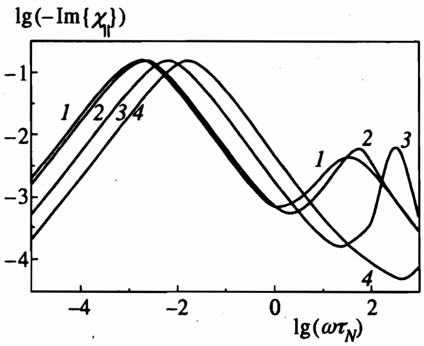
При малой диссипации ($\alpha \ll 1$) соответствующая формула [13, 18] имеет вид

$$\tau \sim \frac{\pi k T e^{\sigma}}{2\omega_A \Delta E} \approx \frac{\tau_N \pi e^{\sigma}}{8\sigma^2}, \quad \sigma > 0, \tag{29}$$

где $\omega_A = 8\sigma\gamma kT/vM_s$ — частота колебаний в потенциальной яме, $\Delta E \approx \alpha v K/4$ — потери энергии за период почти периодического движения $\mathbf{M}(t)$ [13]. Как видно на рис. 1, в отличие от одноосных частиц, где отношение $\tau_{\parallel}/\tau_N$ не зависит от α [6, 9], для случая кубической анизотропии отношение $\tau_{\parallel}/\tau_N$ сильно зависит от α. Эта зависимость обусловлена взаимодействием поперечных и продольных релаксационных «внутриямных» (intrawell) мод. Результатом этого взаимодействия, в частности, является немонотонная зависимость $\tau_{\parallel}/\tau_N$ от σ при малых значениях α (для $\sigma < 1$ вклад поперечных мод приводит к уменьшению $\tau_{\parallel}/\tau_N$ при увеличении σ, при дальнейшем увеличении σ доминирующей становится низкочастотная продольная релаксационная мода и $\tau_{\parallel}/\tau_N$ начинает экспоненциально расти). Следует отметить, что при промежуточных значениях α (например, при $\alpha \approx 0.1$) ни соотношение (28), ни (29) не дают правильных значений $\tau_{\parallel}/\tau_N$. В этом случае требуется более точный анализ, а простые оценочные формулы отсутствуют [13].

Зависимость продольной релаксации от α также проявляется в спектрах $\chi''_{\parallel}(\omega)$, показанных на рис. 2, 3. На этих рисунках видны два пика в спектре потерь (расчеты были выполнены при $v^2 M_s^2 N_0/kT = 1$). Первый (низкочастотный) пик проявляется на частотах порядка средней частоты переориентации вектора намагниченности. Характерная частота и полуширина этой полосы определяются величиной τ. Дисперсия восприимчивости в этой области частот носит чисто релаксационный характер. Второй, более слабый пик обусловлен вкладом поперечных и продольных высокочастотных мод. При уменьшении α эта высокочастотная полоса сужается и смещается в область высоких частот, а характер дисперсии при этом меняется с релаксационного на резонансный. С другой стороны, эта полоса также смещается в область высоких частот при возрастании σ, но без заметного сужения. Такое поведение объясняется доминирующим влиянием на эту полосу поперечных мод, которые определяют спектр поперечной восприимчивости и ферромагнитный резонанс на частотах прецессии вектора намагниченности $\omega_0 \sim \sigma(\alpha\tau_N)^{-1}$ с затуханием $\sim \alpha^{-1}$ [6].

Разработанная модель может быть использована для объяснения результатов измерений динамической восприимчивости систем однодоменных частиц с кубической анизотропией. До сих пор интерпретация экспериментов для таких систем проводилась в рамках модели одноосных частиц (например [29, 30], где изучались частотные и



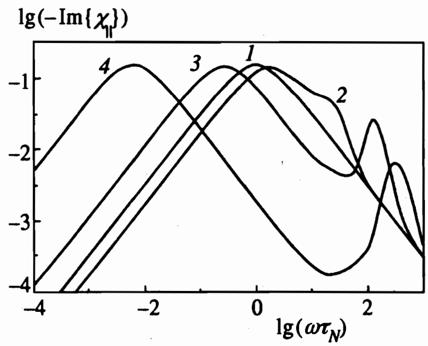


Рис. 2 **Рис. 3**

Рис. 2. $\lg[-\operatorname{Im}(\chi''_{\parallel})]$ как функция $\lg(\omega\tau_N)$ при $\sigma = 10$ и различных значениях параметра диссипации $\alpha = \infty$ (*1*), 1 (*2*), 0.1 (*3*), 0.01 (*4*)

Рис. 3. $\lg[-\operatorname{Im}(\chi''_{\parallel})]$ как функция $\lg(\omega\tau_N)$ при $\alpha = 0.1$ и различных значениях параметра анизотропии $\sigma = 0$ (*1*), 1 (*2*), 5 (*3*), 10 (*4*)

температурные зависимости линейной и нелинейной динамической восприимчивости систем однодоменных частиц на основе кобальта). Однако, как показано в данной статье, отклик частиц с кубической анизотропией имеет поведение, существенно отличающееся от случая одноосных частиц. В частности, необходимо принимать во внимание зависимость отклика от параметра диссипации α. По-видимому, пренебрежение этим обстоятельством не позволило получить в [29] количественного согласия с экспериментом. Можно надеяться, что предложенный нами подход позволит дать количественное описание экспериментов из работ [29, 30] и аналогичных им. Мы предполагаем провести детальное сопоставление теории с экспериментом по частотным и температурным зависимостям линейной и нелинейной динамической восприимчивости систем однодоменных частиц с кубической анизотропией в другой работе, так как для этого необходимо рассчитать поперечную компоненту линейной восприимчивости[2)] $\chi_{\perp}$, а для сравнения с экспериментами по нелинейному отклику рассчитать нелинейную динамическую восприимчивость. Кроме того, необходимо учесть распределение частиц по объемам. Все эти задачи могут быть решены в рамках предложенного метода, однако такой анализ выходит за рамки данной работы[3)].

5. Таким образом, продольная динамическая восприимчивость $\chi_{\parallel}(\omega)$ и время релаксации $\tau_{\parallel}$ в случае кубической анизотропии могут быть рассчитаны по формуле (26)

[2)] В экспериментах по измерению динамической восприимчивости, как правило, рассматриваются системы частиц, оси анизотропии которых ориентированы случайным образом. В этом случае магнитная восприимчивость имеет вид $\chi = (\chi_{\parallel} + 2\chi_{\perp})/3$.

[3)] Использованный в работе метод расчета динамической восприимчивости является весьма общим и может быть применен при изучении релаксационных процессов и ферромагнитного резонанса в системах однодоменных частиц с магнитной анизотропией разного вида, находящихся в сильных внешних постоянных и переменных магнитных полях.

с помощью матричных непрерывных дробей во всех диапазонах изменения параметров анизотропии и диссипации. При этом, в отличие от случая одноосных частиц, имеются существенные зависимости спектра $\chi_{\|}(\omega)$ и времени релаксации $\tau_{\|}$ частиц с кубической анизотропией от α, что обусловлено взаимодействием продольных и поперечных мод.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16762-а). Благодарим В. Т. Коффи и Ю. Л. Райхера за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Явный вид матриц $\mathbf{Q}_n^-$, $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^+$ и их элементов

Матрицы $\mathbf{Q}_n^-$, $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^+$ из (24) задаются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_n^- = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{4n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{4n-1} & \mathbf{J}_{4n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{4n-2} & \mathbf{D}_{4n-2} & \mathbf{J}_{4n-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{4n-3} & \mathbf{P}_{4n-3} & \mathbf{D}_{4n-3} & \mathbf{J}_{4n-3} \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{4n} & \mathbf{B}_{4n} & \mathbf{P}_{4n} & \mathbf{D}_{4n} \\ \mathbf{B}_{4n}^T & \mathbf{A}_{4n-1} & \mathbf{B}_{4n-1} & \mathbf{P}_{4n-1} \\ f_{4n}\mathbf{P}_{4n}^T & \mathbf{B}_{4n-1}^T & \mathbf{A}_{4n-2} & \mathbf{B}_{4n-2} \\ \mathbf{D}_{4n}^T & f_{4n-1}\mathbf{P}_{4n-1}^T & \mathbf{B}_{4n-2}^T & \mathbf{A}_{4n-3} \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\mathbf{Q}_n^+ = \begin{pmatrix} g_{4n+4}\mathbf{J}_{4n+4}^T & \mathbf{D}_{4n+3}^T & f_{4n+2}\mathbf{P}_{4n+2}^T & \mathbf{B}_{4n+3}^T \\ \mathbf{0} & g_{4n+3}\mathbf{J}_{4n+3}^T & \mathbf{D}_{4n+2}^T & f_{4n+1}\mathbf{P}_{4n+1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & g_{4n+2}\mathbf{J}_{4n+2}^T & \mathbf{D}_{4n+1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & g_{4n+1}\mathbf{J}_{4n+1}^T \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

где верхний индекс T означает транспонирование,

$$f_n = -\frac{2n-11}{2n+9}, \quad g_n = -\frac{n-4}{n+1}. \tag{A.4}$$

Размерности матриц $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^+$, $\mathbf{Q}_n^-$ соответственно равны $(8n-2)\times(8n-2)$, $(8n-2)\times$ $\times(8n+6)$, $(8n-2)\times(8n-10)$. Исключение составляет матрица $\mathbf{Q}_1^-$, которая вырождается в вектор размерности 6.

В уравнениях (A.1)–(A.3) подматрицы $\mathbf{A}_{4n}$, $\mathbf{A}_{4n-1}$, $\mathbf{A}_{4n-2}$, $\mathbf{A}_{4n-3}$, $\mathbf{B}_{4n-1}$, $\mathbf{B}_{4n-2}$, $\mathbf{B}_{4n-3}$, $\mathbf{D}_{4n-1}$, $\mathbf{P}_{4n-1}$, $\mathbf{P}_{4n-2}$ представляются в виде

$$\mathbf{X}_{4n-i} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})} & x^{+}_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})} & 0 & \cdots & 0 \\ x^{-}_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})} & x_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})} & x^{+}_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})} & \cdots & 0 \\ 0 & x^{-}_{4n-i,-4(n-3+\delta_{i0})} & x_{4n-i,-4(n-3+\delta_{i0})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{4n-i,4(n-1+\delta_{i0})} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

$(i = 0, 1, 2, 3)$ и имеют размерность $[2(n + \delta_{i0}) - 1] \times [2(n + \delta_{i0}) - 1]$. Подматрицы $\mathbf{B}_{4n}$, $\mathbf{D}_{4n}$, $\mathbf{J}_{4n}$, $\mathbf{P}_{4n}$, $\mathbf{D}_{4n-2}$, $\mathbf{D}_{4n-3}$, $\mathbf{J}_{4n-1}$, $\mathbf{J}_{4n-2}$, $\mathbf{J}_{4n-3}$, $\mathbf{P}_{4n-3}$ имеют вид

$$\mathbf{X}_{4n-i} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^{+}_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})} & x^{+}_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})} & 0 & \cdots & 0 \\ x^{-}_{4n-i,-4(n-3+\delta_{i0})} & x_{4n-i,-4(n-3+\delta_{i0})} & x^{+}_{4n-i,-4(n-3+\delta_{i0})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-}_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

$(i = 0, 1, 2, 3)$ и имеют размерность $[2(n+\delta_{0i}) - 1] \times [2(n+\delta_{0i}) - 3]$. Элементы подматриц в (A.5), (A.6) задаются выражениями

$$a_{n,m} = d_{n,m,0,0} = \sigma \frac{9(n-1)n(n+1)(n+2) - 15m^2\left[6n(n+1) - 5 - 7m^2\right]}{(2n-3)(2n-1)(2n+3)(2n+5)} - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a^{-}_{n,m} = a^{+}_{n,-m} = d_{n,m,0,-1} =$$
$$= \frac{15\sigma\sqrt{(n+m)(n-m+4)\left[n^2-(m-3)^2\right]\left[n^2-(m-2)^2\right]\left[n^2-(m-1)^2\right]}}{2(2n-3)(2n-1)(2n+3)(2n+5)},$$

$$b_{n,m} = d_{n,m,-1,0} = -\frac{3i\sigma m(3n^2-5-7m^2)}{\alpha(4n^2-9)}\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}},$$

$$b^{-}_{n,m} = -b^{+}_{n,-m} = d_{n,m,-1,-1} =$$
$$= -\frac{3i\sigma}{2\alpha(4n^2-9)}\sqrt{\frac{(n+m-4)(n+m)\left[n^2-(m-3)^2\right]\left[n^2-(m-2)^2\right]\left[n^2-(m-1)^2\right]}{4n^2-1}},$$

$$p_{n,m} = d_{n,m,-2,0} = \frac{\sigma(2n+9)(n^2-n-2-7m^2)}{(2n-5)(2n-1)(2n+3)}\sqrt{\frac{\left[n^2-m^2\right]\left[(n-1)^2-m^2\right]}{(2n+1)(2n-3)}},$$

$$p^{-}_{n,m} = p^{+}_{n,-m} = d_{n,m,-2,-1} = -\frac{\sigma(2n+9)}{2(2n-5)(2n-1)(2n+3)} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(n+m-5)(n+m-4)(n+m-3)(n+m)\left[n^2-(m-2)^2\right]\left[n^2-(m-1)^2\right]}{(2n+1)(2n-3)}},$$

$$d_{n,m} = d_{n,m,-3,0} = -\frac{7i\sigma m}{\alpha(2n-3)(2n-1)}\sqrt{\frac{(n^2-m^2)\left[(n-1)^2-m^2\right]\left[(n-2)^2-m^2\right]}{(2n-5)(2n+1)}},$$

$$d^-_{n,m} = -d^+_{n,-m} = d_{n,m,-3,-1} = \frac{i\sigma}{2\alpha(2n-3)(2n-1)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(n+m-6)(n+m-5)\dots(n+m-1)(n+m)(n-m+1)}{(2n-5)(2n+1)}},$$

$$j_{n,m} = d_{n,m,-4,0} = \frac{7\sigma(n+1)}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\left[(n-3)^2-m^2\right]\left[(n-2)^2-m^2\right]\left[(n-1)^2-m^2\right]\left[n^2-m^2\right]}{(2n-7)(2n+1)}},$$

$$j^-_{n,m} = j^+_{n,-m} = d_{n,m,-4,-1} = \frac{\sigma(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(n+m-7)(n+m-6)\dots(n+m-1)(n+m)}{(2n-7)(2n+1)}}.$$

Здесь было учтено, что для коэффициентов $d_{n,m,r,s}$ справедливы следующие соотношения:

$$d_{n,m,r,1} = d^*_{n,-m,r,-1},$$

$$d_{n,m,1,s} = d^*_{n+1,-m-4s,-1,s}, \quad d_{n,m,3,s} = d^*_{n+3,-m-4s,-3,s},$$

$$d_{n,m,2,s} = f_{n+2}d_{n+2,-m-4s,-2,s}, \quad d_{n,m,4,s} = g_{n+4}d_{n+4,-m-4s,-4,s},$$

где $s = 0, -1$, а f_n, g_n определены в (А.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решение уравнения (24)

С помощью преобразования Лапласа уравнение (24) сводится к виду

$$\mathbf{Q}^-_n\tilde{\mathbf{C}}_{n-1}(s) + |\mathbf{Q}_n - s\tau_N\mathbf{I}|\tilde{\mathbf{C}}_n(s) + \mathbf{Q}^+_n\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}(s) = -\tau_N\mathbf{C}_n(0), \tag{Б.1}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица,

$$\tilde{\mathbf{C}}_n(s) = \int\limits_0^\infty \mathbf{C}_n(t)e^{-st}dt. \tag{Б.2}$$

Следуя [22, 23], будем искать решение $\tilde{\mathbf{C}}_n(s)$ в виде

$$\tilde{\mathbf{C}}_n(s) = \mathbf{S}_n(s)\tilde{\mathbf{C}}_{n-1}(s) + \mathbf{U}_n(s), \tag{Б.3}$$

где $\mathbf{S}_n(s)$ — матричная непрерывная дробь, задаваемая соотношением (27). Подставляя (Б.3) в (Б.1) и учитывая, что согласно определению непрерывной дроби (27)

$$\mathbf{S}_n(s) = \left[s\tau_N \mathbf{I} - \mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{S}_{n+1}(s)\right]^{-1} \mathbf{Q}_n^-,$$

получаем рекуррентное уравнение для $\mathbf{U}_n(s)$:

$$\mathbf{U}_n(s) = \mathbf{S}_n(s)(\mathbf{Q}_n^-)^{-1}\left[\tau_N \mathbf{C}_n(0) + \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{U}_{n+1}(s)\right]. \tag{Б.4}$$

Решение (Б.4) находится последовательной подстановкой и имеет вид

$$\mathbf{U}_n(s) = \tau_N \mathbf{S}_n(s)(\mathbf{Q}_n^-)^{-1}\left\{\mathbf{C}_n(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{m=1}^{k} \mathbf{Q}_{n+m-1}^+ \mathbf{S}_{n+m}(s)(\mathbf{Q}_{n+m}^-)^{-1}\right]\mathbf{C}_{n+k}(0)\right\}. \tag{Б.5}$$

Таким образом, учитывая (Б.3) и (Б.5), получаем для $n = 1$ и $\tilde{\mathbf{C}}_0(0) = 0$ искомое решение (26).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление векторов начальных значений

Векторы начальных значений $\mathbf{C}_n(0)$ в (26) также удобно рассчитать с помощью матричных непрерывных дробей [22, 23]. Согласно (14), начальные значения $c_{n,m}(0)$ имеют вид

$$c_{n,m}(0) = \langle \cos\vartheta(0) Y_{n,m}(0)\rangle_0 = \sqrt{\frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)}}\,\langle Y_{n+1,m}\rangle_0 + \sqrt{\frac{n^2-m^2}{(2n+1)(2n-1)}}\,\langle Y_{n-1,m}\rangle_0. \tag{В.1}$$

В соответствии с (13) равновесные средние $\langle Y_{n,m}\rangle_0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sum_{s=-1}^{1}\sum_{r=-4}^{4} d_{n,m,r,s}\langle Y_{n+r,m+4s}\rangle_0 = 0, \tag{В.2}$$

которое может быть записано в виде матричного рекуррентного соотношения:

$$\mathbf{Q}_n^- \mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{Q}_n \mathbf{R}_n + \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{В.3}$$

где матрицы $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_n^+$, $\mathbf{Q}_n^-$ определяются согласно (А.1)–(А.3),

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{4n} \\ \mathbf{r}_{4n-1} \\ \mathbf{r}_{4n-2} \\ \mathbf{r}_{4n-3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{4n-i} = \begin{pmatrix} \langle Y_{4n-i,-4(n-1+\delta_{i0})}\rangle_0 \\ \langle Y_{4n-i,-4(n-2+\delta_{i0})}\rangle_0 \\ \vdots \\ \langle Y_{4n-i,4(n-1+\delta_{i0})}\rangle_0 \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Решение уравнения (B.3) имеет вид

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{S}_n(0)\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{S}_n(0)\mathbf{S}_{n-1}(0)\ldots\mathbf{S}_2(0)\mathbf{S}_1(0)/\sqrt{4\pi}, \tag{B.4}$$

где $\mathbf{S}_n(0)$ — матричная непрерывная дробь, определенная соотношением (27) при $s = 0$, и учтено, что $\mathbf{R}_0 = 1/\sqrt{4\pi}$.

С учетом (B.4) начальные значения $\mathbf{C}_n(0)$ выражаются следующим образом:

$$\mathbf{C}_n(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\hat{\mathbf{K}}_n + \left[\mathbf{K}_n + \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^T\mathbf{S}_{n+1}(0)\right]\mathbf{S}_n(0)\right]\mathbf{S}_{n-1}(0)\ldots\mathbf{S}_1(0), \tag{B.5}$$

где матрицы $\mathbf{K}_n$, $\hat{\mathbf{K}}_n$ имеют вид

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{U}_{4n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{4n}^T & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{4n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{4n-1}^T & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{4n-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{4n-2}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{4n-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{B.6}$$

причем матрица $\hat{\mathbf{K}}_1$ вырождается в вектор размерности 6. Подматрицы $\mathbf{U}_{4n-1}$, $\mathbf{U}_{4n-2}$, $\mathbf{U}_{4n-3}$ в (B.6) задаются в виде

$$\mathbf{U}_{4n-i} = \begin{pmatrix} u_{4n-i,-4(n-1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{4n-i,-4(n-2)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & u_{4n-i,-4(n-3)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{4n-i,4(n-1)} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

$(i = 1, 2, 3)$ и имеют размерность $(2n-1)\times(2n-1)$. Подматрица $\mathbf{U}_{4n}$ имеет вид

$$\mathbf{U}_{4n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_{4n,-4n+4} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{4n,-4n+8} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{4n,4n-4} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

(ее размерность $(2n+1)\times(2n-1)$). Элементы подматриц (B.7)–(B.8) задаются как

$$u_{n,m} = \sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}}.$$

Литература

1. L. Neel, Ann. Geophys. **5**, 99 (1949).
2. W. F. Brown, Jr. IEEE Trans. Mag. **15**, 1196 (1979).
3. H. B. Braun and H. N. Bertram, J. Appl. Phys. **75**, 4609 (1994).
4. W. F. Brown Jr., J. Appl. Phys. **30**, 130S (1959).
5. A. Aharoni, Phys. Rev. **177**, 763 (1969).
6. Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис, ЖЭТФ **67**, 1060 (1974).
7. Д. А. Гаранин, В. В. Ищенко, Л. В. Панина, ТМФ **82**, 242 (1990).
8. Ю. Л. Райхер, В. И. Степанов, ЖЭТФ **102**, 1409 (1992).
9. W. T. Coffey, D. S. F. Crothers, Yu. P. Kalmykov, and J. T. Waldron, Phys. Rev. B **51**, 15947 (1995).
10. D. A. Garanin, Phys. Rev. E **54**, 3250 (1996).
11. Э. К. Садыков, А. Г. Исавнин, ФТТ **38**, 2104 (1996).
12. Yu. P. Kalmykov and W. T. Coffey, Phys. Rev. B **56**, 3325 (1997).
13. I. Klik and L. Gunther, J. Stat. Phys. **60**, 473 (1990).
14. A. Aharoni, Phys. Rev. B **7**, 1103 (1973).
15. D. A. Smith and F. A. de Rosario, J. Magn. Magn. Mater. **3**, 219 (1976).
16. I. Eisenshtein and A. Aharoni, Phys. Rev. B **16**, 1278 (1977).
17. I. Eisenshtein and A. Aharoni, Phys. Rev. B **16**, 1285 (1977).
18. I. Klik and L. Gunther, J. Appl. Phys. **67**, 4505 (1990).
19. L. J. Geoghegan, W. T. Coffey, and B. Mulligan, in *Advances in Chemical Physics*, Series ed. by I. Prigogine and S. A. Rice, New York, Wiley (1997), Vol. 100, p. 475.
20. W. F. Brown Jr., Phys. Rev. **130**, 1677 (1963).
21. Yu. L. Raikher and M. I. Shliomis, in *Advances in Chemical Physics*, ed. by W. T. Coffey, Series ed. by I. Prigogine and S. A. Rice, Wiley, New York (1994), Vol. 87, p. 595.
22. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Berlin, Springer (1989).
23. W. T. Coffey, Yu. P. Kalmykov, and J. T. Waldron, *The Langevin Equation*, Singapore, World Scientific (1996).
24. T. L. Gilbert, Phys. Rev. **100**, 1243 (1956).
25. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике*, Сов. Радио, Москва (1961).
26. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
27. Ю. П. Калмыков, Химическая физика **16**, 130 (1997).
28. H. J. Breymayer, H. Risken, H. D. Vollmer, and W. Wonneberger, Appl. Phys. B **28**, 335 (1982).
29. T. Bitoh, K. Ohba, M. Takamatsu, T. Shirane, and S. Chikazawa, J. Phys. Soc. Jap. **64**, 1311 (1995).
30. T. Bitoh, K. Ohba, M. Takamatsu, T. Shirane, and S. Chikazawa, J. Magn. Magn. Mater. **154**, 59 (1996).