ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 5(11), стр. 1661–1671

РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Г. Ф. Ефремов

Нижегородский государственный педагогический университет
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 28 мая 1998 г.

Получено точное решение задачи о реакции собственного поля излучения релятивистского классического электрона, принципиально отличающееся от известных формул наличием четной составляющей по времени. Показано, что нечетная часть по времени обобщенной силы реакции в точности совпадает с хорошо известной релятивистской силой трения, полученной с помощью преобразования Лоренца из приближенной нерелятивистской формулы.

1. ВВЕДЕНИЕ

По образному выражению В. Л. Гинзбурга, в физике имеется несколько буквально вечных вопросов, которые уже не одно десятилетие обсуждаются в научной литературе. Один из таких вопросов касается проблемы радиационного затухания [1].

Классическое выражение для радиационной силы трения (см. (75.8) из [2]), как известно, приводит к неустойчивости электрона, или так называемому парадоксу самоускорения. Фактически это означает не только нарушение закона сохранения энергии, но и принципа причинности [3]. Эти парадоксы, возникшие по сути дела в начале века, до сих пор продолжают привлекать к себе внимание [4–10]. Постоянный интерес к проблеме радиационного затухания тем не менее не мог привести к ее решению в рамках классической электродинамики. Физически это связано с тем, что радиационное затухание имеет принципиально квантовую природу [3].

Указанные выше парадоксы удается разрешить благодаря учету принципиально квантовых закономерностей взаимодействия электрона с полем излучения [3], откуда следует также строгое обоснование условий применимости часто используемых классических формул радиационного затухания [1].

В связи с этим приобретает особое значение устранение имеющихся до настоящего времени пробелов классической теории радиационного затухания.

1. В классической теории отсутствует последовательный релятивистский вывод для радиационной силы трения. Общепринятый переход в релятивистскую область осуществляется с помощью преобразований Лоренца из приближенной нерелятивистской формулы (75.8) из [2], что не является достаточным для физической теории.

2. Отсутствует процедура устранения расходимостей, присущих классической электродинамике.

3. В нерелятивистской модели электромагнитная масса входит с неправильным множителем 4/3, полученным первоначально Томсоном, а затем Абрагамом и Лоренцом [11].

В работе приведено точное выражение для силы реакции собственного поля излучения электрона, принципиально релятивистский характер которой определяется функцией Грина поля. Следовательно, сила реакции имеет как четную, так и нечетную составляющие относительно обращения времени. На основе интегрального представления функции Грина предложена процедура устранения расходимостей и перенормировки массы. Показано, что в релятивистской теории (в отличие от нерелятивистской модели Абрагама—Лоренца [11]) отсутствует множитель 4/3 в выражении для электромагнитной массы. Получено точное аналитическое выражение для обобщенной релятивистской радиационной силы трения, установлено ее соответствие и принципиальное отличие от хорошо известной релятивистской формулы [1, 2]. Именно нечетная относительно обращения времени составляющая радиационной силы в точности совпадает с хорошо известной релятивистской формулой. Принципиально новый результат заключается в наличии четной составляющей радиационной силы, которая отсутствовала в известных ранее формулах. В системе координат, связанной с электроном, ее можно трактовать как новый эффект зависимости массы от ускорения.

Таким образом, точное решение физической задачи, само по себе представляющее значительный интерес, в данном случае позволяет установить качественно новые закономерности радиационного затухания классического электрона как в релятивистской, так и нерелятивистской областях.

2. РЕАКЦИЯ СОБСТВЕННОГО ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА

Поставим задачу строгого вывода силы реакции собственного поля излучения точечного классического электрона, не прибегая к обычно используемому нерелятивистскому приближению. С точки зрения принципа соответствия последовательной квантовой теории [3] целесообразно исходить из гамильтонова метода решения классической задачи [1].

Релятивистский гамильтониан электрона, находящегося в некотором потенциальном поле с потенциальной энергией $V(\mathbf{r})$ и взаимодействующего с собственным полем излучения, имеет вид

$$H = c\sqrt{[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2 + (mc)^2} + eA_0(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r}) + F. \tag{1}$$

Здесь $A_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — потенциалы поля излучения; F — гамильтониан поля излучения. При анализе проблемы радиационного затухания удобно воспользоваться калибровочной симметрией, выбирая поперечную (кулоновскую) калибровку для потенциалов поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{2}$$

Скалярный потенциал $A_0(\mathbf{r},t)$, ответственный в этом случае за кулоновское взаимодействие [12], не приводит к наблюдаемым эффектам в одночастичной задаче и может быть опущен в гамильтониане системы (1).

Для вывода радиационной силы трения необходимо записать точные уравнения движения для динамических переменных электрона. Из гамильтониана системы (1) следует хорошо известное уравнение Лоренца:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{r}_j(t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]+\nabla_j V(\mathbf{r}(t),t)=$$
$$=-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_j(\mathbf{r}(t),t)+\frac{e}{c}\dot{r}_\alpha(t)(\nabla_j A_\alpha(\mathbf{r}(t),t)-\nabla_\alpha A_j(\mathbf{r}(t),t)), \tag{3}$$

где $\dot{r}_j(t)=\partial H/\partial p_j\equiv v_j(t)$ есть компоненты скорости электрона.

Потенциалы поля в уравнении Лоренца (3), являющиеся функциями координаты электрона $\mathbf{r}(t)$ в тот же момент времени t, представим в виде разложения Фурье:

$$A_j(\mathbf{r}(t),t)=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\exp\left[i\mathbf{kr}(t)\right]A_j(\mathbf{k},t), \tag{4}$$

где компоненты Фурье $A_j(\mathbf{k},t)$ явно не содержат переменных электрона. Канонически сопряженные с $A_j(\mathbf{k},t)$ компоненты плотности тока находим из гамильтониана (1) согласно

$$-\frac{\delta H}{\delta A_j(\mathbf{k},t)}=\frac{e}{c}\dot{r}_j(t)\exp\left[i\mathbf{kr}(t)\right]. \tag{5}$$

Из гамильтониана следуют уравнения для компонент Фурье $A_j(\mathbf{k},t)$ потенциалов поля:

$$\left(k^2+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)A_j(\mathbf{k},t)=\frac{4\pi}{c}e\dot{r}_j(t)\exp\left[i\mathbf{kr}(t)\right], \tag{6}$$

представляющие собой уравнения Максвелла для поля излучения при воздействии электрона с плотностью тока

$$j_\alpha(\mathbf{r},t)=e\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\dot{r}_\alpha(t).$$

Из уравнения (6) находим его точное решение для поля излучения, создаваемого электроном:

$$A_j(\mathbf{k},t)=\frac{e}{c}\int dt_1 D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\dot{r}_l(t_1)\exp\left[-i\mathbf{kr}(t_1)\right], \tag{7}$$

где $D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)$ есть так называемая запаздывающая функция Грина поля. В принятой калибровке спектр Фурье функции Грина имеет вид [13]

$$D_{jl}(\mathbf{k},\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau e^{i\omega\tau}D_{jl}(\mathbf{k},\tau)=4\pi(k^2+\varkappa^2)^{-1}\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{k^2}\right), \tag{8}$$

$$k=|\mathbf{k}|,\quad \varkappa^2=\left(\frac{i\omega}{c}\right)^2(1+i\varepsilon\,\mathrm{sign}\,\omega).$$

Наличие множителя $i\varepsilon\,\mathrm{sign}\,\omega$ ($\varepsilon>0$) обеспечивает правильный обход полюса запаздывающей функции Грина. В классической электродинамике отсутствует понятие электромагнитного вакуума и, как следствие этого, в (7) отсутствует свободное решение уравнения (6).

В результате поле реакции излучения, создаваемое самим электроном, оказывается исключительно зависящим от переменных электрона. После подстановки строгого решения (7) в (4) имеем

$$A_j(\mathbf{r}(t),t) = \frac{e}{c}\int dt_1 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} D_{jl}(\mathbf{k}, t-t_1)\dot{r}_l(t_1)\exp(i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}), \tag{9}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1).$$

Наконец, после подстановки (9) в уравнение Лоренца (3) получим строгое релятивистское выражение для радиационной силы трения классического электрона:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\mathbf{r}_j(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}}\right] + V(\mathbf{r}(t)) = F_j(t) \equiv$$
$$\equiv -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t}\int dt_1 \int \frac{d\omega}{2\pi}\exp\left[-i\omega(t-t_1)\right] D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega)\dot{r}_l(t_1) +$$
$$+\left(\frac{e}{c}\right)^2 \dot{r}_\alpha(t)\int dt_1\int\frac{d\omega}{2\pi}\exp\left[-i\omega(t-t_1)\right]\left[\nabla_j D_{\alpha l}(\Delta\mathbf{r},\omega) - \nabla_\alpha D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega)\right]\dot{r}_l(t_1), \tag{10}$$

где

$$D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\exp(i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})D_{jl}(\mathbf{k},\omega) \tag{11}$$

определяет пространственную зависимость функции Грина поля. С помощью перехода от частной к полной производной по времени выражение для радиационной силы $F_j(t)$ в (10) можно переписать также в виде

$$F_j(t) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{d}{dt}\int dt_1\int\frac{d\omega}{2\pi}\exp\left[-i\omega(t-t_1)\right]D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega)\dot{r}_l(t_1) +$$
$$+\left(\frac{e}{c}\right)^2\dot{r}_\alpha(t)\nabla_j\int dt_1\int\frac{d\omega}{2\pi}\exp\left[-i\omega(t-t_1)\right]D_{\alpha l}(\Delta\mathbf{r},\omega)\dot{r}_l(t_1). \tag{12}$$

Этот же результат может быть получен путем предельного перехода при $\hbar \to 0$ из полученной в [3] квантовомеханической формулы (24) при нулевой температуре.

Приведенное выше строгое определение силы реакции излучения классического электрона без обращения к нерелятивистскому пределу представляет особый интерес, так как позволяет непосредственно убедиться в том, что парадокс самоускорения и нарушение принципа причинности нельзя устранить в рамках классической электродинамики.

3. ЗАПАЗДЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ПОЛЯ. ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Для того чтобы получить явную аналитическую зависимость радиационной силы $F_j(t)$, необходимо прежде всего выполнить преобразование Фурье (11) функции Грина (8). Особенности функции Грина (8) как тензора определяются поперечностью векторного потенциала поля в выбранной кулоновской калибровке (2). Для удобства вычислений выделим из тензора (8) его главную скалярную часть, для которой введем обозначение

$$G(k,\omega) = \frac{4\pi}{k^2 + \varkappa^2}, \qquad \varkappa = \frac{i\omega}{c}(1 + i\varepsilon \operatorname{sign}\omega), \tag{13}$$

и перепишем (8) в виде

$$D_{jl}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{jl}G(k,\omega) + \frac{1}{\varkappa^2}k_j k_l[G(k,\omega) - G(k,0)]. \tag{14}$$

Используя аналитические свойства функции (13) в верхней полуплоскости ω, запишем ее преобразование Фурье:

$$G(\Delta r,\omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}) \frac{4\pi}{k^2 + \varkappa^2} = \frac{1}{\Delta r} \exp(\varkappa \Delta r), \tag{15}$$

$$\Delta r = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)|, \qquad \varkappa = i\omega/c,$$

а также преобразование Фурье функции Грина (11):

$$D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega) = \delta_{jl}G(\Delta r,\omega) - \frac{1}{\varkappa^2}\nabla_j \nabla_l \tilde{G}(\Delta r,\omega). \tag{16}$$

Для функции

$$\tilde{G}(\Delta r,\omega) = G(\Delta r,\omega) - G(\Delta r,0) \tag{17}$$

введем чрезвычайно полезное для последующих вычислений интегральное представление

$$\tilde{G}(\Delta r,\omega) = \varkappa \int_0^1 d\beta \exp(\varkappa \Delta r \beta) \tag{18}$$

и запишем, соответственно,

$$G(\Delta r,\omega) = \varkappa \int_0^1 d\beta \exp(\varkappa \Delta r \beta) + \frac{1}{\Delta r}. \tag{19}$$

После подстановки (18) в (16) и вычисления производных ∇, ∇_l получим следующее выражение для функция Грина:

$$D_{jl}(\Delta\mathbf{r},\omega) = \delta_{jl}G(\Delta r,\omega) - \frac{\Delta r_j \Delta r_l}{\Delta r^2} \int_0^1 d\beta \beta^2 \exp(\varkappa \Delta r \beta) -$$

$$- \left(\delta_{jl} - \frac{\Delta r_j \Delta r_l}{\Delta r^2}\right) \int_0^1 d\beta \beta \exp(\varkappa \Delta r \beta) \frac{1}{\Delta r}. \tag{20}$$

С помощью интегрирования по частям,

$$\int_0^1 d\left(\frac{1}{2}\beta^2\right) \exp(\varkappa \Delta r \beta) \frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta r} \exp(\varkappa \Delta r) - \frac{\varkappa}{2} \int_0^1 d\beta \exp(\varkappa \Delta r \beta), \tag{21}$$

и интегрального представления (19) приведем функцию Грина (16) к виду

$$D_{jl}(\Delta r, \omega) = D^0_{jl}(\Delta r) + \tilde{D}_{jl}(\Delta r, \omega). \tag{22}$$

В (22) выделены слагаемые, не зависящие от частоты ω и имеющие особенность при $\Delta r \to 0$:

$$D^0_{jl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta r}\delta_{jl} - \frac{1}{2\Delta r}\left(\delta_{jl} - \frac{\Delta r_j \Delta r_l}{\Delta r^2}\right). \tag{23}$$

Соответственно, регулярная часть $\tilde{D}_{jl}(\Delta\mathbf{r}, \omega)$ функции Грина не имеет особенности при $\Delta r \to 0$:

$$\tilde{D}_{jl}(\Delta\mathbf{r}, \omega) = \delta_{jl}\varkappa \int\limits_0^1 d\beta \exp(\varkappa\Delta r\beta) - \delta_{jl}\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^1 d\beta(1-\beta^2)\exp(\varkappa\Delta r\beta) + \\ + \frac{\Delta r_j \Delta r_l}{\Delta r^2}\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^1 d\beta(1-3\beta^2)\exp(\varkappa\Delta r\beta). \tag{24}$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_0^1 d\beta(1-3\beta^2)\exp(\varkappa\Delta r\beta) = -\Delta r\int\limits_0^1 d\beta(1-\beta^2)\varkappa\beta\exp(\varkappa\Delta r\beta), \tag{25}$$

запишем регулярную часть функции Грина (24) в виде

$$\tilde{D}_{jl}(\Delta\mathbf{r}, \omega) = \delta_{jl}\varkappa \int\limits_0^1 d\beta \exp(\varkappa\Delta r\beta) - \delta_{jl}\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^1 d\beta(1-\beta^2)\exp(\varkappa\Delta r\beta) - \\ - \Delta r_j\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^1 d\beta(1-\beta^2)\varkappa\beta\frac{\Delta r_l}{\Delta r}\exp(\varkappa\Delta r\beta). \tag{26}$$

Представление функции Грина в виде суммы особой и регулярной частей позволяет проанализировать присущие классической электродинамике расходимости и обсудить проблему электромагнитной массы. В силу независимости особой части (23) от частоты при ее подстановке в (10) и с учетом силы реакции в виде (12) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{r}_j(t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] + \nabla_j V(\mathbf{r}(t)) = -\delta m\ddot{r}_j(t), \tag{27}$$

где добавочная электромагнитная масса

$$\delta m = \frac{e^2}{c^2}(\Delta r)^{-1}_{t_1=t}, \quad (\Delta r)^{-1}_{t_1=t} = \int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}4\pi k^{-2} \tag{28}$$

формально расходится. Общепринятая процедура перенормировки массы состоит в том, что добавочная электромагнитная масса δm включается в полную перенормированную:

$$m^* = m + \delta m, \tag{29}$$

которая принимает измеряемое экспериментально значение массы электрона. После процедуры перенормировки массы оставшаяся в уравнениях движения регулярная часть функции Грина (26) приведет к конечному значению для радиационной силы трения, определяемой (10). Заметим, однако, что данное обстоятельство не устраняет парадокса самоускорения.

В заключение этого параграфа отметим, что физическая причина расходимостей в классической электродинамике обусловлена выходом за границу ее применимости при интегрировании в (28) по всей области $\mathbf{k}$-пространства. Ограничение при интегрировании в $\mathbf{k}$-пространстве может быть связано с единственной характерной длиной в классической электродинамике — классическим радиусом электрона a_{cl},

$$e^2/a_{cl} = mc^2. \tag{30}$$

Благодаря этому можно считать

$$(\Delta r)^{-1}_{t_1=t} = a^{-1}_{cl} = mc^2/e^2. \tag{31}$$

Если допустить, что Δr в (28) соответствует классическому радиусу электрона a_{cl} (31), то дополнительная масса δm будет в точности совпадать с массой электрона. С этой точки зрения масса электрона имеет чисто электромагнитную природу, связанную с реакцией излучения на заряд. Учет поперечности поля при вычислении особой части функции Грина (23) снимает проблему странного коэффициента 4/3, возникшую первоначально в работе Томсона, а затем в нерелятивистской модели Абрагама—Лоренца [11].

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОНА

Как известно, запаздывающая функция Грина поля (8), (11) является комплексной функцией частоты ω. Вследствие этого сила реакции $F_j(t)$ в (10) содержит как четную, так и нечетную составляющие относительно инверсии времени. Следовательно, обобщенная сила реакции $F_j(t)$ принципиально отличается от хорошо известной нечетной по времени релятивистской силы трения (см. (3.12) из [1]). Строгое определение временной зависимости силы реакции приобретает, таким образом, особое значение.

Интегральное представление функции Грина позволяет получить явное аналитическое выражение для обобщенной силы реакции без использования каких-либо приближений. При этом особое значение имеет предложенная в предыдущем разделе процедура перенормировки массы. Воспользуемся сначала представлением функции Грина в виде (16) и подставим в выражение для радиационной силы $F_j(t)$, определяемой уравнением (10). Благодаря очевидному свойству перестановочности производных $\nabla_j\nabla_\alpha\nabla_l$ и при учете перенормировки массы получим

$$\begin{aligned} F_j(t) = -\frac{e^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int dt_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left[-i\omega(t-t_1)\right] \tilde{D}_{jl}(\Delta r,\omega) v_l(t_1) + \\ + \frac{e^2}{c^2} v_\alpha(t) \int dt_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left[-i\omega(t-t_1)\right] [\delta_{\alpha l}\nabla_j - \delta_{jl}\nabla_\alpha] \tilde{G}(\Delta r,\omega) v_l(t_1). \end{aligned} \tag{32}$$

$$v_l(t_1) = \dot{r}_l(t_1), \qquad v_\alpha(t) = \dot{r}_\alpha(t).$$

В соответствии с процедурой перенормировки массы удерживаем в (32) регулярные части функций Грина $\tilde{D}_{jl}(\Delta r, \omega)$, $\tilde{G}(\Delta r, \omega)$, определяемые соответственно (26) и (18). Отметим наиболее принципиальные моменты последующих вычислений радиационной силы реакции (32).

После подстановки интегральных представлений функций Грина (26) и (18) в (32) следует воспользоваться выражением для дифференциала

$$-d\{\exp(\varkappa \Delta r \beta)\} = \varkappa\beta \frac{\Delta r_l}{\Delta r} \exp(\varkappa\Delta r\beta)\dot{r}_l(t_1)dt_1$$

и выполнить интегрирование по частям, принимая во внимание принцип причинности и следующие из него свойства функции Грина.

Применяя после этого некоторые очевидные преобразования, запишем силу реакции (32) в виде

$$F_j(t) = -\frac{e^2}{c^3}\int_0^1 d\beta \int dt_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega z}\left[(i\omega)^2 v_j(t_1) - \frac{1}{2}(1-\beta^2)(i\omega)^3 \Delta r_j\right] +$$
$$+ \frac{e^2}{c^4} v_\alpha(t) \int_0^1 d\beta\, \beta \int dt_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega z} (i\omega)^2 \left[\Delta r_j v_\alpha(t_1) - \Delta r_\alpha v_j(t_1)\right] \frac{1}{\Delta r}, \tag{33}$$

где введены обозначения

$$z = t_1 - t + \frac{\Delta r}{c}\beta, \qquad \Delta r_j = r_j(t) - r_j(t_1).$$

Последующие вычисления радиационной силы (33) очевидны. При интегрировании по частоте ω получаем производные δ-функций от аргумента z, после чего выполняется интегрирование по времени t_1. Наконец, интегрирование по вспомогательному параметру β, введенному в интегральное представление (18), дает окончательный результат для обобщенной радиационной силы трения $F_j(t)$, входящей в релятивистское уравнение (10):

$$F_j(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{1-u}\left(\ddot{v}_j + \frac{1}{2}\frac{u}{1-u}\ddot{v}_j^{(l)}\right) + \frac{e^2}{c^3}\frac{\dot{u}}{(1-u)^2}\left(a_j^{(c)} + \frac{1}{4}a_j^{(l)} + \frac{1}{2}\frac{a_j^{(l)}}{1-u}\right), \tag{34}$$

где введены обозначения $v = dr(t)/dt$, $u = v/c$,

$$a_j^{(c)} = \left(\delta_{jl} - \frac{v_j v_l}{v^2}\right)\dot{v}_l = \dot{v}_j - v_j\frac{\dot{v}}{v} \tag{35}$$

— центростремительное ускорение, а

$$a_j^{(l)} = \frac{v_j v_l}{v^2}\dot{v}_l \tag{36}$$

— продольное ускорение. По аналогии с (35), (36) определены нормальная и продольная составляющие второй производной скорости

$$\ddot{v}_j^{(c)} = \left(\delta_{jl} - \frac{v_j v_l}{v^2}\right)\ddot{v}_l, \quad \ddot{v}_j^{(l)} = \frac{v_j v_l}{v^2}\ddot{v}_l. \tag{37}$$

Интересно привести ультрарелятивистское выражение для радиационной силы при $u \to 1$:

$$F_j(t) \simeq \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\ddot{v}_j^{(l)}}{(1-u)^2} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{c^3}\frac{\dot{u}a_j^{(l)}}{(1-u)^3}, \tag{38}$$

которая оказывается направленной вдоль скорости движения ультрарелятивистской частицы.

Установим соответствие выражения (34) для обобщенной силы реакции с хорошо известной релятивистской формулой (3.12) из [1], полученной с помощью преобразований Лоренца из приближенной нерелятивистской формулы (75.8) из [2]:

$$F_j(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{v}_j. \tag{39}$$

В силу нечетности по времени формулы (39) и ее релятивистского обобщения мы должны выделить из обобщенной радиационной силы (34) ее нечетную составляющую. Тогда получим

$$F_j^{(odd)}(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{1}{1-u^2}\left\{\ddot{v}_j^{(c)} + \frac{\ddot{v}_j^{(l)}}{(1-u)^2} + \frac{3u\dot{u}}{1-u^2}\left[a_j^{(c)} + \frac{a_j^{(l)}}{1-u^2}\right]\right\}. \tag{40}$$

При переходе к соответствующим обозначениям формула (40) в точности совпадет с релятивистской формулой (3.12) из [1].

Принципиальное отличие обобщенной силы реакции (34) от (3.12) из [1] определяется наличием четной составляющей по времени, что будет проявляться наиболее существенным образом в ультрарелятивистской области. Исследование новых эффектов, связанных с этим отличием, представляет особый интерес и требует отдельного рассмотрения.

Для того чтобы непосредственно убедиться в приближенном характере нерелятивистской формулы (75.8) из [2], запишем точную формулу (34) в системе координат, связанной с электроном. Особенность такого перехода состоит в том, что при $v \to 0$ центростремительное ускорение стремится к нулю, а продольное будет совпадать с обычным ускорением. Тогда из (34) получим следующую нерелятивистскую формулу для радиационной силы трения:

$$\frac{1}{mc}F_j(t) = \tau_0\left(\ddot{u}_j + \frac{9}{8}\dot{u}_j\dot{u}\right), \quad \tau_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}, \tag{41}$$

и соответствующее уравнение Лоренца для электрона в собственной системе координат:

$$\dot{u}_j = \frac{e}{mc}E_j(t) + \tau_0\left(\ddot{u}_j + \frac{9}{8}\dot{u}_j\dot{u}\right), \tag{42}$$

где $E_j(t)$ — напряженность внешнего электрического поля. Принципиальное отличие формулы (41) от известного выражения (75.8) из [2] заключается в ее дополнительной нелинейной зависимости от ускорения. Уравнение (31) можно переписать также в виде

$$\left(1 - \frac{9}{8}\tau_0\dot{u}\right)\dot{u}_j = \frac{e}{mc}E_j + \tau_0\ddot{u}_j,$$

или

$$m\left(1-\frac{15}{8}\frac{\tau_0}{c}\dot{v}\right)\dot{v}_j = eE_j(t) + m\tau_0\ddot{v}_j. \tag{43}$$

Тогда данный эффект можно интерпретировать как зависимость эффективной массы m^* от ускорения:

$$m^* = m\left(1-\frac{9}{8}\frac{\tau_0}{c}\dot{v}\right). \tag{44}$$

Традиционный способ решения задач с учетом радиационного затухания основан на формальном использовании малости радиационной силы трения [1]. Такая процедура дает физически разумный результат. Однако строго обосновать малость радиационной силы трения можно только с учетом квантовых эффектов [3]. Физически это связано с тем, что в классической электродинамике отсутствует малый параметр. Точное решение уравнений движения для электрона с учетом релятивистской силы (34) также приводит к парадоксу самоускорения. При этом скорость будет нарастать за время τ_0 до скорости света.

В заключение отметим еще одну принципиальную особенность классической теории радиационного затухания. Как известно, процессы релаксации (диссипации) и флуктуационные явления как в квантовых, так и классических системах имеют одну и ту же физическую природу. Это обстоятельство нашло, в частности, свое отражение в фундаментальных теоремах статистической физики: флуктуационно-диссипационной теоремы Найквиста—Каллена—Велтона и нелинейных флуктуационно-диссипационных теорем [14, 15]. В то же время классическая задача о радиационном затухании не демонстрирует такой взаимосвязи. Физически это обстоятельство обусловлено тем, что в классической электродинамике отсутствует понятие электромагнитного вакуума. По этой причине электрон в свободном пространстве не подвержен воздействию каких-либо флуктуаций. При конечных температурах всегда имеется тепловое поле излучения, которое приведет к дополнительному вкладу в радиационное затухание электрона и одновременно послужит причиной его флуктуаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-17069).

Литература

1. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, Наука, Москва (1981).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
3. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **110**, 1629 (1996).
4. G. W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **157**, 217 (1991); **158**, 31 (1991); Phys. Rev. A **44**, 6386 (1991).
5. J. Seke, J. Phys. A **25**, 5415 (1992).
6. J. Seke, Phys. Rev. A **45**, 542 (1992).
7. G. W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **174**, 182 (1993).
8. K. Pochucki, Phys. Rev. A **52**, 1079 (1995).

9. F. V. Hartemann, Phys. Rev. Lett. **74**, 1107 (1995).
10. А. Н. Никешин, ЖЭТФ **109**, 1889 (1996).
11. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1965).
12. Г. Ф. Ефремов, *Стохастические уравнения для открытых квантовых систем*, Учебн. пос. Изд. ГГУ, Горький (1982).
13. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории в статистической физике*, Наука, Москва (1962).
14. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **54**, 2322 (1968).
15. Г. Ф. Ефремов, Изв. вузов, Радиофизика **15**, 1207 (1972).