

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

В. В. Вечеславов*, Б. В. Чириков†

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 11 февраля 1998 г.

Представлены результаты численных экспериментов и теоретического анализа расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса в промежуточной асимптотике для модели стандартного отображения. Впервые прямое измерение угла расщепления $\alpha(K)$, где $K \ll 1$ — малый параметр системы, выполнено в огромном диапазоне $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$) с относительной точностью лучше 10^{-25} и средней точностью $\sim 10^{-30}$. Это позволило провести детальное сравнение с существующей асимптотической теорией и обнаружить ряд новых эффектов. Найдено относительно простое эмпирическое выражение для зависимости $\alpha(K)$ в промежуточной асимптотике, область которой оказалась неожиданно широкой: $K \lesssim 10^{-2}$. Исследован также эффект шума, в частности ошибок измерения угла, который оказался значительно более существенным и сложным, чем это можно было предполагать. Отмечены нерешенные вопросы и возможные направления дальнейших исследований этой проблемы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика гамильтоновых (бездиссипативных) систем определяется взаимодействием нелинейных резонансов, которые являются основными элементами конструкции современной теории нелинейных колебаний [1–4]. Гамильтониан такой системы может быть представлен в виде

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon \sum_{n,m} V_{nm}(I) \exp(in\theta + itm\Omega), \quad (1.1)$$

где ε — малый параметр возмущения; I, θ — переменные действие–угол, Ω — вектор частот внешнего возмущения с гармониками $m\Omega$, а n — номер гармоник собственных колебаний с невозмущенными частотами

$$\omega(I) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}. \quad (1.2)$$

Каждый член возмущения в (1.1) определяет первичный резонанс

$$\omega_{nm} \equiv n\omega(I) + m\Omega \approx 0. \quad (1.3)$$

В случае линейных колебаний частоты являются параметрами системы, которая попадает или не попадает в резонанс независимо от начальных условий движения. Наиболее

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

†E-mail: chirikov@inp.nsk.su

существенной особенностью нелинейных колебаний является как раз изменение частот колебаний в процессе движения вследствие зависимости их от переменных действия. Ниже мы будем рассматривать случай сильной нелинейности, когда такая зависимость имеет место уже для невозмущенных частот:

$$\frac{\partial \omega(I)}{\partial I} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0. \quad (1.4)$$

В этом достаточно широком классе динамических систем описание нелинейных резонансов и их взаимодействия оказывается универсальным и относительно простым [2].

В численных экспериментах значительно удобнее перейти от дифференциальных уравнений в непрерывном времени к дискретному отображению [1–4]. Одной из простых, но содержательных моделей такого типа является так называемое стандартное отображение [2] (по поводу истории этой модели и ее физических приложений см. [5]):

$$\bar{p} = p + K \sin x, \quad \bar{x} = x + \bar{p}. \quad (1.5)$$

Здесь p, x — переменные действие–угол, а $K \ll 1$ — единственный параметр модели, характеризующий эффект возмущения на периоде отображения, который принят равным единице. В непрерывном времени эта модель описывается гамильтонианом (ср. (1.1))

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(x - m\Omega t), \quad (1.6)$$

где основная частота внешнего возмущения $\Omega = 2\pi$. Модель представляет бесконечную систему сильно нелинейных резонансов ($\partial^2 H / \partial p^2 = 1$), движение вблизи каждого из которых идентично с точностью до сдвига по действию: $p - p_m \rightarrow p$, где $p_m = m\Omega$ — резонансное значение действия. Частота малых собственных колебаний в любом резонансе равна $\omega_0 = \sqrt{K} \ll 1$. Хотя амплитуды всех резонансов одинаковы (K), все они, кроме основного, выделенного начальными условиями движения, представляют лишь очень слабое возмущение. Это объясняется большой частотой возмущения по сравнению с собственной частотой колебаний на выделенном резонансе:

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \gg 1. \quad (1.7)$$

Взаимодействие резонансов при этом является адиабатическим, а его эффект — экспоненциально малым по большому параметру адиабатичности λ .

Пренебрегая слабой неадиабатичностью, одиночный резонанс, например с $m = 0$ (см. (1.6)), можно описать гамильтонианом «маятника»:

$$H_1(p, x) = \frac{p^2}{2} + K \cos x. \quad (1.8)$$

Такая простая форма резонансного гамильтониана оказывается универсальной в случае сильной нелинейности [2]. Наиболее важная в рассматриваемой задаче характеристика нелинейного резонанса (1.8) — наличие сепаратрисы,

$$p_s = \pm 2\omega_0 \sin(x/2), \quad H_1^{(s)} = \omega_0^2 = K, \quad (1.9)$$

— особой траектории, которая отделяет колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). Ясно, что движение системы (1.8) вблизи сепаратрисы чрезвычайно неустойчиво, поскольку почти любое сколь угодно малое возмущение качественно изменяет его характер (вращение переходит в колебания и наоборот). Именно здесь и возникает хаос нелинейных колебаний. Насколько нам известно, впервые это наблюдалось в численных экспериментах [6] и затем изучалось во многих работах (см., например, [1–4, 7]).

Простым примером такой слабой неадиабатичности является взаимодействие всего двух нелинейных резонансов, например с $m = 0$ и $m = 1$, которое описывается гамильтонианом (см. (1.6))

$$H_2(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos x + \epsilon \cos(x - \Omega t), \quad (1.10)$$

где ϵ — амплитуда возмущающего резонанса. Движение вблизи сепаратрисы основного резонанса ($m = 0$) моделируется приближенно так называемым сепаратрисным отображением, которое впервые было введено (неявно) в [7]. Ниже мы приводим его в форме из [2] (см. также [4]):

$$\bar{w} = w + W \sin \phi, \quad \bar{\phi} = \phi + \lambda \ln \frac{32}{|w|}. \quad (1.11)$$

Здесь $w = H_2/K - 1$ — безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии; $\phi = \Omega t$ — фаза возмущения в момент прохождения положения устойчивого равновесия «маятника» $x = \pi$, а W — амплитуда неадиабатичности. Если возмущающий резонанс много слабее основного ($\epsilon \ll K$), амплитуда W вычисляется относительно просто по методу Мельникова [8] (см. [2–4]) и при $\lambda \gg 1$ приближенно равна

$$W \approx 8\pi f \frac{\epsilon}{K} \lambda^2 e^{-\pi\lambda/2}. \quad (1.12)$$

Отметим, что эта задача не может быть решена по теории возмущений, так как зависимость этого (как и любого другого) неадиабатического эффекта ($W(K)$) от исходного параметра возмущения (K) не является аналитической при $K = 0$. Однако после выделения этого эффекта теория возмущений возможна и успешно применяется для приближенных уравнений движения типа сепаратрисного отображения. По-видимому, впервые подобная задача была решена еще Пуанкаре [9]. Из (1.12) видно также, что в рассматриваемой модели (1.6) вклад других резонансов ($|m| > 1$) пренебрежимо мал ($\lambda_m = m\lambda$). Однако в этой модели амплитуды всех резонансов равны: $\epsilon = K$ (1.6). Это приводит к появлению дополнительного множителя $f \sim 1$ в (1.12). Качественное объяснение появления этого фактора как эффекта высших приближений теории возмущений дано в [2], где приведено также его значение, полученное из численных экспериментов:

$$f = 2.15 \pm 0.04. \quad (1.13)$$

Низкая точность измерения (к тому же, как оказалось, завышенная) объясняется как недостаточно малыми (по техническим причинам) значениями $K = 0.1$ –1, так и приближенным характером самого сепаратрисного отображения.

Значительный прогресс в решении этой задачи был достигнут лишь относительно недавно (1984) в работах Лазуткина и сотрудников [10, 11]. Значение поправочного

множителя $f = 2.2552\dots$ было получено из численного решения вспомогательного уравнения, из которого был исключен экспоненциальный фактор. В отличие от общего выражения (1.12) множитель f не является универсальным, как предполагалось в [10], а зависит от конкретной системы взаимодействующих резонансов [12].

В математических работах [8–12] и др. вычислялся не сам эффект нарушения адиабатичности (1.11), который изучался позднее физиками [1–7], а вспомогательная величина — угол расщепления сепаратрисы, α . Хотя этого и недостаточно для восстановления полной динамики вблизи сепаратрисы, величина α является важной характеристикой взаимодействия резонансов, которая в отличие от W строго определена и может быть вычислена с любой точностью.

Расщепление сепаратрисы приближенно описывается отображением (1.11) следующим образом. В отсутствие возмущения ($W = 0$) каждая из двух ветвей сепаратрисы (1.9) представляет собой асимптотическую траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит ($w = 0, t \rightarrow \infty$) из положения неустойчивого равновесия $x = 0 \bmod 2\pi$ и приходит в него же ($\bar{w} = 0, t \rightarrow +\infty$). Под действием возмущения ($W \neq 0$) возникают две пересекающихся траектории, одна из которых по-прежнему выходит из точки $x = p = 0$ ($w = 0, t \rightarrow -\infty$), но никогда не возвращается назад ($\bar{w} \neq 0, t \rightarrow \infty$), тогда как вторая ведет себя наоборот, т.е. как первая при обращении времени ($t \rightarrow -t$). Свободные концы расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины [8, 9], которые заполняют, однако, ограниченную и узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый хаотический слой [1–7]. Одной из его важных характеристик является полуширина $w_s \approx \lambda W \approx 4\alpha/\omega_0$ [2], непосредственно связанная с углом расщепления (см. (1.15)). Именно эти слои и являются универсальным первоисточником хаоса нелинейных колебаний.

Обе ветви расщепленной сепаратрисы пересекаются, в частности, при $x = \pi$ и некотором $p_s(\pi) \approx p_0 = 2\omega_0$ (см. (1.9)). Именно в этом пересечении угол α изучается обычно, в том числе и в настоящей работе. Пересечению сепаратрис соответствует в (1.11) значение фазы возмущения $\phi(\pi) = 0$. В окрестности пересечения отклонение обеих ветвей сепаратрисы от невозмущенной описывается приближенно простым выражением:

$$q_{\pm}(y) = p_{\pm}(x) - p_s(x) \approx \pm W \frac{\omega_0}{4} \sin \frac{\lambda y}{2}, \quad (1.14)$$

где $y = x - \pi$ и использованы соотношения $dw/dp = 2/\omega_0$ и $\phi = \Omega t = \Omega y/p_0 = \Omega y/2\omega_0$. Кроме того, изменение w в точке пересечения равно половине полного изменения w (1.11), поскольку последнее происходит симметрично относительно $x = \pi$ [2]. В результате для полного угла расщепления сепаратрисы получаем

$$\alpha(\lambda) \approx 2 \frac{dq}{dy} \approx \frac{\omega_0 \lambda W}{4} = 2\pi f \omega_0 \lambda^3 \frac{\epsilon}{\omega_0^2} e^{-\pi\lambda/2} = (2\pi)^4 f \frac{e^{-\pi\lambda/2}}{K}. \quad (1.15)$$

В последнее выражение подставлены параметры стандартного отображения: $\epsilon = \omega_0^2 = K$, $\Omega = 2\pi$. Отметим, что это простое и важное соотношение справедливо только для угла расщепления при $x = \pi$.

Введенная в [10, 11] величина \mathcal{L} , которую мы будем называть постоянной Лазуткина, связана с фактором f соотношением

$$\mathcal{L} = 16\pi^3 f = 1118.82770595\dots \quad (1.16)$$

Наиболее точное значение \mathcal{L} по нашим данным приведено ниже (4.14). Отметим, что фактор $f \ll \mathcal{L}$ более правильно характеризует порядок эффекта конечной амплитуды возмущающего резонанса.

Последнее выражение в (1.15) с точным значением постоянной \mathcal{L} или f дает асимптотическое ($\lambda \rightarrow \infty$) значение угла расщепления: $\alpha_\infty = \alpha(\infty)$. В работе [10] приведена также оценка поправки к α_∞ в промежуточной асимптотике $0 < K \ll 1$:

$$c_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha_\infty} - 1 \gtrsim K^{1/8}. \quad (1.17)$$

Наши предварительные численные эксперименты показали, однако, что фактически поправка убывает с K значительно быстрее: $c_\alpha \sim K^{1/2}$.

Отметим сразу, что эта «поправка» и описывает интересующую нас промежуточную асимптотику расщепления сепаратрисы, а следовательно, и образования хаотического слоя. Именно эта проблема является основным предметом настоящих исследований.

Наиболее развитая теория расщепления сепаратрисы стандартного отображения [11] предсказывает не только еще более быстрое убывание поправки, но и позволяет вычислить первые члены ее степенного разложения также с помощью численного решения вспомогательных уравнений. Успех последней теории существенно определяется, на наш взгляд, удачной заменой переменных задачи: $(K, \alpha) \rightarrow (h, \sigma)$, где

$$h(K) = \ln \left(1 + \frac{K}{2} + \sqrt{K + \frac{K^2}{4}} \right) \approx \sqrt{K} \quad (1.18)$$

— положительный характеристический показатель касательного (линеаризованного) отображения (1.5) в неустойчивой неподвижной точке $x = p = 0$,

$$\sigma(h) = \nu(h) \sin \alpha \quad (1.19)$$

— симплектический инвариант, а $\nu(h)$ — некоторая норма касательных векторов.

В [11] было найдено приближенное решение этой задачи, которое также может быть записано в виде поправки к инварианту, аналогичной (1.17):

$$c_\sigma(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma_\infty} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_\sigma(m) h^{2m}, \quad (1.20)$$

где $\sigma_\infty = 4\alpha_\infty$. Фактически, в [11] были вычислены лишь четыре коэффициента ряда (см. ниже табл. 2). Главным ограничением полученного решения остается неявная зависимость $\sigma(\alpha)$, которая может быть найдена только численно из-за дополнительной неизвестной функции $\nu(h)$.

В настоящей работе мы представляем первые результаты прямых измерений угла расщепления сепаратрисы стандартного отображения (1.5) в широком диапазоне параметра $1 \geq K \geq 0.0004$ ($1 \gtrsim h \gtrsim 0.02$); $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ с относительной точностью лучше 10^{-25} и средней точностью $\sim 10^{-30}$. Для решения этой задачи была разработана специальная методика измерения и обработки результатов с использованием универсальной компьютерной программы [13] с произвольной точностью счета. Фактически, точность численных экспериментов достигала величины $\sim 10^{-300}$.

Помимо угла α , непосредственно связанного с неадиабатичностью W , измерялся также инвариант σ (1.19) для сравнения с теорией. Необходимая для этого функция

$\nu(h)$, аналитическое выражение которой неизвестно, находилась численно по специальной программе, любезно предоставленной нам В. Г. Гельфрейхом, которому мы выражаем искреннюю признательность. Все это позволило провести детальное сравнение с асимптотической теорией [11], которая полностью подтвердилась, а также обнаружить ряд новых эффектов. Найдено относительно простое эмпирическое выражение для зависимости $\alpha(K)$ в промежуточной асимптотике, область которой оказалась неожиданно широкой: $K \lesssim 10^{-2}$. Исследован также эффект шума, в частности ошибок измерения угла, который оказался значительно более существенным и сложным, чем это можно было предполагать.

2. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛА РАСЩЕПЛЕНИЯ СЕПАРАТРИСЫ

Основная трудность прямого измерения угла расщепления сепаратрисы, α , связана с его чрезвычайно малой величиной. Так, при значении в (1.5) параметра возмущения $K = 0.0004$ этот угол составляет всего $\approx 4.2 \cdot 10^{-208}$ рад. Как отмечалось во Введении, решение этой задачи оказалось возможным благодаря использованию специального пакета программ [13], позволяющего реализовывать все стандартные возможности языка Фортран с произвольным уровнем точности счета, который задается указанием количества \mathcal{N}_c цифр мантиссы в десятичном представлении вещественного числа.

Вычисление угла α осуществлялось по следующей схеме. Прежде всего, при каждом заданном значении параметра возмущения K на линии $x = \pi$ отыскивалась ордината $p_s(\pi)$ точки пересечения ветвей сепаратрисы. В качестве начального принималось теоретическое невозмущенное значение $p(\pi) = p_0 = 2\sqrt{K}$ (1.9), и для орбиты, стартующей из точки $(\pi, p(\pi))$, выяснялся характер (вращение или колебание) поведения фазы x . В зависимости от результата значение $p(\pi)$ последовательно увеличивалось или уменьшалось с некоторым шагом до тех пор, пока характер поведения фазы не изменялся на противоположный. Это позволяло определить начальный интервал локализации точки пересечения, верхняя граница $p_r(\pi)$ которого отвечала режиму вращения фазы x , а нижняя $p_l(\pi)$ — колебаниям фазы независимо от направления времени. Напомним, что каждая из расщепленных ветвей сепаратрисы остается границей между колебанием и вращением фазы для «своего» направления времени (см. Введение). Шаг изменения по импульсу выбирался всегда больше ожидаемой ширины хаотического слоя ($\approx 4\alpha$), поэтому ширина этого начального интервала $dp(\pi) = p_r(\pi) - p_l(\pi)$ оказывалась много больше требуемой величины $dp_s(\pi)$, которая, напротив, всегда задавалась много меньшей ширины слоя (см. ниже). Например, для минимального использованного нами значения параметра возмущения $K = 0.0004$ ширина хаотического слоя $\approx 2 \cdot 10^{-207}$, а уровень точности счета \mathcal{N}_c и требуемая точность $dp_s(\pi) = 10^{-\mathcal{N}_c}$ локализации ординаты $p_s(\pi)$ назначались соответственно равными $\mathcal{N}_c = 300$ (что отвечает точности счета $\sim 10^{-300}$) и $\mathcal{N}_a = 280$.

После установления начального интервала $[p_l(\pi), p_r(\pi)]$ выполнялась процедура последовательного деления его пополам до выполнения неравенства $dp(\pi) \leq dp_s(\pi)$, и затем искомая ордината точки пересечения вычислялась по формуле $p_s(\pi) = [p_r(\pi) + p_l(\pi)]/2$. Заметим попутно, что именно на этот этап вычислений тратилась основная доля времени счета (см. ниже): по мере сужения интервала орбита все ближе подходила к неустойчивой неподвижной точке и период движения (число итераций отображения) существенно возрастал.

После отыскания центральной точки пересечения ветвей сепаратрисы она принималась за центр новой системы координат ($y = x - \pi$, $q = p - p_s(\pi)$), в которой и проводились дальнейшие построения по вычислению угла α . Для двух значений фазы $y = \pm \delta y$, $|\delta y| \ll 1$ справа и слева от нового начала координат ($y = q = 0$) также отыскивались (с прежней точностью $dp_s(\pi) = 10^{-\mathcal{N}_\alpha}$) границы между колебанием и вращением при ходе времени вперед. Это позволяло аппроксимировать отрезок прямой ветви сепаратрисы многочленом второй степени $q = Q_2(y)$ и, определив его коэффициенты, найти угол наклона касательной к ней. Повторяя эти вычисления при течении времени назад, мы находили угол наклона касательной для обратной ветви сепаратрисы и определяли искомый угол пересечения α_2 как разность двух найденных углов наклона.

Реализация описанной схемы потребовала разработки и выполнения некоторых специальных мер.

Для всего исследованного диапазона изменения параметра K мы стремились получить относительную точность в измерении угла α не хуже 10^{-25} . С этой целью приходилось подбирать нужные значения всех упоминавшихся выше параметров счета: уровня точности вычислений \mathcal{N}_c , точности $dp_s(\pi) = 10^{-\mathcal{N}_\alpha}$ локализации ординаты $p_s(\pi)$ и отстройки по фазе δy для построения аппроксимирующих полиномов, причем подбор этой последней величины был наиболее критичным. Расстояние по фазе Δy между центральной и соседней с ней точками пересечений, согласно (1.14), равно $\Delta y \approx 2\pi/\lambda = \sqrt{K}$, и отстройку по фазе удобно задавать как долю этого расстояния

$$\delta y = \eta \sqrt{K}, \quad (2.1)$$

причем значение η для всех вариантов счета обычно находилось в пределах (10^{-16} – 10^{-12}).

Прежде всего предстояло выяснить, достигнута ли фактически желаемая относительная точность 10^{-25} найденного значения α_2 (ясно, что ее ни в коем случае нельзя отождествить с точностью счета \mathcal{N}_c). С целью ответа на этот вопрос описанные выше вычисления проводились для еще одной пары удвоенных значений фазы $y = \pm 2\delta y$ и обоих направлений времени. Это вместе с предыдущей парой точек давало возможность построить аппроксимирующие многочлены $q = Q_4(y)$ четвертой степени и получить по ним уточненное значение угла α_4 .

В общем случае какое-то количество \mathcal{N}_α первых значащих цифр (с учетом округлений) в выражениях для α_2 и α_4 совпадают, а далее эти значения расходятся. Мы всегда добивались неравенства $\mathcal{N}_\alpha \geq 25$, что и давало относительную точность в определении угла не хуже 10^{-25} . Счет с полиномами более высоких степеней и с повышенной точностью подтвердил правильность этого критерия. На самом деле относительная точность оказалась выше и составила в среднем $\sim 10^{-30}$ (см. разд. 3).

Заметим, что прямое вычисление точек ветви сепаратрисы при обратном ходе времени не требуется. Стандартное отображение (1.5) обладает симметрией, позволяющей, в частности, любую точку (x_f, p_f) на прямой ветви сепаратрисы пересчитывать в соответствующую ей точку (x_b, p_b) на обратной ветви по простым соотношениям [11]

$$x_b = 2\pi - x_f, \quad p_b = p_f + K \sin x_f. \quad (2.2)$$

Таким образом, построение аппроксимирующих полиномов для обеих ветвей выполняется фактически одновременно и не требует дополнительных вычислительных затрат. Однако с целью проверки были проведены выборочные контрольные расчеты при

обратном ходе времени для некоторых значений параметра возмущения. Эти расчеты подтвердили правильность описанной схемы вычисления угла.

Главная трудность оказалась связана с проблемой отыскания коэффициентов полиномов, аппроксимирующих проходящие через точку пересечения $y = q = 0$ отрезки сепаратрис.

$$q = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4. \quad (2.3)$$

Используя знание четырех опорных точек, мы приходим к системе линейных уравнений с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \delta y & (\delta y)^2 & (\delta y)^3 & (\delta y)^4 \\ -\delta y & (\delta y)^2 & -(\delta y)^3 & (\delta y)^4 \\ 2\delta y & 4(\delta y)^2 & 8(\delta y)^3 & 16(\delta y)^4 \\ -2\delta y & 4(\delta y)^2 & -8(\delta y)^3 & -16(\delta y)^4 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Величины элементов этой матрицы различаются на много порядков (в силу малости величины отстройки по фазе δy согласно (2.1)), и ее детерминант оказывается близок к компьютерному нулю, что не позволяет построить обратную матрицу.

Решение удалось найти, выполнив замену переменных вида $(y, q) \rightarrow (Y = Sy, Q = Sq)$. В новых переменных полином записывается в виде

$$Q = a_1 Y + b_2 Y^2 + b_3 Y^3 + b_4 Y^4, \quad (2.5)$$

и видно, что единственно интересующий нас первый коэффициент $a_1 = \text{tg}(\alpha_4)$ остается неизменным при любой величине масштабного множителя S . Это понятно, поскольку наша замена геометрически означает простое увеличение всей картинку в S раз. Мы обычно назначали $S = 1/\delta y$, что выравнивало порядки величин элементов матрицы и снимало все трудности с ее обработкой.

По описанной схеме была найдена зависимость $\alpha(K)$ для 60-и значений параметра возмущения в интервале $1 \geq K \geq 0.0004$. Величина угла записывалась с сохранением 35-и значащих цифр, что давало некоторый запас сверх минимальной (10^{-25} , см. выше) и средней ($\sim 10^{-30}$, см. разд. 3) относительных точностей в ее определении.

Минимальное значение параметра возмущения $K = 0.0004$, до которого нам удалось дойти, ограничивалось временем счета одного варианта (около суток). Это время быстро растет с уменьшением K главным образом за счет увеличения необходимого числа итераций отображения (1.5). Последнее есть произведение периода движения вблизи сепаратрисы ($\sim |\ln dp_s(\pi)|/\sqrt{K} \sim \mathcal{N}_a/\sqrt{K}$, см. [2]) на число последовательных приближений к точке пересечения ($\sim |\ln dp_s(\pi)| \sim \mathcal{N}_a$). Помимо этого время вычисления $\sin x$ в (1.5) также растет приблизительно пропорционально \mathcal{N}_c (в интересующей нас области умеренной точности $\mathcal{N}_c \lesssim 300$). В итоге для полного времени T счета одного варианта получается оценка

$$T \approx T_0 \frac{\mathcal{N}_c \mathcal{N}_a^2}{\sqrt{K}}, \quad (2.6)$$

где эмпирическое значение параметра $T_0 \approx 2 \cdot 10^{-8}$ ч.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Исходным эмпирическим материалом для анализа зависимости $\alpha(K)$ служили 60 измеренных значений этой неизвестной функции (разд. 2). На первом этапе обработки для вычисления поправки c_α использовалось наиболее точное опубликованное значение \mathcal{L} (1.16) [10]. Для сравнения с теорией [11] аналогичным образом обрабатывалась эмпирическая зависимость поправки c_σ к инварианту σ , вычисленному по формуле (1.19).

В соответствии с теорией [11] обе поправки искались в виде конечного ряда по четным степеням h :

$$\bar{c}(h) = a(0) + \sum_{m=1}^M a(m)h^{2m}, \quad (3.1)$$

с помощью интерполяции по методу наименьших квадратов (см., например, [14]). Хотя формально коэффициент $a(0) = 0$ (см. (1.17), (1.20)), включение его в (3.1) позволяет существенно уточнить параметр \mathcal{L} по сравнению с его известным значением (1.16).

Основная трудность интерполяции эмпирических данных с помощью ряда (3.1) состоит в том, что различные члены этого ряда различаются по величине на много порядков. Так, в типичном случае $h \sim 0.05$ и $M = 10$ отношение $(a_{10}/a_1)h^{18} \sim 10^{-27}$. Поэтому, несмотря на специальные ухищрения в методике обработки, даже на начальном этапе она проводилась с четверной точностью, а окончательная обработка требовала точности $\sim 10^{-100}$. Однако и этого оказалось недостаточно. Как и при интерполяции ветвей сепаратрисы (разд. 2), столь неоднородная матрица системы линейных уравнений обычно вырождалась в компьютерном представлении. Эту трудность удалось преодолеть тем же способом, т.е. изменением масштаба переменных задачи: $(h, \bar{c}) \rightarrow (H = Sh, C = S\bar{c})$, где обычно масштабный фактор $S \gg 1$. В отличие от задачи в разделе 2 коэффициенты полинома (3.1) не являются инвариантами такого преобразования и должны восстанавливаться после интерполяции в новых переменных: $A(m) \rightarrow a(m) = A(m)S^{2m-1}$.

Число членов ряда $M \sim 10$ ограничено сверху ошибками вычисления коэффициентов $a(m)$ главным образом из-за «шума», вызванного конечной точностью эмпирических данных $\alpha(h)$. При дальнейшем увеличении M мы не только не получаем новых коэффициентов, но и теряем предыдущие. Это наглядно видно на рис. 1 по резкому изменению зависимости $a(m)$. В результате серии проб и ошибок было выбрано оптимальное значение $M = 10$ (см. также рис. 3 ниже).

Точность эмпирической зависимости (3.1) характеризуется среднеквадратичной ошибкой (СКО)

$$\Delta c = \langle [c(h) - \bar{c}(h)]^2 \rangle^{1/2}, \quad (3.2)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по всему интервалу интерполяции. Последний не обязательно включает все 60 значений $c(h)$. Более того, попытки использовать весь эмпирический интервал сразу показали весьма низкую точность такой «глобальной» интерполяции: $\Delta c(h) \gtrsim 10^{-6}$ (ср. рис. 2). Это вполне объяснимо, поскольку степенная зависимость (3.1) в теории [11] характеризует лишь промежуточную асимптотику. Именно поэтому уклонение

$$\delta c(h) = c(h) - \bar{c}(h) \quad (3.3)$$

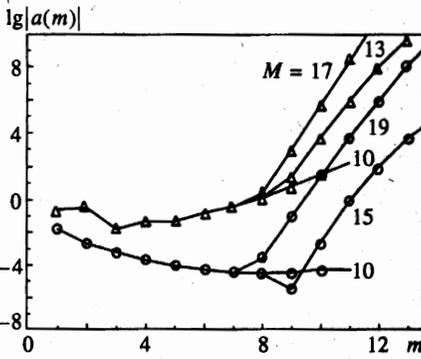


Рис. 1

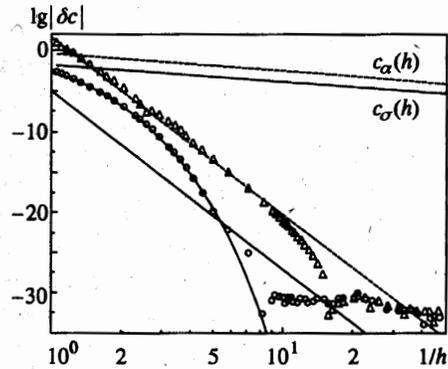


Рис. 2

Рис. 1. Пример зависимости коэффициентов ряда (3.1), найденных из интерполяции эмпирических данных, от полного числа членов ряда M для угла (треугольники) и для инварианта (кружки)

Рис. 2. Результаты интерполяции эмпирических данных по углу расщепления сепаратрисы (треугольники) и инварианту (кружки): $\delta c(h)$ — уклонение поправки от промежуточной асимптотики (3.1). Наклонные прямые представляют первое слагаемое остаточного члена (4.7); кривая — экспоненциальное уклонение (4.6). Верхние линии — полные поправки $c(h)$ соответственно для угла и инварианта

содержит наиболее ценную и интересную информацию о дополнительных неадиабатических эффектах, не вошедших в теорию. Таким образом, необходимо было в заданном массиве эмпирических данных выбрать также оптимальный интервал интерполяции ($h_1 - h_2$), где $h_1 = 0.02$ — минимальное значение в исходных данных. Основным критерием при этом служила наименьшая величина Δc (3.2), а также точность найденных коэффициентов ряда (3.1) (см. табл. 1 и 2).

Таблица 1

Коэффициенты $a_\alpha(m)$ ряда (3.1) для угла

m	$a_\alpha(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	-0.233376428864381610627639619	$0.239 \cdot 10^{-24}$	$0.118 \cdot 10^{-24}$
2	-0.29081815512468886036776	$0.101 \cdot 10^{-20}$	$0.453 \cdot 10^{-21}$
3	-0.014824955534894050884	$0.240 \cdot 10^{-17}$	$0.973 \cdot 10^{-18}$
4	0.043182190148643630	$0.357 \cdot 10^{-14}$	$0.130 \cdot 10^{-14}$
5	-0.041519239477208	$0.348 \cdot 10^{-11}$	$0.115 \cdot 10^{-11}$
6	-0.13137331019	$0.227 \cdot 10^{-08}$	$0.673 \cdot 10^{-09}$
7	-0.319169504	$0.983 \cdot 10^{-06}$	$0.261 \cdot 10^{-06}$
8	-1.060635	$0.273 \cdot 10^{-03}$	$0.647 \cdot 10^{-04}$
9	-4.3613	$0.439 \cdot 10^{-01}$	$0.923 \cdot 10^{-02}$
10	-24.02	$0.312 \cdot 10^{+01}$	$0.579 \cdot 10^{+00}$

Примечание. Здесь и в табл. 2 Δ — СКО в группе, а $\langle \delta \rangle$ — средняя СКО индивидуальной интерполяции.

Таблица 2

Коэффициенты $b(m)$ ряда (4.1) для инварианта

m	$b_\sigma(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	<u>18.5989119582092973588171520</u>	$0.101 \cdot 10^{-22}$	$0.343 \cdot 10^{-23}$
2	<u>-4.3411412705681625367860</u>	$0.369 \cdot 10^{-19}$	$0.125 \cdot 10^{-19}$
3	<u>-4.183263759091894112</u>	$0.971 \cdot 10^{-16}$	$0.345 \cdot 10^{-16}$
4	<u>-4.934139590730929</u>	$0.186 \cdot 10^{-12}$	$0.735 \cdot 10^{-13}$
5	<u>-10.645486442741</u>	$0.263 \cdot 10^{-9}$	$0.121 \cdot 10^{-9}$
6	<u>-35.860081765</u>	$0.276 \cdot 10^{-6}$	$0.151 \cdot 10^{-6}$
7	<u>-177.60356</u>	$0.212 \cdot 10^{-3}$	$0.139 \cdot 10^{-3}$
8	<u>-1239.507</u>	$0.114 \cdot 10^{+00}$	$0.894 \cdot 10^{-01}$
9	<u>-11766.0</u>	$0.386 \cdot 10^{+02}$	$0.362 \cdot 10^{+02}$
10	<u>-163000</u>	$0.627 \cdot 10^{+04}$	$0.693 \cdot 10^{+04}$

Примечание. Подчеркнуты значения коэффициентов, полученные в работе [11].

Качество интерполяции падает не только при увеличении h_2 , как отмечено выше, но и при его уменьшении, из-за малого вклада высоких степеней h при малом h , а также из-за уменьшения числа N_p участвующих в интерполяции точек. Наилучшая интерполяция получается при $h_2 \approx 0.063$ ($N_p = 19$), $\Delta c_\alpha \approx 2 \cdot 10^{-31}$, и $h_2 \approx 0.12$ ($N_p = 36$), $\Delta c_\sigma \approx 2 \cdot 10^{-31}$, однако использовались и другие близкие значения N_p (см. разд. 4). Отметим, что достигнутая точность интерполяции и дает грубую оценку средней точности измеренных значений $\alpha(K)$.

Основные результаты получены при стандартной интерполяции путем минимизации дисперсии $(\Delta c)^2$ (см. (3.2), (3.1)). Для контроля использовалась и прямая интерполяция, когда в качестве нулевого неизвестного коэффициента $a(0)$ в выражениях типа (3.1) отыскивалась полная величина постоянной Лазуткина. Кроме того, проводилась и относительная интерполяция, при которой минимизировалась относительная дисперсия

$$\frac{(\Delta c)^2}{c^2} = \left\langle \left[1 - \frac{\tilde{c}(h)}{c(h)} \right]^2 \right\rangle. \tag{3.4}$$

Все три варианта интерполяции находились в хорошем согласии друг с другом.

Результаты обработки представлены на рис. 2 и в табл. 1 и 2.

Точность найденных коэффициентов оценивалась двумя различными методами. Во-первых, вычислялась стандартная СКО интерполяции [14] (колонка 4 в таблицах). Эта величина характеризует ожидаемую ошибку в вычислении коэффициентов при случайной СКО исходных эмпирических данных. Однако на самом деле полная ошибка почти никогда не является только случайной, а содержит еще и систематическую ошибку, которая приводит к сдвигу (дополнительному изменению) значений коэффициентов. Это ясно видно уже из рис. 2, где точность интерполяции существенно превышает остаточный член ряда (1.20), не включенный в интерполяцию (3.1). Поэтому использовался и другой метод. Значения коэффициентов определялись как средние по нескольким интерполяциям с различным числом входных данных: $N_p = 14-20$ для угла и

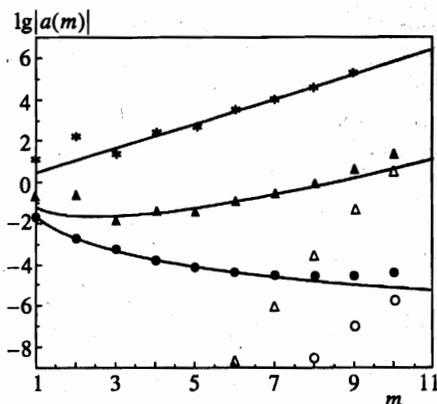


Рис. 3. Закон изменения коэффициентов промежуточной асимптотики (3.1) для угла $a_\alpha(m)$ (темные треугольники), инварианта $a_\sigma(m)$ (темные кружки) и их отношения a_α/a_σ (звездочки). Сплошные линии — эмпирическая зависимость (4.2). Светлые треугольники и кружки представляют ошибки в определении коэффициентов

$N_p = 33-38$ для инварианта. Именно эти значения и приведены в таблицах (колонка 2). Относительно слабая зависимость средних от N_p служила основным критерием при выборе этих двух групп. В качестве ошибки принималась СКО значений коэффициентов в группе (колонка 3 в таблицах). Видно, что обе оценки имеют одинаковый порядок, хотя ошибка в группе является наибольшей, и потому определяющей, во всех случаях, кроме $b(10)$. Различие обеих СКО, особенно заметное для угла, определенно указывает на существенные систематические ошибки. Значения СКО в группе и определяют число надежных, по нашему мнению, десятичных знаков коэффициентов. В колонке 2 оставлены два-три «лишних» знака для сравнения с будущими более точными эмпирическими и/или теоретическими значениями.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим вначале поведение самих коэффициентов разложения (3.1) исходя из данных табл. 1 и 2. При этом мы будем использовать ниже представление коэффициентов в простейшей форме (3.1) за исключением непосредственного сравнения с результатами работы [11], где коэффициенты $b(m)$ представлены в форме ряда Тэйлора (ср. (1.20))

$$\frac{\sigma}{\sigma_\infty} \mathcal{L} = \mathcal{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m!} h^{2m}, \quad b(m) = a(m)m! \mathcal{L}. \quad (4.1)$$

Прежде всего нам удалось найти относительно простую экстраполяцию зависимости $a(m)$ вне пределов досягаемости прямых измерений угла расщепления сепаратрисы. Результаты такой экстраполяции представлены на рис. 3 и описываются приближенными выражениями

$$a_\alpha(m) \approx A_\alpha \frac{e^{\gamma m}}{m^p} \quad (4.2a)$$

для угла и

$$a_\sigma(m) \approx \frac{A_\sigma}{m^p} \quad (4.2b)$$

для инварианта. Построение этих эмпирических соотношений проводилось следующим образом. Из рис. 2 и таблиц видно, что поправка $c_\sigma(h) > 0$ значительно меньше по абсолютной величине, чем $c_\alpha(h) < 0$ во всем исследованном диапазоне h и имеет обратный знак. Это является следствием поведения нормы $\nu(h) = \nu_\infty(1 + c_\nu(h))$ ($\nu_\infty = 4$, $c_\nu(h) > 0$) в соотношении (1.19). Отсюда связь между коэффициентами может быть записана в виде

$$a_\sigma(m) = a_\nu(m) + \sum_{k=1}^m a_\alpha(k)a_\nu(m-k). \quad (4.3)$$

Здесь все коэффициенты нормы $a_\nu(m)$ положительные, тогда как почти все $a_\alpha(m)$ и $a_\sigma(m)$ отрицательные (за исключением $a_\alpha(4)$ и $a_\sigma(1)$, см. таблицы). С другой стороны, из рис. 3 видно, что и сами коэффициенты для угла и инварианта ведут себя совершенно по-разному. Последние относительно медленно убывают с m , приблизительно по степенному закону, тогда как первые быстро, почти экспоненциально, растут, так же как и коэффициенты нормы. Это подтверждается прямой интерполяцией и непосредственно вытекает из того, что норма почти компенсирует большую поправку для угла: $c_\sigma \ll |c_\alpha|$. В этом ключ к построению эмпирических соотношений (4.2). Действительно, такая компенсация не проходит при чисто экспоненциальной зависимости $a_\alpha(m) \approx a_\nu(m)$. Однако легко проверить, что это становится возможным при комбинированной зависимости (4.2а), если только $p > 1$ и $m \gg 1$. На рис. 3 показана также зависимость отношения a_α/a_σ от m , которая прекрасно ложится на экспоненту (см. (4.4) ниже). Это тем более удивительно, что последние два или даже три коэффициента инварианта явно отклоняются от простой степенной зависимости (4.2б). То же относится и к комбинированной зависимости (4.2а) для угла. Вопрос о природе этих аномалий остается открытым и требует дальнейших исследований. Отметим, что аномалии появляются только на последних коэффициентах, число которых невозможно увеличить из-за катастрофического роста ошибок (рис. 1). Кроме того, отношение коэффициентов угла и инварианта в промежуточной асимптотике вообще не содержит видимых аномалий. Конечно, точная зависимость коэффициентов, если она вообще может быть выражена в явном виде, вряд ли имеет простую форму (4.2) даже при $m \gg 1$. Это видно уже из того, что точность эмпирических соотношений не идет ни в какое сравнение с точностью самих коэффициентов (ср. таблицы и (4.4)). Тем не менее даже приближенные выражения (4.2) помогают ориентироваться как в интерпретации характерных особенностей промежуточной асимптотики, так и в дальнейших исследованиях этой проблемы. Так или иначе, на данном этапе мы ограничились этим приближением.

Параметры эмпирических соотношений были получены с помощью интерполяции данных для отношения коэффициентов с $m = 7-10$ в полулогарифмическом масштабе, и данных для инварианта с $m = 4-6$ в двойном логарифмическом масштабе. Результаты имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.358 \pm 0.0059, \quad p = 3.51 \pm 0.17, \\ A_\alpha &= -0.0174(1 \pm 0.28), \quad A_\sigma = -0.0233(1 \pm 0.27), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где точность указана в абсолютных и относительных СКО. Отметим, что интерполяция даже по трем коэффициентам ($m = 2, 3, 4$), полученным в работе [11], дает близкие значения параметров (4.2б):

$$A_\sigma = -0.0216(1 \pm 0.45), \quad p = 3.38 \pm 0.41. \quad (4.5)$$

Точность эмпирических соотношений (4.2) характеризуется также относительной СКО самой экстраполяции ($\Delta a/|a|$ для указанных выше значений m), которая составляет величину ± 0.029 для угла и ± 0.028 для инварианта. Отметим, что относительно малые значения этих СКО по сравнению с СКО в определении самих коэффициентов (4.4) объясняются сильной корреляцией последних. В обоих случаях аномалии коэффициентов существенно превышают как приведенные ошибки в значениях соотношения (4.2), так и обе ошибки самих коэффициентов в таблицах (см. рис. 3).

С помощью (4.2) можно построить приближенную модель промежуточной асимптотики, взяв в качестве начальных коэффициентов, явно не удовлетворяющих (4.2), их точные значения из таблиц. Предварительные численные эксперименты с такой моделью показали, что она действительно воспроизводит сдвиг значений всех и особенно последних коэффициентов, который, однако, лежит в пределах ошибок (см. таблицы и рис. 3) и не объясняет указанные выше аномалии. Более того, даже включение дополнительного однородного по h шума, моделирующего ошибки измерения угла, не помогает.

Приближенные выражения (4.2) позволяют также представить себе глобальное поведение в промежуточной асимптотике. Прежде всего, ряд для инварианта (4.26) сходится во всем исследованном интервале $h \leq 1$ вплоть до границы глобального хаоса, хотя и не описывает реальное поведение инварианта при $h \gtrsim 0.14$. Здесь ясно видна экспонента (см. рис. 2):

$$|\delta c(h)| \approx 63e^{-\pi^2/h}, \quad (4.6)$$

которая значительно превышает остаточный член (4.7) и описывает возмущение сепаратрисы более удаленным резонансом с частотой $2\Omega = 4\pi$ (см. (1.6)). Простая теория [2] предсказывает предэкспоненциальный множитель 8, т. е. почти на порядок меньше. Такое различие вполне объяснимо другим (неизвестным) значением фактора f в (1.12), а также значительно более сложной в этом случае системой резонансов высших приближений [15].

Более интересная ситуация возникает для угла, поскольку ряд (4.2a) расходится при $h > h_{cr} \approx \exp(-\gamma/2) \approx 0.507$, т. е. внутри исследованного диапазона (15 левых точек на рис. 2). Между тем в этой области не наблюдается никаких сингулярностей или аномалий в поведении функции $c_\alpha(h)$ или ее отклонения $\delta c_\alpha(h)$ от интерполяции. Более того, последнее вполне удовлетворительно описывается остаточным членом (4.7), который к тому же представлен на рис. 2 только своим первым слагаемым. Это ясно демонстрирует существенное изменение поведения как угла, так и инварианта в области больших $h \sim 1$ по сравнению с промежуточной асимптотикой.

Приближенные соотношения (4.2) позволяют также более аккуратно, чем это сделано в [11], оценить остаточный член ряда (1.20), не включенный в интерполяцию (3.1):

$$R(h, M) = \sum_{m=M+1}^{\infty} a(m) h^{2m} \approx a(M+1) h^{2M+2}. \quad (4.7)$$

Из рис. 2 видно, что даже первое слагаемое R неплохо представляет поведение отклонения угла во всей исследованной области. То же можно сказать и об экспоненте (4.6) для инварианта. Однако попытка добавить оба выражения к полиному (3.1) катастрофически снижает точность интерполяции: $\Delta c \sim 10^{-6}$. Это еще раз демонстрирует значительно более сложную структуру области $h \sim 1$. Ввиду важности этой области для многочисленных приложений эта проблема заслуживает дальнейшего изучения.

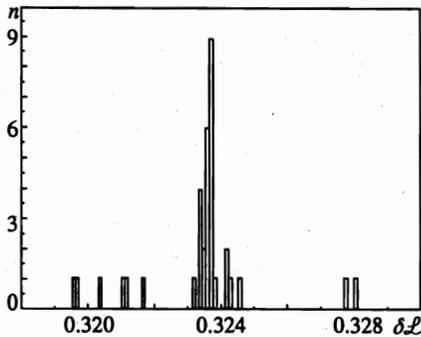


Рис. 4. Гистограмма коррекции (4.8) значения параметра Лазуткина (4.9): n — число различных значений коррекции в ячейке, ширина которой равна 10^{-4}

Наконец, большое внимание было уделено наиболее точному и надежному определению постоянной Лазуткина \mathcal{L} . Введем коррекцию

$$\delta \mathcal{L}_i = (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_0) \cdot 10^{23}, \tag{4.8}$$

где индекс i нумерует различные способы получения \mathcal{L} , а

$$\mathcal{L}_0 = 1118.82770594090077841514639 \tag{4.9}$$

— базовое значение, которое было получено нами уже в предварительных численных экспериментах (ср. (1.16)). Формально, наибольшая точность достигается при индивидуальной интерполяции с $N_p = 14$, $M = 10$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_\alpha &= 0.323560 \pm 0.000017, \\ \delta \mathcal{L}_\sigma &= 0.323572 \pm 0.000017. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Поскольку ряды промежуточной асимптотики (4.2) устроены совершенно по-разному в двух этих случаях, столь хорошее совпадение обоих значений является серьезным аргументом в пользу реальности указанной точности.

Ввиду важности этой постоянной были использованы и другие способы ее определения. Прежде всего была выделена группа вариантов интерполяции с одним и тем же значением $M = 10$, но различными $N_p = 12-20$ для угла и $N_p = 13-38$ для инварианта (всего 35 случаев). Группа выбиралась максимально широкой и ограничивалась только быстрым и монотонным уходом значения $\delta \mathcal{L}_i$ по причинам, которые обсуждались выше. Для среднего значения и СКО в этой группе найдены следующие величины:

$$\langle \delta \mathcal{L}_i \rangle_{35} = 0.323368 \pm 0.0017. \tag{4.11}$$

Ошибка при этом значительно увеличилась. Однако гистограмма распределения $\delta \mathcal{L}_i$ в группе (рис. 4) показывает, что основной пик имеет гораздо меньшую ширину. Если отбросить крылья распределения (два случая справа и шесть слева), получим

$$\langle \delta \mathcal{L}_i \rangle_{27} = 0.323654 \pm 0.00029. \tag{4.12}$$

Наконец, оставляя только девять случаев в самой высокой ячейке гистограммы, найдем

$$\langle \delta \mathcal{L}_i \rangle_9 = 0.323660 \pm 0.000021. \tag{4.13}$$

Взвешивая все за и против, мы пришли к заключению, что наиболее достоверное значение постоянной Лазуткина и ошибка в ее определении равны

$$\mathcal{L} = \underline{1118.82770594090077841514639323566} \pm 3 \cdot 10^{-27}. \quad (4.14)$$

Подчеркнуто значение \mathcal{L} , полученное ранее с помощью приближенной теории [10].

Результаты настоящей работы подтверждают теорию [11] как качественно (вид промежуточной асимптотики (3.1)), так и количественно (табл. 2). Более того, найдена промежуточная асимптотика непосредственно для угла расщепления сепаратрисы, что важно само по себе и позволило, в комбинации с данными для инварианта, получить приближенные эмпирические соотношения (4.2) в этой области, не ограниченные числом непосредственно найденных коэффициентов.

Мы весьма признательны Н. С. Диканскому за предоставленную возможность использовать компьютер АЛЬФА-4100, В. Г. Гельфрейху за полезные и интересные обсуждения и помощь при сравнении с теорией; А. Г. Грозину за предоставление программы счета с произвольной точностью [13] и содействие при работе с ней и Л. Ф. Хайло за большую помощь при проведении численных экспериментов. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 97-01-00865).

Литература

1. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН **105**, 3 (1971).
2. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. A. Lichtenberg and M. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin (1992).
5. Б. В. Чириков, ЖЭТФ **110**, 1174 (1996).
6. N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, and G. M. Zaslavsky, Nuclear Fusion **7**, 253 (1967).
7. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ **54**, 1590 (1968).
8. В. К. Мельников, Труды Моск. мат. общ. **12**, 3 (1963).
9. A. Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Paris (1892), p. 226 (А. Пуанкаре, *Избранные труды*, т. 1, Наука, Москва (1971), с. 728).
10. V. F. Lazutkin, I. G. Schachmanski, and M. B. Tabanov, Physica D **40**, 235 (1989).
11. V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and N. V. Svanidze, Physica D **71**, 82 (1994).
12. V. G. Gelfreich, *Reference System for Splitting of Separatrices*, Preprint 163, Universidad de Barcelona (1990).
13. D. H. Bailey, *ACM Transaction on Math. Software* **19**, 288 (1993).
14. Б. М. ЩигOLEV, *Математическая обработка наблюдений*, Физматгиз, Москва (1960); D. Hudson, *Statistics*, Geneva (1964) (Д. Худсон, *Статистика для физиков*, Мир, Москва (1970)).
15. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ, **109**, 2208 (1996).