

## ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РОСТА РЫХЛЫХ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

А. Э. Филиппов

Донецкий физико-технический институт Национальной академии наук Украины  
340114, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 4 июля 1997 г.

Рассмотрена кинетическая модель для описания взаимодействия двух флуктуирующих плотностей, позволяющая устойчиво воспроизводить рост плотных, пористых и фрактальных структур вблизи поверхности твердого тела, помещенного в активную среду. Исследованы решения локальных и нелокальных уравнений модели и на их основе прокомментированы возможные сценарии поведения систем, описание которых может быть сведено к такой модели. При различных значениях параметров вычислены индексы степенного роста ширины фронта в стационарном режиме.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы исследование роста и морфологии рыхлых слоев, образующихся вблизи плоских поверхностей различной природы привлекает все больший интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения (см., например, [1-5] и многочисленные ссылки в этих работах).

Во многих случаях независимо от конкретной специфики исследуемой системы развитие приповерхностного слоя протекает достаточно универсальным образом. Вначале в непосредственной близости от гладкой (плоской) границы двух контактирующих сред в результате химической реакции возникает плотный слой из одного или нескольких продуктов реакции. В процессе дальнейшего роста он становится все более рыхлым, плавно переходя к образованию существенно неоднородной, но, как правило, масштабно-инвариантной структуры, закономерности роста которой могут быть охарактеризованы фрактальной размерностью и соответствующими степенными показателями.

Так, например, переход от гладкого роста коррозионного фронта к фрактальному наблюдался недавно непосредственно [1] при исследовании двумерной коррозии тонких пленок Al, напыленных на оптически прозрачные подложки и помещенных в электролит, содержащий активные компоненты  $Fe_2(SO_4)_3$ , HCl,  $Na_2SO_4$  и NaCl. Последовательность снимков показывает, как изначально идеально круглая ямка, перфорированная в поверхности Al, расширяется, а на ее границе формируются характерные древовидные формы. Со временем рост фронта становится самоподобным с фрактальной размерностью  $D_f = 1.33 \pm 0.01$ .

Эффект нарастания длины фронта может быть выражен даже более сильно. Так, например, в описанной в работе [2] системе при пропускании слабого тока ( $J = 0.2$  мА/см<sup>2</sup>) через медный электрод развивается «убегающий» рост фронта, состоящий в том, что его продвижение происходит на первоначально небольших выступах гладкой границы электрода, тогда как остальные участки фронта остаются за то же время

практически неизменными. В результате формируется характерная дендритная структура, состоящая, в отличие от «обычной» фрактальной поверхности [1], из совокупности практически уединенных «деревьев».

Помимо чисто научного интереса исследование роста фронта коррозии привлекает внимание благодаря своей исключительной прикладной значимости, поскольку в ряде своих приложений напрямую соприкасается с проблемой повышения эффективности электрических батарей [3, 4]. В частности, при использовании литиевого анода, помещенного в электролит, содержащий в качестве аддитива  $\text{SOCl}_2$ , благодаря исключительно высокой реактивной способности Li на его поверхности формируется пористый двухкомпонентный слой из LiCl и  $\text{SO}_2$ , приводящий к возникновению «эффекта задержки» [4] при длительном хранении элемента. Микрофотографии приповерхностного слоя показывают, что его можно рассматривать как комбинацию начального относительно плотного слоя с последующим переходом ко все более рыхлому фрактальному образованию.

Достаточно универсальные свойства, проявляемые различными системами, позволяют надеяться на применимость к их описанию единых моделей роста, основанных на комбинации идей континуальной теории поля и кинетических уравнений со случайным источником [5, 6].

Будучи уже достаточно традиционным для теории фазовой сепарации и флуктуационных явлений при фазовых переходах [7–20], использование кинетических уравнений с источником шума применительно к описанию роста фронта требует известной осторожности. Прежде всего потому, что в отличие от фазовых переходов, где генерация параметра порядка идет в объеме системы, случайный источник здесь не может быть аддитивным. Генерация ненулевой плотности компонент, образующих фронт, должна происходить лишь в непосредственной близости от уже существующей границы. Последнее означает, что соответствующий источник в уравнении должен быть в данном случае мультипликативным (т. е., как минимум, содержать саму плотность в качестве множителя). Однако в недавних публикациях, в которых теоретически изучались фазовые диаграммы и переходы в системах с мультипликативным шумом [21–24], отмечалось, что наличие такого достаточно интенсивного шума может радикально сказаться как на упорядоченной структуре, так и на самой фазовой диаграмме, приводя к появлению новых нетривиальных фаз. В нашем случае это означает, что уравнения модели должны быть записаны таким образом, чтобы по возможности избежать связанных с этим дополнительных осложнений.

С экспериментальной точки зрения исследование фрактальных коррозионных структур удобно, поскольку фронт коррозии наблюдается непосредственно на микрофотографиях и соответствующие 2D-распределения плотностей могут быть явным образом описаны. Вместе с тем протекающие при этом процессы достаточно сложны, и несмотря на продолжительные усилия их теоретические модели все еще остаются очень упрощенными, хотя и предполагают численный анализ кинетических уравнений. В рассмотрении оставляют, как правило, лишь плотность единственной распределенной величины, которая предполагается наиболее существенной в каждом конкретном случае [5, 10].

Для реальных физико-химических процессов это, вообще говоря, неверно, поскольку в реакциях обычно участвуют две и более компонент. В этом случае сколько угодно изошренное описание системы на основе плотности единственной компоненты заведомо подменяет ее исследование анализом чисто теоретических моделей. При наличии современных возможностей численного моделирования попытки свести проблему

к единственному уравнению есть скорее дань аналитической традиции, чем реальная необходимость. В настоящей заметке возможность продвижения в данном направлении продемонстрирована на примере двухкомпонентной модели, сформулированной для описания роста и коррозии широкого класса рыхлых поверхностных слоев, инициированных химическими реакциями.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Следуя работе Жанга и Паризи [5], будем формулировать модель в форме теоретико-полевого континуального варианта модели роста с самоподавлением, которая в случае единственной компоненты представляет собой континуальную версию известной модели Эдена [6]. Кратко модель Эдена может быть изложена следующим образом. Допустим, что частица-источник, помещенная в  $d$ -мерное пространство (мы будем в дальнейшем ограничиваться  $d = 2$ ), порождает с некоторой вероятностью новые частицы в соседних незаполненных точках пространства и т. д.

Определим вслед за авторами работы [5] последовательность параметров порядка на каждом  $n$ -ом шаге генерации посредством величин

$$\rho^{(1)}(\mathbf{r}; n); \quad \rho^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; n); \quad \rho^{(3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; n); \dots; \rho^{(j)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_j; n), \quad (1)$$

первая из которых есть вероятность обнаружить частицу в точке пространства  $\mathbf{r}$  в момент времени  $n$ , вторая — две частицы соответственно в точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  т. д. Тогда процесс Эдена с самоподавлением будет описываться соотношением

$$\rho^{(1)}(\mathbf{r}; n+1) - \rho^{(1)}(\mathbf{r}; n) = D \sum_{\mu} [\rho^{(1)}(\mathbf{r} + \mu; n) + \rho^{(1)}(\mathbf{r} - \mu; n)] / 2dn - C \rho^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; n), \quad (2)$$

где  $D$  и  $C$  — постоянные, суммирование выполняется по ближайшим соседям в  $d$ -мерном пространстве, а двухчастичная плотность вероятности в нижайшем мультипликативном приближении распадается на произведение двух одночастичных функций:

$$\rho^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; n) = \rho^{(1)}(\mathbf{r}_1; n) \rho^{(1)}(\mathbf{r}_2; n), \quad (3)$$

а соответствующая иерархия уравнений для многочастичных функции  $\rho^{(j)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_j; n)$  оказывается оборванной.

Подставляя соотношение (3) в уравнение (2), переходя затем к континуальному пределу для оператора Лапласа

$$\sum_{\mu} [\rho^{(1)}(\mathbf{r} + \mu; n) + \rho^{(1)}(\mathbf{r} - \mu; n)] / 2dn \rightarrow \Delta \rho^{(1)}(\mathbf{r}; n) \quad (4)$$

и определяя переменную времени посредством подстановки  $t = \ln n$ , получаем в результате простейшую континуальную версию уравнения:

$$\partial \rho(\mathbf{r}; t) / \partial t = D \Delta \rho(\mathbf{r}; t) + C \rho(\mathbf{r}; t) [1 - \rho(\mathbf{r}; t)]. \quad (5)$$

Здесь и далее под плотностями  $\rho(\mathbf{r}; n)$  подразумеваются одночастичные функции  $\rho^{(1)}(\mathbf{r}; n)$ , и поэтому соответствующие верхние индексы опущены. Нетрудно видеть, что

если затравочная величина  $\rho(\mathbf{r}; t) = 0$ , то  $\rho(\mathbf{r}; t)$  останется нулем и в дальнейшем. Генерация движущегося фронта  $\rho(\mathbf{r}; t)$  возникает при таких начальных условиях, что при  $t = 0$  величина плотности  $\rho(\mathbf{r}; 0)$  отлична от нуля вдоль одной из границ системы.

Следует отметить, что структура уравнения (5) формально такова, что при отрицательных значениях переменной  $\rho$  его решения  $\rho(\mathbf{r}; t)$  неустойчивы при  $\rho \rightarrow -\infty$ . В теории фазовых переходов подобная неустойчивость устраняется старшими нелинейностями  $\sim \rho^3(\mathbf{r}; t)$  в уравнении и соответственно членами  $\sim \rho^4(\mathbf{r}; t)$  в производящем функционале свободной энергии. В моделях роста фронта затравка  $\rho(\mathbf{r}; 0) > 0$  и члены порядка  $\rho^4$  в общем случае не нужны [5]. При этом, однако, нужно следить за тем, чтобы начальные (и граничные) условия всегда принадлежали области притяжения к устойчивым ограниченными решениям  $\rho(\mathbf{r})$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Скорости генерации компонент реакции флуктуируют. В работе [21] было показано, что это приводит к появлению мультипликативного источника шума  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  с некоторой интенсивностью  $D$ :

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6)$$

Этот источник моделирует скорее участие в реакциях тех компонент, которые явно не учтены в уравнении (уравнениях), чем эффект тепловых флуктуаций [21].

Из структуры локального члена в уравнении (5) видно, что он соответствует вариации подходящим образом подобранной эффективной энергии  $V(\rho(\mathbf{r}; t))$ :

$$\delta V(\rho(\mathbf{r}; t)) / \delta \rho(\mathbf{r}; t) = -C \rho(\mathbf{r}; t) [1 - \rho(\mathbf{r}; t)]. \quad (7)$$

Имеем  $V(\rho(\mathbf{r}; t)) = -C \rho^2(\mathbf{r}; t) [1/2 - \rho(\mathbf{r}; t)/3]$  и, следовательно, барьер генерации  $\rho(\mathbf{r}; t) \neq 0$  отсутствует. Мультипликативность шума существенна, так как делает невозможным такой процесс, при котором флуктуация  $\rho(\mathbf{r}; t) \neq 0$  в произвольной точке внутри системы сама становится генератором  $\rho(\mathbf{r}; t)$ , приводя к спонтанному зарождению вещества вдали от фронта загрязнения. Однако простое добавление в уравнение (5) источника, пропорционального плотности,

$$\partial \rho(\mathbf{r}; t) / \partial t = D \Delta \rho(\mathbf{r}; t) + C \rho(\mathbf{r}; t) [1 - \rho(\mathbf{r}; t)] + \rho(\mathbf{r}; t) \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

приводит к описанным в недавних работах [21–24] сильным побочным эффектам, (вплоть до полной трансформации упорядоченного стационарного состояния), которые нежелательны для прикладной модели. Качественно природа сильного воздействия шума, пропорционального  $\rho(\mathbf{r}; t)$ , на стационарное состояние достаточно прозрачна. При прохождении фронта через заданную точку плотность позади него принимает равновесное значение:  $\rho(\mathbf{r}; t) = 1$ . Реакции, приводящие к движению фронта, затухают. Этому, однако, противоречит максимальная в этой области интенсивность шума.

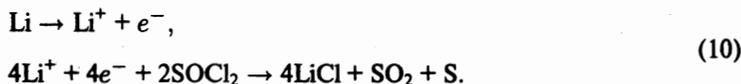
Флуктуации должны быть максимальными в области фронта, т. е. там, где существенно отлична от нуля комбинация  $\rho(\mathbf{r}; t) [1 - \rho(\mathbf{r}; t)]$ , и стремиться к нулю вдали от него. В простейшем виде это предположение может быть использовано путем постулирования следующей формы уравнения:

$$\partial \rho(\mathbf{r}; t) / \partial t = D \Delta \rho(\mathbf{r}; t) + \rho(\mathbf{r}; t) [1 - \rho(\mathbf{r}; t)] [C + \zeta(\mathbf{r}, t)]. \quad (9)$$

Несмотря на наличие самоподавления  $-C \rho^2(\mathbf{r}; t)$  уравнение (9) дает достаточно тривиальную картину продвижения плотного фронта с постепенно расширяющейся границей (за счет ее случайных блужданий, связанных с шумом  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ ). Формирование реалистической рыхлой структуры тесно связано с многокомпонентностью задачи. Ниже

мы рассмотрим простейший двухкомпонентный случай, предполагая в качестве примера химические реакции, протекающие в системе с загрязняемым литиевым анодом (см. [3, 4] и ссылки в этих работах):

В принципе, полная картина реакций в системе достаточно сложна и может быть записана в виде



Однако реально нас интересует лишь возникновение фронта, состоящего из литиевого хлорида LiCl, загрязняемого концентрирующимся вдоль поверхности продуктом реакции SO<sub>2</sub>. Принимая это во внимание, можно интерпретировать затравочное уравнение (9) как исходное уравнение для описания эволюции плотности LiCl, которую в дальнейшем будем обозначать  $\rho_1(r, t)$ .

Соответствующие коэффициенты и источник шума также снабдим индексом «1». Плотность SO<sub>2</sub> в дальнейшем будем описывать функцией  $\rho_2(r, t)$ . Локальное расталкивание обоих продуктов реакции LiCl и SO<sub>2</sub> будем моделировать посредством знакоопределенной добавки в эффективную энергию системы  $V_{12}(\rho_1, \rho_2)$ , которая в низшем приближении может быть записана в форме  $V_{12}(\rho_1, \rho_2) = B\rho_1^2\rho_2^2/2$ . Уравнение (9) трансформируется к виду

$$\partial\rho_1/\partial t = D_1\Delta\rho_1 + \rho_1(1 - \rho_1)(C_1 + \xi_1(r, t)) - B\rho_1\rho_2^2. \quad (11)$$

Его теперь необходимо дополнить уравнением, описывающим эволюцию второй компоненты  $\rho_2(r, t)$ . Для этой цели можно воспроизвести рассуждения, приводящие к формулам (1)–(5), принимая, однако, во внимание, что, как и  $\rho_1(r, t)$ , вторая компонента  $\rho_2(r, t)$  генерируется в результате тех же реакций (10) вблизи свободной (незагрязненной SO<sub>2</sub>) поверхности LiCl. Это означает, что для  $\partial\rho_2/\partial t$  следует использовать то же генерационное слагаемое, что и для  $\partial\rho_1/\partial t$ :

$$\partial\rho_2/\partial t = D_2\Delta\rho_2 + \rho_1(1 - \rho_1)(C_2 + \xi_2(r, t)) - \rho_2\rho_1^2 - F(\rho_2). \quad (12)$$

Здесь учтено, что, хотя обе плотности  $\rho_2$  и  $\rho_1$  возникают в ходе одной и той же реакции, скорости формирования из них плотных компонент могут быть различны, так что, вообще говоря,  $C_2/C_1 \equiv v \neq 1$ . Ниже для физически интересного случая фактически будет использована величина  $\mu \geq 1$  (однако при этом  $\mu \simeq 1$ ).

Линейные по  $\rho_2$  слагаемые не могут, очевидно, обеспечить остановку роста  $\rho_2$  и ее стабилизацию ( $\rho_2 \rightarrow 1$ ) в статическом пределе. Примем также во внимание то, что самопроизвольная генерация  $\rho_2$  вдали от фронта отсутствует, и, следовательно, эффективная энергия, варьируя которую получаем функцию  $F(\rho_2)$ :

$$\delta V_2(\rho_2(r; t)) / \delta \rho_2(r; t) = -F(\rho_2(r; t)), \quad (13)$$

должна содержать барьер, разделяющий два одинаковых минимума при  $\rho_2 = 0$  и  $\rho_2 = 1$ . В низшем нетривиальном приближении имеем

$$V_2(\rho_2) = B\rho_2^2(1 - \rho_2^2)/2. \quad (14)$$

Так что искомое уравнение для  $\rho_2(r; t)$  принимает вид

$$\partial\rho_2/\partial t = D_2\Delta\rho_2 + \rho_1(1 - \rho_1)(C_2 + \xi_2(r, t)) - \rho_2\rho_1^2 - \rho_2(0.5 - \rho_2)(1 - \rho_2). \quad (15)$$

Переход к континуальному приближению при сохранении только низших градиентов в энергии и, соответственно, членов  $\Delta\rho_{1,2}$  в уравнениях привел к известной потере информации об ограничении, накладываемом на минимальное количество LiCl в некоторой окрестности  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \sigma$  данной точки  $\mathbf{r}$ , необходимой для «включения» реакций (10). С формальной точки зрения такое ограничение означает требование устойчивости состояния с  $\rho_{1,2} = 0$  относительно малых возмущений (интегральной) плотности

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}').$$

В континуальном подходе ее можно обеспечить лишь принципиально нелокальными вкладами в уравнения (11) и (15). Заметим, что переход к континуальному пределу не упраздняет учета высших (по отношению к  $(\nabla\rho(\mathbf{r}))^2$  градиентов и нелокальных форм типа

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_1(\mathbf{r}')$$

в производящем функционале. В теории фазовых переходов аналогичные нелокальные члены в свободной энергии активно эксплуатируются для описания неоднородного упорядочения параметра порядка, критического поведения, блокировки зародышей и т. п. (см., например, работы [16–20]).

В методе Монте-Карло, где величина  $\rho_1$  была дискретной и равной в каждой ячейке 0 или 1, условию «включения» реакции соответствовало наличие минимум одной молекулы LiCl хотя бы в одной из вычислительных ячеек, ближайших к рассматриваемой [4]. В континуальной модели генерационные члены в обоих уравнениях для  $\partial\rho_{1,2}/\partial t$  помимо локальных множителей  $\rho_1(1 - \rho_1)(C_{1,2} + \xi_{1,2}(\mathbf{r}, t))$  должны содержать также существенно нелокальные. Генерация  $\rho_1$  и  $\rho_2$  «включается», когда суммарная плотность в некоторой окрестности  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \sigma$  данной точки  $\mathbf{r}$  превысит заданный порог

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') > a.$$

Генерационное слагаемое должно содержать обрезывающий множитель

$$\Theta(\mathbf{r}) = \vartheta \left( \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') - a \right) \quad (16)$$

такой, что

$$\Theta(\mathbf{r}) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') > a$$

и

$$\Theta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при} \quad \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq\sigma} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') < a.$$

При достаточно резком пороге функция  $\vartheta(x)$  вырождается в ступенчатую.

При подстановке множителя (16) система уравнений становится существенно нелокальной и принимает окончательную форму

$$\begin{aligned} \partial \rho_1 / \partial t &= D_1 \Delta \rho_1 + \rho_1(1 - \rho_1)(C_1 + \xi_1(\mathbf{r}, t)) \Theta(\mathbf{r}) - \rho_1 \rho_2^2, \\ \partial \rho_2 / \partial t &= D_2 \Delta \rho_2 + \rho_1(1 - \rho_1)(C_2 + \xi_2(\mathbf{r}, t)) \Theta(\mathbf{r}) - \rho_2 \rho_1^2 - \rho_2(0.5 - \rho_2)(1 - \rho_2). \end{aligned} \tag{17}$$

В приближении ближайших соседей  $a = 1$ , а интегральное условие

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \leq a} d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}') > a$$

может быть сведено к (дискретному) оператору Лапласа, что очевидным образом соответствует удержанию в уравнениях старших градиентов.

### 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Система уравнений (17) сложна и может быть решена лишь численно. Она представляет собой одну из модификаций кинетических уравнений, различные варианты которых широко встречаются в последние годы при моделировании кинетики фазовых переходов (см. [9–20]) и критических явлений [17, 18] на основе обобщенного уравнения Ландау–Халатникова [7] или уравнения Кана [8], а также фазовой сепарации в системах, состоящих из взаимодействующих подсистем [14, 15, 18]. Следует отметить, что оно содержит практически все «неприятности», которые могут встретиться в кинетических уравнениях подобного типа, включая нелокальность, мультипликативный шум и взаимодействие подсистем.

Помимо этого в отличие от теории фазовых переходов система (17) должна решаться при специфических начальных условиях, когда упорядочение и фазовая сепарация происходят не в форме роста зародышей по всему объему [9–17, 19–20], а посредством продвижения фронта, стартующего от одной из границ системы, и последующего упорядочения и фазовой сепарации обоих взаимодействующих полей  $\rho_{1,2}(\mathbf{r}; t)$  позади него.

Поскольку даже численное решение такой системы требует предварительного качественного представления о возможном сценарии процесса для задания параметров, представляется полезным исследовать вначале более простую локальную версию уравнений. Эта версия в известном смысле должна соответствовать описанию системы в тех ее областях, где плотности  $\rho_{1,2}(\mathbf{r}; t)$  примерно постоянны и градиентные члены, а также множители  $\Theta(\mathbf{r})$  можно опустить.

В этом случае имеем просто систему двух дифференциальных уравнений для не зависящих от  $\mathbf{r}$  переменных  $\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(t)$ :

$$\begin{aligned} \partial \rho_1 / \partial t &= C_1 \rho_1(1 - \rho_1) - B_1 \rho_1 \rho_2^2, \\ \partial \rho_2 / \partial t &= C_2 \rho_1(1 - \rho_1) - B_2 \rho_2 \rho_1^2 - B_2 \rho_2(0.5 - \rho_2)(1 - \rho_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Неподвижные точки, а также изоклины вертикалей и горизонталей этой системы могут быть найдены непосредственно из решения алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \partial \rho_1^* / \partial t &= C_1 \rho_1^*(1 - \rho_1^*) - B_1 \rho_1^* \rho_2^{*2} = 0, \\ \partial \rho_2^* / \partial t &= C_2 \rho_1^*(1 - \rho_1^*) - B_2 \rho_2^* \rho_1^{*2} - B_2 \rho_2^*(0.5 - \rho_2^*)(1 - \rho_2^*) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Помимо трех очевидных неподвижных точек,

$$\begin{aligned} \mu_0^* : \rho_1^* = 0, \quad \rho_2^* = 0, \\ \mu_1^* : \rho_1^* = 1, \quad \rho_2^* = 0, \\ \mu_2^* : \rho_1^* = 0, \quad \rho_2^* = 1, \end{aligned} \quad (20)$$

возможна также пара нетривиальных точек, которые определены решениями системы (19) при  $\rho_{1,2} \neq 0$  и  $\rho_{1,2} \neq 1$ .

В частности, в симметричном случае  $C_1/B_1 = C_2/B_2 \equiv C$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_1^* = 1 - \rho_2^{*2}/C, \\ (1 - \rho_2^{*2}/C) [\rho_2^* - (1 - \rho_2^{*2}/C)] - (0.5 - \rho_2^*)(1 - \rho_2^*) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

откуда, например, при  $C = 5$

$$\mu_3^* : \rho_1^* = 0.53(9), \quad \rho_2^* = 1.51(83); \quad \mu_4^* : \rho_1^* = 0.87(2), \quad \rho_2^* = 0.8. \quad (22)$$

Можно проверить, что точка  $\mu_4^*$  является седловой, тогда как устойчивость точки  $\mu_3^*$  зависит от ее расположения по отношению к точке  $\mu_2^*$ . А именно, она устойчива в случае, когда в этой точке  $\rho_2^* > 1$ .

Однако, как ожидается, именно устойчивые неподвижные точки локальной системы (18) должны определять в пределе  $t \rightarrow \infty$  стационарное решение для обеих плотностей  $\rho_{1,2}$ . Принимая во внимание физический смысл  $\rho_{1,2}$ , такое решение должно бы соответствовать либо одной из точек  $\mu_1^*$ :  $\rho_1^* = 1, \rho_2^* = 0$  или  $\mu_2^*$ :  $\rho_1^* = 0, \rho_2^* = 1$ , либо, во всяком случае, такой точке, в которой  $\rho_1^* + \rho_2^* = 1$ .

Устойчивая при  $\rho_2^* > 1$  неподвижная точка  $\mu_3^*$  такому условию не удовлетворяет. В этой точке помимо  $\rho_1 + \rho_2 > 1$  плотность  $\rho_1^* \neq 0$ , так что она, очевидно, не является физической. Физическая точка  $\mu_2^*$ , однако, неустойчива при том же условии ( $\rho_2^* > 1$  в точке  $\mu_3^*$ ). Фазовые траектории покидают окрестность этой точки, уходя в направлении  $\mu_3^*$ . В пределе  $\rho_2^* \rightarrow 1$  точка  $\mu_3^*$  приближается к  $\mu_2^*$ , и при  $\rho_2^* = 1$  обе точки сливаются. При этом точка  $\mu_2^*$  становится устойчивой.

Требование устойчивости  $\mu_2^*$  накладывает ограничение на физическую область параметров при численном моделировании нелокальной системы. В частности, при  $C_1/B_1 = C_2/B_2 \equiv C$  бифуркация точек  $\mu_2^*$  и  $\mu_3^*$  для локальных уравнений имеет место при  $C = 1$ . В результате диффузии ( $\Delta\rho_{1,2} \neq 0$ ) и «убывания» меньшей из плотностей  $\rho_1$  до нуля эта граница для нелокальной системы смещается в сторону ослабления соответствующего ограничения, так что (численно найденная) бифуркация точек  $\mu_2^*$  и  $\mu_3^*$  происходит при  $C_{cr} \approx 1.4$ .

Глобальная структура фазового портрета показана на рис. 1. Представлена физически интересная реализация портрета для  $C < C_{cr}$ . Неподвижные точки  $\mu_3^*$  и  $\mu_4^*$  для случая  $C > C_{cr}$  можно получить численным решением уравнения

$$f(\rho_2^*) = (1 - \rho_2^{*2}/C) [\rho_2^* - (1 - \rho_2^{*2}/C)] - (0.5 - \rho_2^*)(1 - \rho_2^*) = 0.$$

Система уравнений (18) описывает по сути эволюцию плотностей  $\rho_{1,2}^*$  в каждой точке пространства без учета взаимодействия между различными точками. В этом приближении взаимодействие отражается лишь посредством начальных условий. А именно: по мере прихода фронта в каждую точку пространства в ней начинается генерация обеих

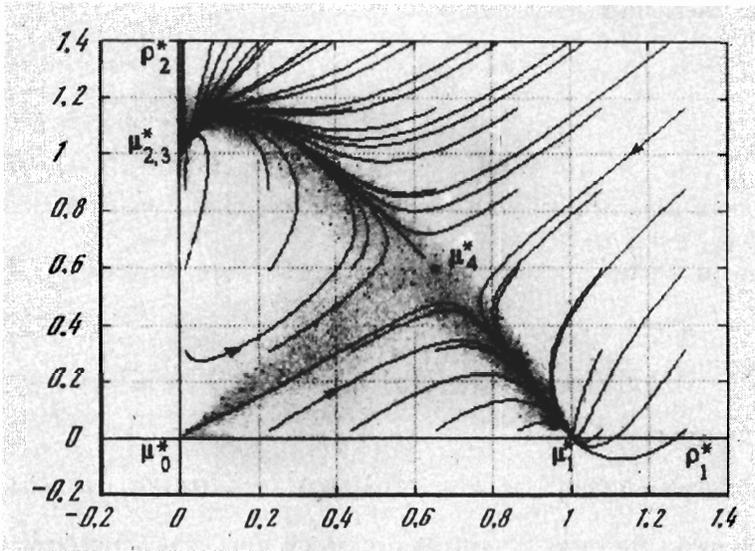


Рис. 1. Структура фазового портрета для локальной системы (представлен случай  $B/C > (B/C)_{cr}$ ). Фазовые траектории локальной системы уравнений, показанные непрерывными линиями, сопоставлены с проекциями точек массивов  $\{\rho_1(x, y; t); \rho_2(x, y; t)\}$  на плоскость  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  (показанными серым), являющихся результатом численного решения полной системы нелокальных уравнений с шумом

плотностей  $\rho_{1,2}^*$  и, следовательно, на фазовом портрете рис. 1 физическому сценарию соответствуют траектории, начинающиеся из окрестности тривиальной точки  $\mu_0^*$ .

Сепаратриса, соединяющая эту точку с седлом  $\mu_4^*$ , разделяет плоскость  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  на области притяжения соответственно к устойчивым неподвижным точкам  $\mu_1^*$  и  $\mu_{2,3}^*$ . Исследуя поведение траекторий, стартующих вблизи сепаратрисы, можно предсказать некоторые результаты численного моделирования полных уравнений и, в конечном счете, свойства реальных систем. В частности, нетрудно предвидеть роль источника шума  $\xi_{1,2}(r, t)$ . При достаточной интенсивности шум позволяет фазовым траекториям проходить как сверху, так и снизу от сепаратрисы, независимо от сценария, предшествовавшего приходу фронта в данную точку.

Какое-то время после прихода фронта обе плотности  $\rho_{1,2}^*$  увеличиваются практически одновременно и очень быстро, чему соответствует первый максимум скорости эволюции

$$W(t) = [(\partial \rho_1^* / \partial t)^2 + (\partial \rho_2^* / \partial t)^2]^2 \tag{23}$$

на рис. 2. Вблизи седла  $\mu_4^*$  дальнейшее одновременное увеличение обеих плотностей  $\rho_{1,2}^*$  становится невозможным. Скорость  $W(t)$  резко уменьшается.

В это время происходит собственно фазовая сепарация, когда одна из плотностей  $\rho_1^*$  или  $\rho_2^*$  вытесняется из данной области пространства. За этим снова следует всплеск  $W(t)$ , сопровождающий быстрое нарастание оставшейся компоненты, замедляющееся лишь около одного из устойчивых неподвижных состояний  $\mu_1^*$ :  $\rho_1^* = 1, \rho_2^* = 0$  или  $\mu_{2,3}^*$ :  $\rho_1^* = 0, \rho_2^* = 1$ .

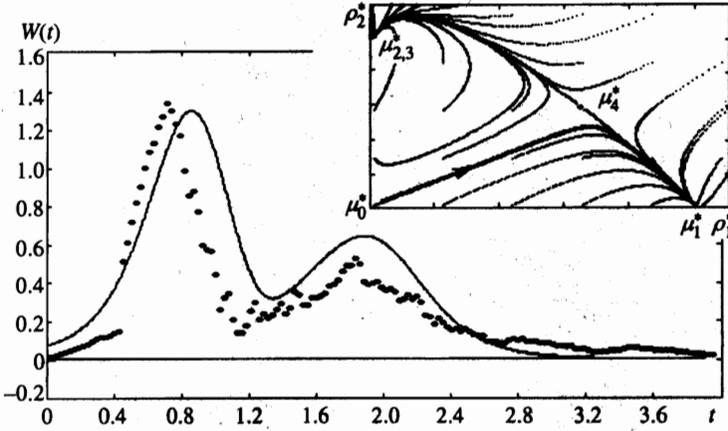


Рис. 2. Два максимума скорости изменения обеих концентраций  $\rho_1^*(x, y; t)$  и  $\rho_2^*(x, y; t)$  в фиксированной точке  $(x, y)$  при эволюции до и после окрестности седловой неподвижной точки  $\mu_4^*$ . Светлые точки — результат численного эксперимента. Для сравнения (непрерывной линией) приведена аналогичная кривая, предсказываемая на основании анализа локальной системы для траектории, близкой к физической. На вставке показан фазовый портрет локальной системы, на котором такая траектория отмечена жирной линией

Характерные двугорбые кривые скорости эволюции действительно наблюдаются при численном решении полной системы уравнений. В соответствии с физической постановкой задачи начальное условие выбирается в виде узкой полосы плотности  $\rho_1(x, y; t = 0) \neq 0$  вдоль одной из границ двумерной системы. При этом процесс зарождения и сепарации плотностей  $\rho_{1,2}(r, t)$  сопровождается формированием характерных древовидных пространственных распределений обеих плотностей.

Обе плотности одновременно генерируются в районе фронта. Однако в отсутствие шума,  $\xi_{1,2}(r, t) = 0$ , начальное распределение  $\rho_1(x, y; t = 0) \neq 0$ ;  $\rho_2(x, y; t = 0) = 0$  приводит к формированию позади него области сплошного заполнения  $\rho_1(x, y; t) \neq 0$  и к сохранению  $\rho_2(x, y; t) = 0$  всюду в глубине системы. Для появления вкраплений  $\rho_2(x, y; t) \neq 0$  в стационарном распределении позади фронта необходимо, чтобы выполнялось условие  $\rho_2(x, y; t) > \rho_1(x, y; t)$  хотя бы в некоторых областях пространства в районе фронта (где обе плотности малы). Это условие выполняется при  $\xi_{1,2}(r, t) \neq 0$ .

Вначале распределение  $\rho_1(x, y; t = 0) \neq 0$  позади фронта практически однородно. Области с  $\rho_2(x, y; t) > \rho_1(x, y; t)$  не только порождают вкрапления  $\rho_2(x, y; t) \neq 0$ , но, что более важно, останавливают генерацию обеих плотностей в данном месте фронта. Активный рост происходит лишь на тех фрагментах, где

$$\Theta(r) = \vartheta \left( \int_{|r-r'| \leq \sigma} dr' \rho_1(r') - a \right) > 0.$$

Фронт становится разрывным, а расширяющаяся упорядоченная область со временем превращается во фрактал.

На рис. 3а серым цветом разной интенсивности показан характерный фрагмент системы (состоящей из  $512 \times 512$  вычислительных точек) с распределением суммарной плотности  $\rho(x, y; t) = \rho_1(x, y; t) + \rho_2(x, y; t)$ , возникающим на промежуточном этапе

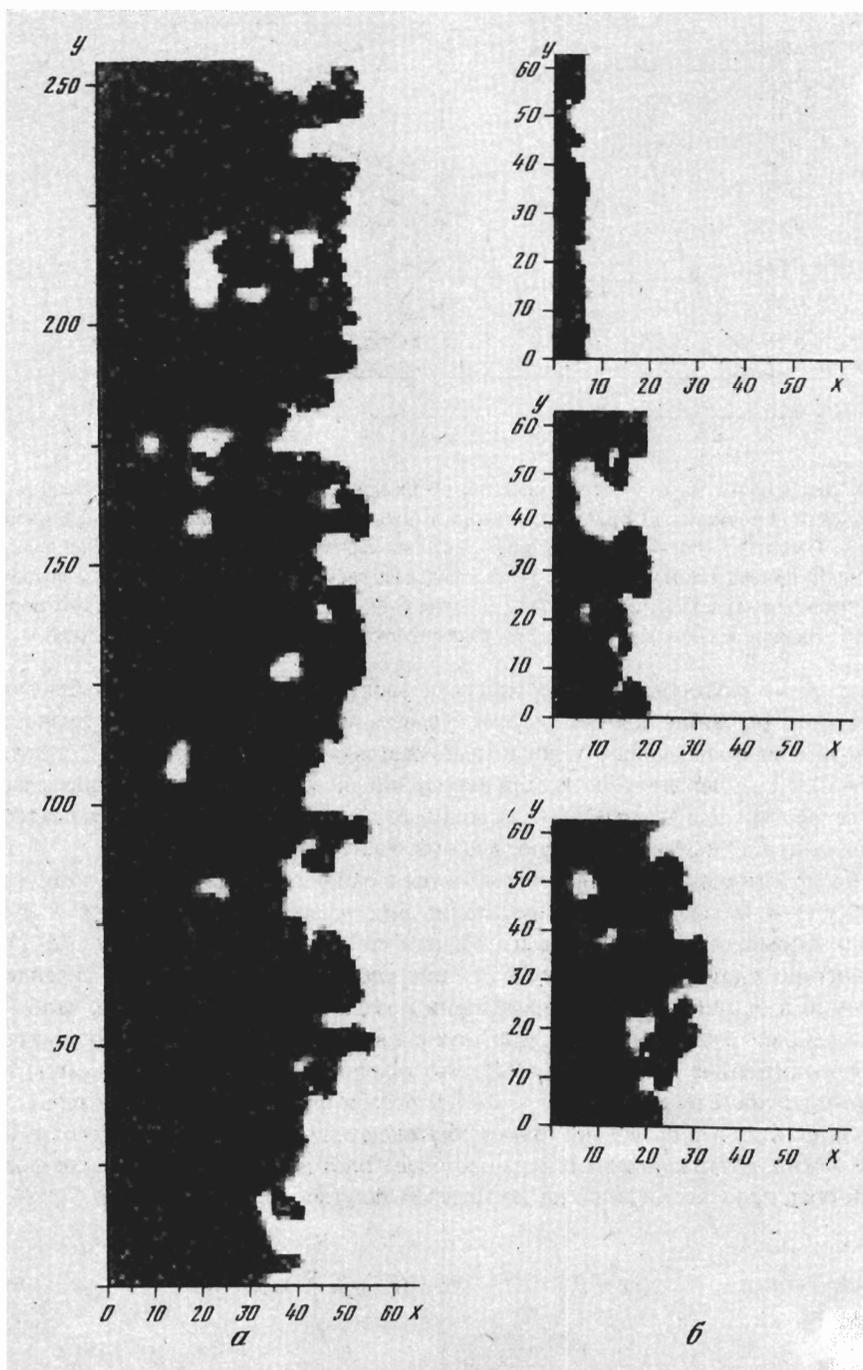


Рис. 3.

перехода от однородного роста к фрактальному. Видны загрязненные участки, а также области активного роста. Такие участки характеризуются промежуточными величинами  $\rho_1(x, y; t) \cong \rho_2(x, y; t) \leq 0.8$ , которым соответствуют промежуточные же интенсивности серого цвета.

На упоминавшемся уже рис. 1 фазовые траектории локальной системы уравнений (показанные сплошными линиями) сопоставлены с проекциями точек массивов  $\{\rho_1(x, y; t); \rho_2(x, y; t)\}$  на плоскость  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  (показанными серым), являющихся численным решением полной системы нелокальных уравнений с шумом. Следует заметить, что такое сопоставление в данном случае необходимо, поскольку эффект мультипликативного шума, в принципе, может быть весьма нетривиальным [21–24].

Наблюдающееся на рисунке хорошее согласие достигается благодаря специальной комбинации источника  $\xi_1(r, t)$  и плотности  $\rho_1$  в уравнениях (17), сконструированной выше из физических соображений в форме  $\rho_1(1 - \rho_1)(C_1 + \xi_1)$ .

На рис. 2 два максимума скорости изменения обеих концентраций  $\rho_1(x, y; t)$  и  $\rho_2(x, y; t)$ , полученные в результате численного эксперимента, обозначены светлыми точками. Они достаточно хорошо согласуются с аналогичной кривой (непрерывная линия), предсказанной выше из анализа локальной системы. Это косвенно подтверждает правильность интерпретации модели и результатов, поскольку согласие имеет место лишь для описанных выше специальных траекторий (близких к физическим), выходящих из окрестности точки  $\mu_0^*$ . На вставке к рис. 2 показан фазовый портрет локальной системы, где конкретная траектория отмечена жирной линией.

Качественно новое свойство системы (по сравнению с моделированием процессов роста на основе моделей с единственной флуктуирующей переменной [4]) состоит в возможности возникновения позади фронта пустот, не заполненных ни одной из компонент. В случае единственного поля,  $\rho_1(x, y; t) \equiv \rho(x, y; t)$ , такие лакуны неизбежно следовало трактовать как заполненные другой, «загрязняющей», компонентой плотности  $\rho_2(x, y; t)$ , которая в этом случае в уравнениях явно не присутствует. Модель (17) содержит дополнительную информацию о втором поле  $\rho_2(x, y; t)$ , что позволяет отличить области, занятые  $\rho_2(x, y; t) \neq 0$ , от собственно пустот.

Механизм их образования хорошо прослеживается на рис. 3б, где для небольшого фрагмента фронта представлена типичная последовательность роста  $\rho(x, y; t)$ , показанная для трех характерных моментов времени: при возникновении плотного начального слоя, при появлении первых древовидных выростов и при закрытии первых внутренних пор в суммарной плотности  $\rho(x, y; t)$ . Полностью сформированные пустоты хорошо видны также на рис. 3а. Формирование пустот тесно связано со способностью «загрязнителя»  $\rho_2(x, y; t)$  блокировать активные участки фронта  $\rho_1(x, y; t)$  и, в принципе, останавливать его рост.

При закрытии поры фронт, как правило, продолжает двигаться в обоих направле-

**Рис. 3.** Типичные пространственные конфигурации суммарной плотности  $\rho(x, y; t) = \rho_1(x, y; t) + \rho_2(x, y; t)$  при соотношении параметров  $C_1$  и  $C_2$ , близком к критическому. Показаны фрагменты системы  $512 \times 512$  вычислительных точек: а) распределение плотности  $\rho(x, y; t)$ , возникающее на промежуточном этапе перехода от однородного роста к фрактальному; б) типичная последовательность роста  $\rho(x, y; t)$  для небольшого фрагмента фронта, показанная для трех характерных моментов времени: при возникновении плотного слоя, при появлении первых древовидных выростов и при закрытии первых внутренних пор в структуре с суммарной плотностью  $\rho(x, y; t)$

ниях. Наружная граница  $\rho_1(x, y; t) \neq 0$ , естественно, практически не чувствует наличие поры, блокированной где-то внутри системы, и продолжает продвигаться вперед. Внутренняя окружающая пору граница  $\rho_1(x, y; t) \neq 0$  качественно аналогична внешней и может двигаться «назад», вплоть до ее полной блокировки участками с  $\rho_2(x, y; t) \neq 0$ .

Сценарий эволюции системы оказывается чрезвычайно многообразным и при незначительном варьировании коэффициентов модели позволяет воспроизводить весьма реалистические конфигурации плотностей  $\rho_1(x, y; t)$  и  $\rho_2(x, y; t)$ . В этом отношении наиболее сильным эффектом сопровождается изменение соотношения между  $C_1$  и  $C_2$ , отражающего возможное различие между локальными скоростями формирования компонент  $\rho_1(x, y; t)$  и  $\rho_2(x, y; t)$  в ходе реакции.

При  $C_2 \gg C_1$  сепаратриса, соединяющая  $\mu_0^*$  и  $\mu_4^*$ , оказывается существенно ниже большинства фазовых траекторий, и в стационарном пределе большая часть плоскости  $(x, y)$  упорядочивается так, что  $\rho_1(x, y; t) \rightarrow 0$ ;  $\rho_2(x, y; t) \rightarrow 1$ . При этом активные участки фронта быстро загрязняются слоем плотности  $\rho_2(x, y) = 1$ , и рост прекращается. Очевидно, что в обратном пределе,  $C_2 \ll C_1$ , фронт движется неограниченно далеко. Имеется критическое,  $v_{cr} = (C_2/C_1)_{cr}$ , соотношение между  $C_2$  и  $C_1$ , впервые приводящее к блокировке фронта. Численный эксперимент показывает, что это отношение близко к единице и составляет  $v \approx 1.03$ .

При  $v \rightarrow v_{cr}$  рост фронта прекращается, из-за того что доля пространства  $(x, y)$ , где  $\rho_1(x, y; t) \neq 0$ , оказывается «слишком малой». Количественно ее можно охарактеризовать, вычислив средние по всему образцу значения обеих плотностей  $\rho_{1,2}(x, y; t)$ :

$$h_{1,2}(t) \equiv \langle \langle \rho_{1,2}(x, y; t) \rangle \rangle = \left\langle \left\langle \int_{\Omega} dx dy \rho_{1,2}(x, y; t) \right\rangle \right\rangle, \quad (24)$$

полную среднюю плотность  $h = h_1 + h_2$  и отношения между ними:  $h_{1,2}/h$ . Эволюция во времени суммарных плотностей  $h_{1,2}$  и  $h$  при  $v \rightarrow v_{cr}$  сопровождается изменением соотношения между величинами  $h_j$  при переходе от начального режима (при котором  $h_1 > h_2$ ) к стационарному при  $t \rightarrow \infty$ , обусловленным преимущественным ростом компоненты  $\rho_2(x, y; t)$ .

Следует отметить, что из-за роста характерных размеров структур со временем и конечности массивов флуктуации  $\delta h_{1,2}(t)$  для конкретной реализации численного эксперимента становятся ощутимыми на фоне средних  $h_{1,2}(t)$  при  $t \gg 1$ . Монотонные асимптотические кривые  $h_{1,2}(t)$  получаются усреднением результатов по нескольким (порядка 10) реализациям. Такое усреднение в формуле (24) обозначено двойными скобками  $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ .

Выполненные таким образом расчеты показывают, что рост фронта прекращается при  $h_1/h \simeq 1/3$ ;  $h_{1,2}/h \simeq 2/3$ . Эти соотношения выглядят достаточно «универсально» и, по-видимому, обусловлены универсальными же закономерностями «протекания» по непрерывному кластеру  $\rho_1(x, y; t) \neq 0$ . Однако выяснение возможной связи свойств модели с теорией протекания представляет собой самостоятельную проблему и выходит за рамки этой работы.

Весьма трудоемким является также исследование фрактальных свойств структур, формируемых в рамках модели. Наличие взаимодействующих подсистем и нескольких масштабов длины в исходных уравнениях может, в принципе, приводить к переменному во времени или мультифрактальному поведению решений [25]. Кроме того, для континуальной модели даже статическое распределение плотностей  $\rho_{1,2}(x, y; t \rightarrow \infty)$  глубоко

позади фронта содержит переменные в пространстве значения  $0 \leq \rho_{1,2}(x, t) \leq 1$ , что вносит произвол в определение фрактальных размерностей.

Имея в виду уже зафиксированное выше определение средних:

$$h_{1,2}(t)/\Omega \equiv \langle \langle \langle \rho_{1,2}(x, y; t) \rangle \rangle \rangle = \left\langle \left\langle \int_{\Omega} dx dy \rho_{1,2}(x, y; t) / \Omega \right\rangle \right\rangle,$$

а также учитывая, что за исключением окрестностей межфазных границ плотности  $\rho_{1,2}(x, y; t \rightarrow \infty)$  близки к постоянным  $\rho_{1,2}(x, y) = 0$  или 1, определим ширину этих границ для каждой из компонент посредством следующих соотношений для парциальных плотностей  $\rho_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}(t) &= \left\langle \left\langle \left\{ \int_{\Omega} dx dy \left[ \rho_{1,2}(x, y; t) - \int_{\Omega} dx dy \rho_{1,2}(x, y; t) / \Omega \right]^2 / \Omega \right\}^{1/2} \right\rangle \right\rangle \equiv \\ &\equiv \left\langle \left\langle \left\{ \langle [\rho_{1,2}(x, y; t) - h_{1,2}(t)/\Omega]^2 \rangle / \Omega \right\}^{1/2} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

и для суммарной плотности  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \left\langle \left\langle \left\{ \int_{\Omega} dx dy \left[ \rho(x, y; t) - \int_{\Omega} dx dy \rho(x, y; t) / \Omega \right]^2 / \Omega \right\}^{1/2} \right\rangle \right\rangle \equiv \\ &\equiv \left\langle \left\langle \left\{ \langle [\rho(x, y; t) - h(t)/\Omega]^2 \rangle / \Omega \right\}^{1/2} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначенное двойными скобками  $\langle \langle \dots \rangle \rangle$  усреднение по множеству реализаций здесь необходимо по тем же причинам, что и при вычислении  $h_{1,2}(t)$ .

На рис. 4 поведение функций  $\sigma(t)$  показано в двойном логарифмическом масштабе для двух характерных случаев,  $v \leq 1 < v_{cr}$  и  $v \cong v_{cr}$ . В обоих случаях после начального переходного процесса наблюдается выход при  $t \rightarrow \infty$  на скейлинговое поведение

$$\sigma(t) \sim t^{\alpha} \quad (27)$$

с показателями  $\alpha = 0.75$  для  $v \leq 1 < v_{cr}$  и  $\alpha = 0.5$  для  $v \cong v_{cr}$ .

Причина уменьшения индекса  $\alpha$  до  $\alpha = 0.5$  при  $v \rightarrow v_{cr}$  состоит в том, что активные участки фронта быстро загрязняются участками с  $\rho_2(x, y) = 1$ , где увеличение обеих плотностей  $\rho_{1,2}(x, y)$  постепенно прекращается. В результате имеет место более быстрое, чем при  $v \leq 1 < v_{cr}$ , нарастание ширины:

$$\sigma(t) = \left\langle \left\langle \left\{ \langle [\rho(x, y; t) - h(t)/\Omega]^2 \rangle / \Omega \right\}^{1/2} \right\rangle \right\rangle$$

на раннем этапе с последующим его замедлением в скейлинговом пределе  $t \rightarrow \infty$ .

В обратном пределе,  $v \ll v_{cr}$  фронт движется неограниченно далеко, а области с плотностью  $\rho_2(x, y)$  практически не участвует в формировании его ширины  $\sigma(t)$ . При

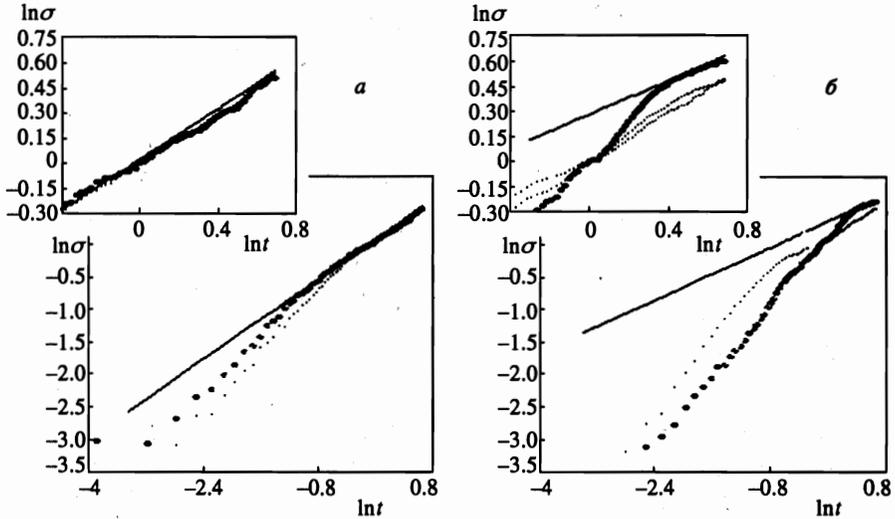


Рис. 4. Построение функций  $\ln[\sigma(\ln(t))]$  для определения фрактальной размерности фронта: а) для докритического режима  $v \leq 1 < v_{cr}$ ; б) для режима близкого к критическому  $v \simeq v_{cr}$ . Жирные точки соответствуют  $\sigma$ , а маленькие —  $\sigma_{1,2}$

этом модель вырождается в модель Эдена, имеющую индекс  $\alpha = 1/3$  [5, 6]. Таким образом, описанная в настоящей работе модель приводит к максимально сильной изрезанности фронта в промежуточной области параметра  $v \leq 1 < v_{cr}$ , где эффект взаимодействия плотностей  $\rho_1(x, y)$  и  $\rho_2(x, y)$  выражен наиболее ярко.

То, что система (17) вырождается в однокомпонентную модель в пределе  $v \ll v_{cr}$ , когда генерация одной из плотностей  $\rho_2(x, y)$  незначительна, дает достаточно очевидную ее проверку. В то же время (также, как это имеет место и в теории критических явлений при фазовых переходах) более низкая симметрия системы со взаимодействующими полями делает ее неустойчивой по отношению к уходу из класса (универсальности) скалярной модели. Аналогичная неустойчивость связана и с понижением симметрии пропагатора при учете нелокальностей.

Все это — формальные причины изменения скейлингового поведения функции  $\sigma$ . При этом остается открытым вопрос о том, в какой мере величина индекса  $\alpha$  зависит от структуры конкретных слагаемых уравнений (17). Исследование и перечисление классов универсальности таких моделей является важным и интересным вопросом, который, однако, выходит за рамки одной статьи, посвященной прежде всего построению «работающей» двухкомпонентной модели, устойчиво воспроизводящей рост рыхлых приповерхностных слоев с порами и масштабно-инвариантной структурой.

Автор благодарит Ж.-П. Бадиали (J.-P. Badiali) и В. Руссиера (V. Russier) за то, что они привлекли его внимание к данной проблеме, а также за гостеприимство в Университете Пьера и Марии Кюри (Париж-VI) и многочисленные интенсивные дискуссии, благодаря которым модель приобрела свою настоящую форму.

Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины Ф4/72-97 (проект № 2.4/199) и международной программой INTAS 96-0410.

## Литература

1. L. Balazs, Phys. Rev. E **54**, 1183 (1996).
2. V. Fleury and D. Barkey, Europhys. Lett. **36**, 253 (1996).
3. T. I. Evans, T. V. Nguyen, and R. E. White, J. Electrochem. Soc. **136**, 329 (1989).
4. I. Nainville, A. Lemarchand, and J. P. Badiali, Phys. Rev. E **53**, 2537 (1996).
5. G. Parisi and Zhang Yi-Cheng, J. Stat. Phys. **41**, 1 (1985).
6. M. Eden, in *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. by J. Neyman, University of California Press, Berkeley (1961), vol. IV, p. 223.
7. Л. Д. Ландау, И. М. Халатников, *Сборник трудов Л. Д. Ландау*, т. 2, Наука, Москва (1969), с. 218.
8. J. W. Cahn, Acta Metal. **8**, 554 (1960).
9. A. Mazor and A. R. Bishop, Physica D **39**, 22 (1989).
10. F. Falk, Z. Phys. B **54**, 159 (1984).
11. F. Falk, J. Phys. C: Solid State Phys. **20**, 2501 (1987).
12. Ch. Zhulicke, A. S. Mikhailov, and L. Scimansky-Geller, Physica A **163**, 559 (1990).
13. A. Gordon, Phys. Lett. A **154**, 79 (1991).
14. T. M. Rogers, K. R. Elder, and R. C. Desai, Phys. Rev. B **37**, 9638 (1988).
15. K. R. Elder and R. C. Desai, Phys. Rev. B **40**, 243 (1989).
16. Ю. Е. Кузовлев, Т. К. Соболева, А. Э. Филиппов, ЖЭТФ **103**, 1742 (1993).
17. А. Е. Филиппов, J. Stat. Phys. **75**, 241 (1994).
18. А. С. Зельцер, А. Э. Филиппов, ЖЭТФ **106**, 1117 (1994).
19. А. С. Зельцер, Т. К. Соболева, А. Э. Филиппов, ЖЭТФ **108**, 356 (1995).
20. А. С. Зельцер, А. Э. Филиппов, Письма в ЖЭТФ **62**, 604 (1995).
21. Yu. Tu, G. Grinstein, and M. A. Munoz, Phys. Rev. Lett. **78**, 274 (1997).
22. J. Garsia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J. M. Sancho, Phys. Rev. Lett. **71**, 1542 (1993).
23. A. Becker and L. Kramer, Phys. Rev. Lett. **73**, 955 (1994).
24. G. Grinstein, M. A. Munoz, and Yu. Tu, Phys. Rev. Lett. **76**, 4376 (1996).
25. F. J. Solis and L. Tao, Phys. Lett. A **228**, 351 (1997).