ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 4(10), стр. 1188–1201

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ С АНИЗОТРОПНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

О. В. Багацкая, Н. П. Жук*, С. Н. Шульга**

Харьковский государственный университет
310077, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 20 августа 1997 г.

Методом замены полевых переменных в билокальном приближении найдена эффективная диэлектрическая проницаемость двухфазной композитной случайной среды в виде ансамбля малых произвольно анизотропных сферических включений, распределенных в изотропной матрице. В качестве иллюстрации рассчитано затухание плоских волн среднего поля в такой среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое описание материальных сред, призванное передать неупорядоченное пространственно-временное строение реальной среды и хаотическое изменение ее свойств от точки к точке или с течением времени, широко применяется в теории распространения электромагнитных волн в турбулентной ионосфере [1], СВЧ-зондировании твердых земных покровов [2, 3], радиоволновом контроле полимерных композитных материалов [4, 5], анализе электромагнитных свойств поликристаллов [6, 7] и теории искусственных сред [8, 9]. Во всех перечисленных приложениях электромагнитная анизотропия относится к числу характерных особенностей среды распространения.

Как известно [10–13], прохождение статистически среднего поля сквозь случайную среду, испытывающую хаотические пространственные вариации свойств, описывается уравнениями, которые характерны для некоторой детерминированной среды, наделенной пространственной дисперсией. Материальные параметры упомянутой детерминированной, или эффективной, среды характеризуют свойства случайной среды по отношению к среднему полю и называются эффективными параметрами последней.

Метод вычисления эффективной диэлектрической проницаемости среды с флуктуациями диэлектрической проницаемости был предложен в работе [6]. Отметим, что он был «переоткрыт» в более поздних работах [14, 15], хотя до этого применялся в работах [6, 16, 17]. Имея в виду направление нашего исследования, связанное с учетом влияния электромагнитной анизотропии среды на распространение и рассеяние электромагнитных волн, уместно отметить работы [18–22], где методом [6] найдена и исследована эффективная диэлектрическая проницаемость одноосной [18–20] и гиротропной [21, 22] случайных сред, тензоры проницаемости которых в некоторой системе координат имеют вид, свойственный одноосному кристаллу или магнитоактивной плазме, и характеризуются соответственно тремя (диагональными) или пятью (тремя диагональными и двумя внедиагональными) ненулевыми компонентами.

*E-mail: staff@univer.kharkov.ua

Обсуждаемый метод расчета эффективной диэлектрической проницаемости можно назвать «обычной» теорией многократного рассеяния для электромагнитного поля — «обычной» в смысле аналогии с теорией многократного рассеяния для скалярного (звукового) поля в случайной среде [10–13]. В рамках этого метода эффективная диэлектрическая проницаемость представляется в виде разложения по степеням параметра, который для звукового поля оказывается малым и в случае сильных флуктуаций свойств среды, если они мелкомасштабные [10–13]. Для электромагнитного поля характерный параметр этой теории из-за наличия сильной (типа дельта-функции) особенности электрической функции Грина в точке источника [23, 24] оказывается пропорциональным интенсивности флуктуаций [25, 26]. Укажем для полноты, что билокальное приближение как таковое было введено в [27, 28] при нахождении эффективных параметров микронеоднородной упругой среды.

Для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости сред с сильными флуктуациями свойств применяется метод замены полевых переменных (или перенормировки), который был предложен в работах [29, 30] и далее развит в [31–43]. Он основан на отщеплении от электрической матричной функции Грина сингулярной (типа дельта-функции) составляющей и переходе к уравнениям относительно новой полевой переменной, для которой функция Грина совпадает с регулярной частью электрической матричной функции Грина. (Сингулярную и регулярную части электрической функции Грина можно и удобно трактовать как обобщенные функции, которые порождены соответственно неубывающей и исчезающей на бесконечности частями спектральной матричной функции Грина [31, 39, 44].) Рассматриваемый метод, как и предыдущий подход, не дает простых и одновременно точных выражений для эффективной диэлектрической проницаемости — последняя по-прежнему представляется в виде ряда теории возмущений, однако в данном случае теория возмущений использует характерный параметр, который остается малым и при сильных флуктуациях материальных свойств при условии, что их пространственный масштаб достаточно мал [31, 32, 35].

В связи с нашим интересом к случайным средам с электромагнитной анизотропией отметим, что метод замены полевых переменных применялся к вычислению эффективной диэлектрической проницаемости электрически изотропной случайной среды с анизомерными возмущениями и фиксированной [32, 35] либо случайной [38] ориентацией осей статистической симметрии, гиротропной среды типа магнитоактивной плазмы [31] или вращающейся среды [37], а также произвольно-анизотропной случайной среды как с фиксированным, так и случайным направлением осей статистической симметрии [39]. Далее, результаты работы [39] непосредственно применимы лишь к использованной там модели сплошной случайной среды, а другая, каноническая, модель, а именно дискретная случайная среда, осталась вне поля зрения автора работы [39]. Между тем дискретную случайную среду с помощью известной техники [45, 46] можно включить в круг моделей, поддающихся анализу методом замены полевых переменных. Отсюда естественно вытекает цель данной работы — расчет эффективной диэлектрической проницаемости микронеоднородного композита, представляющего собой распределение малых анизотропных частиц в изотропной среде, и исследование диссипативных свойств такого композита.

Ниже мы, используя результаты работ [29–39], описываем метод расчета эффективной диэлектрической проницаемости статистически-однородной сплошной случайной среды с произвольной анизотропией электрических и статистических свойств и сильными, но мелкомасштабными (в сравнении с длиной волны) флуктуациями. Далее эта методика применяется к модели дискретной случайной среды, полученной равномерным распределением хаотически ориентированных малоразмерных сферических включений из произвольно-анизотропного однородного диэлектрика в изотропной матрице. В результате нами найдена эффективная диэлектрическая проницаемость упомянутого выше двухфазного композита. Полученные выражения можно рассматривать как обобщение аналогичных соотношений работы [45], относящихся к электрически изотропным включениям. Пользуясь найденным выражением для эффективной диэлектрической проницаемости, для случайного композита без диссипативных потерь с помощью техники контурного интегрирования мы рассчитали вещественную и мнимую части этой величины, и вычислили «дифракционную» поправку к постоянным распространения среднего поля. Мнимая часть этой поправки описывает затухание среднего поля за счет рассеяния на случайных включениях.

2. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПОЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

2.1. Постановка задачи об эффективной диэлектрической проницаемости

Рассмотрим уравнения

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_r - k_0^2\hat{\varepsilon}^{(r)}\mathbf{E}_r = \frac{4\pi i k_0}{c}\mathbf{J}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{ik_0}\mathrm{rot}\mathbf{E}_r \tag{2}$$

для случайного электромагнитного поля $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_r$, создаваемого сторонними электрическими источниками $\mathbf{J}$ в безграничной диэлектрической среде с проницаемостью $\hat{\varepsilon}^{(r)}$. Далее считается, что тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{(r)}$ рассматриваемой среды имеет все девять компонент $\varepsilon_{mn}^{(r)}$, которые являются случайными функциями радиус-вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Оператор эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{(e)}$ определяется с помощью тождества [25, 26]

$$\langle\hat{\varepsilon}^{(r)}\mathbf{E}_r(\mathbf{x})\rangle \equiv \hat{\varepsilon}^{(e)}\langle\mathbf{E}_r(\mathbf{x})\rangle. \tag{3}$$

Имея в распоряжении названный оператор, можно легко показать из (1), (2), что возбуждение среднего поля описывается уравнениями

$$\mathrm{rotrot}\langle\mathbf{E}_r\rangle - k_0^2\hat{\varepsilon}^{(e)}\langle\mathbf{E}_r\rangle = \frac{4\pi i k_0}{c}\mathbf{J}, \tag{4}$$

$$\langle\mathbf{H}_r\rangle = \frac{1}{ik_0}\mathrm{rot}\langle\mathbf{E}_r\rangle, \tag{5}$$

которые свойственны пространственно-диспергирующей среде с нелокальной диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^{(e)}$.

В статистически-однородной среде сторонние источники в форме пространственной гармоники,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}, \tag{6}$$

возбуждают среднее поле такого же вида [39]:

$$\langle \mathbf{E}_r(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}, \qquad \langle \mathbf{H}_r(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{H}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — произвольно заданный трехмерный волновой вектор, а $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{k})$, $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ — векторные амплитуды соответственно источников и электромагнитного поля.

Действуя на вектор среднего электрического поля оператором $\hat{\varepsilon}^{(e)}$, получим

$$\hat{\varepsilon}^{(e)} \langle \mathbf{E}_r(\mathbf{x}) \rangle = e^{i\mathbf{kx}} \hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{k}), \tag{8}$$

где $\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор эффективной диэлектрической проницаемости в спектральной области, зависимость которого от ω и $\mathbf{k}$ указывает на частотную и пространственную дисперсии эффективной среды. Характерный масштаб Δk изменения этого тензора как функции спектрального параметра $\mathbf{k}$ равен по порядку величины $1/L$, где L — интервал корреляции возмущений среды. Отсюда и из (8) следует, что в длинноволновом режиме, когда $kL \ll 1$ (или, что то же, для мелкомасштабных возмущений), свойства случайной среды по отношению к среднему полю в виде пространственной гармоники (7) или суперпозиции таких гармоник описываются тензором эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{(e)}$ [25, 26, 39]:

$$\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega) = \lim_{k \to 0} \hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega, \mathbf{k}). \tag{9}$$

Построение тензора эффективной диэлектрической проницаемости среды с мелкомасштабными возмущениями составляет важнейшую задачу теории многократного рассеяния электромагнитных волн в случайной среде.

2.2. Перенормированное уравнение рассеяния

На первом этапе построения тензора эффективной диэлектрической проницаемости мы, согласно известной схеме [35, 36, 39], преобразуем стохастическое дифференциальное уравнение (1) в интегральное уравнение относительно новой полевой переменной $\mathbf{F}$. Для этого мы вводим в рассмотрение анизотропную эталонную среду, или среду сравнения, которая заполняет все пространство и характеризуется постоянным детерминированным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. (Этот тензор определяется ниже как решение уравнения (23).) Пусть $\mathbf{E}_b(\mathbf{x})$ — электрический вектор поля, которое возбуждается сторонними источниками $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ в эталонной среде, а $\hat{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ — электрическая матричная функция Грина указанной среды. Для наших целей функцию Грина можно считать заданной обратным преобразованием Фурье:

$$\hat{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = (2\pi)^{-3} \int d^3k \, \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]\hat{G}(\mathbf{k}), \tag{10}$$

где $\hat{G}(\mathbf{k})$ — спектральная функция Грина, которая находится из уравнения

$$[\,\mathbf{k}[\,\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k})]\,] + k_0^2 \hat{\varepsilon} \hat{G}(\mathbf{k}) = -\hat{I} \tag{11}$$

($\hat{I}$ — единичная матрица). Заметим, что особенности (полюсы) подынтегрального выражения в (10), которые совпадают с нулями функции $\Delta(\mathbf{k})$ из (16), считаются лежащими в комплексной плоскости благодаря диссипативным потерям (возможно, исчезающе малым) в эталонной среде. Такая же трактовка, если не оговорено иное, применяется и ко всем последующим интегралам, например (30), подынтегральные выражения которых имеют неинтегрируемые особенности.

С помощью функции Грина $\hat{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ дифференциальное уравнение (1) стандартным образом заменяется интегральным уравнением

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_b(\mathbf{x}) + k_0^2 \int d^3x' \, \hat{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \, [\hat{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{x}') - \hat{\varepsilon}]\mathbf{E}_r(\mathbf{x}'). \tag{12}$$

Решение уравнения (11) в бескоординатной форме [47] выглядит так:

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = -\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}{k_0^2\zeta(\mathbf{k})} + \hat{G}^{(1)}(\mathbf{k}). \tag{13}$$

Здесь и далее произведение векторов с точкой представляет собой тензор простейшего вида, а именно для вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1k_1 & k_1k_2 & k_1k_3 \\ k_2k_1 & k_2k_2 & k_2k_3 \\ k_3k_1 & k_3k_2 & k_3k_3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{D}(\mathbf{k})}{\zeta(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k})}, \tag{14}$$

$$\hat{D}(\mathbf{k}) = (\zeta\hat{I} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\hat{\varepsilon})(\zeta\hat{I} - \hat{\varepsilon}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) + k_0^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\det\hat{\varepsilon} - \zeta\,\mathrm{adj}\,\hat{\varepsilon}), \tag{15}$$

$$\Delta(\mathbf{k}) = k^2\zeta + k_0^2(\mathbf{k}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}\mathbf{k} - \zeta\,\mathrm{Tr}\,\hat{\varepsilon}) + k_0^4\det\hat{\varepsilon}, \tag{16}$$

$$\zeta(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\hat{\varepsilon}\mathbf{k}. \tag{17}$$

В этих выражениях $\det\hat{\varepsilon}$ и $\mathrm{adj}\,\hat{\varepsilon}$ означают, соответственно, детерминант матрицы $\hat{\varepsilon}$ и матрицу, присоединенную к $\hat{\varepsilon}$ [47].

Введем теперь (постоянную) матрицу перенормировки $\hat{S}$, которая определена ниже уравнением (31), и зададим спектральную функцию $\hat{G}^{(2)}(\mathbf{k})$ согласно выражению

$$\hat{G}^{(2)}(\mathbf{k}) = \hat{G}(\mathbf{k}) + \frac{\hat{S}}{k_0^2} = -\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}{k_0^2\zeta(\mathbf{k})} + \frac{\hat{S}}{k_0^2} + \hat{G}^{(1)}(\mathbf{k}), \tag{18}$$

а соответствующий ей пространственный образ Фурье как

$$\hat{G}^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \hat{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{\hat{S}}{k_0^2}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{19}$$

где $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ — трехмерная дельта-функция Дирака. Подставляя (19) в (12), после несложных алгебраических преобразований имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_b(\mathbf{x}) + k_0^2 \int d^3x' \, \hat{G}^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\xi}(\mathbf{x}')\mathbf{F}(\mathbf{x}'), \tag{20}$$

где

$$\mathbf{F} = [\hat{I} + \hat{S}(\hat{\varepsilon}^{(r)} - \hat{\varepsilon})]\mathbf{E}_r, \tag{21}$$

$$\hat{\xi} = (\hat{\varepsilon}^{(r)} - \hat{\varepsilon})\,[\hat{I} + \hat{S}(\hat{\varepsilon}^{(r)} - \hat{\varepsilon})]^{-1}. \tag{22}$$

Соотношение (20) является искомым интегральным уравнением для новой полевой переменной $\mathbf{F}$ со случайным возмущением $\hat{\xi}$. При $\hat{S} = 0$ это соотношение переходит, очевидно, в исходное уравнение (12).

Чтобы обеспечить малость случайного возмущения $\hat{\xi}$ по крайней мере в среднем, наложим требование $\langle\hat{\xi}\rangle = 0$, которое в силу (22) преобразуется к виду [39]

$$\langle(\hat{\varepsilon}^{(r)} - \hat{\varepsilon})\,[\hat{I} + \hat{S}(\hat{\varepsilon}^{(r)} - \hat{\varepsilon})]^{-1}\rangle = 0. \tag{23}$$

Из последующего уравнения (34) вытекает, что $\hat{S} \equiv \hat{S}(\hat{\varepsilon})$. Поэтому (23), по сути, представляет собой уравнение для определения диэлектрического тензора эталонной среды $\hat{\varepsilon}$.

2.3. Оператор эффективных возмущений и эффективная диэлектрическая проницаемость

Итерируя и усредняя в билокальном приближении [6, 14, 15] уравнение (20), получаем

$$\langle\mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle = \mathbf{E}_b(\mathbf{x}) + k_0^2 \iint d^3x'\,d^3x''\,\hat{G}^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\xi}^{(e)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')\langle\mathbf{F}(\mathbf{x}'')\rangle, \tag{24}$$

где

$$\hat{\xi}^{(e)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'') = k_0^2\langle\hat{\xi}(\mathbf{x}')\hat{G}^{(2)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')\hat{\xi}(\mathbf{x}'')\rangle. \tag{25}$$

Сопоставляя (24) с усредненной версией уравнения (20), имеем

$$\langle\hat{\xi}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle \equiv \hat{\xi}^{(e)}\langle\mathbf{F}(\mathbf{x})\rangle, \tag{26}$$

где $\hat{\xi}^{(e)}$ — действующий по $\mathbf{x}$ интегральный оператор с ядром $\hat{\xi}^{(e)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. Учитывая (8), из уравнений (21) и (22) можно получить

$$\langle\mathbf{F}\rangle = [\hat{I} + \hat{S}(\hat{\varepsilon}^{(e)} - \hat{\varepsilon})]\langle\mathbf{E}_r\rangle, \qquad \langle\hat{\xi}\mathbf{F}\rangle = (\hat{\varepsilon}^{(e)} - \hat{\varepsilon})\langle\mathbf{E}_r\rangle. \tag{27}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (26) приводит к соотношению, которое связывает операторы $\hat{\varepsilon}^{(e)}$ и $\hat{\xi}^{(e)}$. В спектральной области это соотношение преобразуется к виду

$$\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega,\mathbf{k}) - \hat{\varepsilon} = \hat{\xi}^{(e)}(\omega,\mathbf{k}) + \hat{\xi}^{(e)}(\omega,\mathbf{k})\hat{S}\,[\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega,\mathbf{k}) - \hat{\varepsilon}], \tag{28}$$

где $\hat{\xi}^{(e)}(\omega,\mathbf{k})$ — фурье-образ величины $\hat{\xi}^{(e)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. В длинноволновом приближении (при $k \to 0$) отсюда находим

$$\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega) - \hat{\varepsilon} = \hat{\xi}^{(e)}(\omega) + \hat{\xi}^{(e)}(\omega)\hat{S}\,[\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega) - \hat{\varepsilon}]. \tag{29}$$

Элементы матрицы $\hat{\xi}^{(e)}(\omega) \equiv \lim\limits_{k\to 0}\hat{\xi}^{(e)}(\omega,\mathbf{k})$ определяются из (18), (25) соотношением

$$\xi^{(e)}_{mn}(\omega) = \int d^3k\, B_{mpqn}(\mathbf{k}) \left[-\frac{k_p k_q}{\zeta(\mathbf{k})} + S_{pq} + k_0^2 G^{(1)}_{pq}(\mathbf{k}) \right], \tag{30}$$

которое содержит спектральные функции $B_{mpqn}(\mathbf{k})$ случайного возмущения $\hat{\xi}(\mathbf{x})$:

$$B_{mpqn}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x\, \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')] C_{mpqn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{31}$$

Здесь

$$C_{mpqn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \equiv \langle \xi_{mp}(\mathbf{x}) \xi_{qn}(\mathbf{x}') \rangle \tag{32}$$

— корреляционные функции случайных возмущений ξ_{mn}. Для дальнейших целей значение корреляционной функции (32) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ удобно обозначить как

$$\Gamma_{mpqn} = \int d^3k\, B_{mpqn}(\mathbf{k}). \tag{33}$$

Имея в своем распоряжении $\hat{\xi}^{(e)}(\omega)$, мы теперь в состоянии определить тензор эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega)$ как решение уравнения (29). Чтобы обеспечить применимость возникающих выражений к случаю сильных флуктуаций, матрицу $\hat{S}$ целесообразно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma_{mpqn} S_{pq} = \int d^3k\, B_{mpqn}(\mathbf{k}) \frac{k_p k_q}{\zeta(\mathbf{k})}. \tag{34}$$

Это — система девяти уравнений для определения девяти неизвестных величин S_{pq} как функций ε_{mn}. Чтобы получить уравнение для неизвестных ε_{mn}, выражения $S_{pq} = S_{pq}(\hat{\varepsilon})$ подставляются в (23). Согласно (22), (31)–(33), величины Γ_{mpqn}, B_{mpqn} связаны с неизвестными S_{pq} через ξ_{mn}. Следовательно, уравнения (34) в общем случае нелинейны относительно S_{pq}. Принимая во внимание уравнения (34), из (30) и (14) получаем итоговое выражение для $\xi^{(e)}_{mn}$:

$$\xi^{(e)}_{mn}(\omega) = k_0^2 \int d^3k\, B_{mpqn}(\mathbf{k}) \frac{D_{pq}(\mathbf{k})}{\zeta(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k})}. \tag{35}$$

Полагая величины $\xi^{(e)}_{mn}(\omega)$ малыми (условие, при котором это предположение выполняется, проанализировано ниже), приближенное решение методом возмущений уравнения (29) относительно $\varepsilon^{(e)}_{mn}(\omega)$ — компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости — получается следующим:

$$\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega) = \hat{\varepsilon} + \hat{\xi}^{(e)}(\omega). \tag{36}$$

Эта формула в сочетании с (35) и дает ответ на вопрос об эффективной проницаемости случайной анизотропной среды.

Когда частотной дисперсией в случайной среде можно пренебречь, последний член справа в (36), согласно (35), стремится к нулю с уменьшением частоты как ω^2, а первый член — проницаемость эталонной среды — остается неизменным. Поэтому проницаемость эталонной среды $\hat{\varepsilon}$ можно рассматривать как значение эффективной диэлектрической проницаемости случайной среды в статическом пределе, а добавка $\hat{\xi}^{(e)}(\omega)$ представляет «дифракционный» вклад в эту величину за счет рассеяния поля на случайных возмущениях [25, 35].

2.4. Сильные возмущения свойств среды

Пределы применимости полученных здесь результатов легко установить [35], предварительно выяснив, разложение по какому именно параметру фактически использовано нами при вычислении эффективной диэлектрической проницаемости, и потребовав, чтобы выявленный параметр был малым. Последнее будет гарантировать законность обрыва упомянутого разложения на первых двух членах, представленных в правой части формулы (36). Для нахождения интересующего нас параметра теории возмущений достаточно оценить отношение любых двух последующих членов разложения — например, тех, которые фигурируют справа в (36). Для вывода соответствующей оценки удобно ввести в рассмотрение детерминированную положительную величину σ_ε, которая равна характерной величине флуктуаций диэлектрической проницаемости. Тогда можно приближенно положить $B_{mpqn}(\mathbf{k}) \sim \sigma_\varepsilon^2 L^3$ при $k < 1/L$ и $B_{mpqn}(\mathbf{k}) \approx 0$ при $k > 1/L$, где L — характерный пространственный масштаб флуктуаций. Согласно предыдущему, область интегрирования в формуле (35) ограничена сферой $k < 1/L$, и поэтому характерное значение переменной интегрирования k равно $1/L$. Это значение для мелкомасштабных возмущений ($k_0L \ll 1$) намного превосходит величину k_0, которой в подынтегральном выражении в (36) можно пренебречь в сравнении с большой величиной $k \sim 1/L$. Результирующий интеграл по порядку величины будет равен $\sigma_\varepsilon^2(k_0L)^2$. С учетом того что порядок первого члена в правой части (36) в масштабе параметров σ_ε и k_0L равен единице, отношение последнего члена к предыдущему в (36) оказывается примерно равным $\sigma_\varepsilon^2(k_0L)^2$. Следовательно, правая часть в (36) представляет собой отрезок разложения по степеням найденного параметра, и малость именно этого параметра,

$$\sigma_\varepsilon^2(k_0L)^2 \ll 1, \tag{37}$$

гарантирует правомерность обрыва ряда теории возмущений на конечном числе членов — конкретно, на первых двух членах, как это сделано в (36). Примечательная особенность критерия (37) заключается в том, что он указывает на применимость выражений (35) и (36) к случаю сильных флуктуаций свойств ($\sigma_\varepsilon \gg 1$) при условии, что они будут достаточно мелкомасштабными ($k_0L \ll \sigma_\varepsilon^{-1} \ll 1$.) Эта положительная особенность метода замены полевых переменных хорошо известна [25, 26, 35].

В заключение отметим, что для частного случая статистически-изомерных возмущений матрица перенормировки S_{pq} может быть найдена из (34) явным образом [25, 26, 39]. С этой целью учтем, что корреляционные функции изомерных возмущений (32) зависят [12] только от расстояния

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \tag{38}$$

между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, а спектральные функции (31) — только от модуля k спектрального параметра $\mathbf{k}$. Подставив в (34) выражение для Γ_{mpqn} из (33) и перейдя к интегрированию в сферических координатах k, θ, φ, уравнение (34) можно записать в виде

$$\int_0^\infty dk\, k^2 B_{mpqn}(\mathbf{k}) \left[4\pi S_{pq} - \int d\Omega\, \frac{n_p n_q}{\mathbf{n}\hat{\varepsilon}\mathbf{n}}\right] = 0, \tag{39}$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$ — элемент телесного угла, а $n_p = k_p/k$ — p-я компонента единичного вектора вдоль вектора $\mathbf{k}$. Решение уравнения (39) относительно S_{pq} находится в явном виде:

$$S_{pq} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \, \frac{n_p n_q}{\mathbf{n}\hat{\varepsilon}\mathbf{n}}. \tag{40}$$

Отсюда видно, что $S_{pq} = S_{qp}$, т. е. в исследуемом случае матрица перенормировки симметрична: $\hat{S}^{\mathrm{T}} = \hat{S}$, где индекс «$T$» обозначает операцию транспонирования.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ДВУХФАЗНОГО КОМПОЗИТА

3.1. Описание модели

Применим аппарат предыдущего раздела к анализу дискретной случайной среды, которая получается путем погружения статистического ансамбля идентичных однородных анизотропных включений в однородную изотропную вмещающую среду — матрицу. Диэлектрическая проницаемость среды равна $\varepsilon^{(1)}$; тензор диэлектрической проницаемости включения в собственной системе координат, связанной с включением, обозначим как $\hat{\varepsilon}^{(c)}$, а его элементы — через $\varepsilon^{(c)}_{jk}$.

Пусть $\theta^{(r)}(\mathbf{x})$ — индикаторная, или характеристическая функция [46, с. 79] ансамбля случайных включений, которая равна единице, когда $\mathbf{x}$ принадлежит какому-либо включению, и равна нулю для всех остальных $\mathbf{x}$. Включения считаются распределенными в пространстве в среднем равномерно и изотропно, так что концентрация (относительный объем) включений,

$$\langle \theta^{(r)}(\mathbf{x}) \rangle = v_2, \tag{41}$$

не зависит от точки $\mathbf{x}$, а двухточечный момент индикаторной функции,

$$\langle \theta^{(r)}(\mathbf{x}) \theta^{(r)}(\mathbf{x}') \rangle = p(R), \tag{42}$$

зависит только от R. Последнее предположение, очевидно, может быть строго выполнено только для включений сферической формы [45, 46], поэтому включения далее считаются сферическими.

Статистическая топология композита определяется безразмерной бинарной корреляционной функцией [46, с. 74]

$$\varphi(R) = \frac{p(R) - v_2^2}{v_2(1 - v_2)}, \tag{43}$$

фурье-образ которой $\tilde{\varphi}(k)$ определен по аналогии с (31). Отметим, что $\tilde{\varphi}(k)$ как спектральную плотность корреляционной функции $[\theta^{(r)}(\mathbf{x}) - v_2^2]/\sqrt{v_2(1 - v_2)}$ вещественного случайного процесса принимает для вещественных k вещественные неотрицательные значения [10].

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{(r)}(\mathbf{x})$ случайной среды в лабораторной (абсолютной) системе координат x_1, x_2, x_3 задаются следующими выражениями:

$$\varepsilon^{(r)}_{lm}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{(1)} \, \delta_{lm}, \tag{44}$$

если $\mathbf{x}$ находится во вмещающей среде, и

$$\varepsilon_{lm}^{(r)}(\mathbf{x}) = \alpha_{lj}^{(r)}\,\alpha_{mk}^{(r)}\,\varepsilon_{jk}^{(c)} \tag{45}$$

в пределах включения. В этих формулах δ_{lm} — символ Кронекера, а α_{lm} — косинус угла между l-ой осью лабораторной системы координат и m-ой осью собственной системы координат отдельного включения (случайная величина). Хотя все включения считаются идентичными, они отличаются друг от друга местоположением и ориентацией. Мы считаем, что все возможные ориентации включений равновероятны и что для отдельно взятого включения его ориентация не зависит от его местоположения, а также от ориентации и местоположения любого другого включения.

Для рассматриваемой модели дискретной случайной среды эталонную среду логично выбрать электрически изотропной со скалярной диэлектрической проницаемостью ε. К этому можно было бы с необходимостью прийти и из анализа уравнений (23) и (40). Из последнего уравнения вытекает, что матрица перенормировки $\hat{S}$ пропорциональна единичной матрице:

$$\hat{S} = \frac{1}{3\varepsilon}\,\hat{I}. \tag{46}$$

С учетом этого матрица случайных возмущений (22) в пределах изотропной среды-матрицы также оказывается пропорциональной единичной матрице:

$$\hat{\xi}(\mathbf{x}) = \xi^{(1)}\,\hat{I}, \tag{47}$$

где

$$\xi^{(1)} = 3\varepsilon\,\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon^{(1)}}. \tag{48}$$

Если же точка x находится в пределах включения, для вычисления компонент матрицы случайных возмущений (22) в лабораторной системе координат удобно прибегнуть к их представлению через компоненты этой же матрицы в системе координат, связанной с включением:

$$\xi_{lm}^{(r)}(\mathbf{x}) = \alpha_{lj}^{(r)}\,\alpha_{mk}^{(r)}\,\xi_{jk}^{(c)}. \tag{49}$$

Элементы $\xi_{jk}^{(c)}$, объединенные в матрицу $\hat{\xi}^{(c)}$, определяются выражением, которое вытекает из записи (22) в собственной системе координат рассматриваемого включения:

$$\hat{\xi}^{(c)} = 3\varepsilon(\hat{\varepsilon}^{(c)} - \varepsilon\hat{I})(2\varepsilon\hat{I} + \hat{\varepsilon}^{(c)})^{-1}. \tag{50}$$

Отсюда видно, что матрица $\hat{\xi}^{(c)}$ и ее элементы $\xi_{jk}^{(c)}$ представляют собой детерминированные величины.

Осуществляя усреднение по ансамблю величины $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ с учетом выражений (47), (49), получаем следующий результат:

$$\langle \xi_{lm}^{(r)}(\mathbf{x})\rangle = \delta_{lm}\,[v_1\xi^{(1)} + v_2\xi^{(2)}], \tag{51}$$

где

$$\xi^{(2)} = \mathrm{Tr}\,\hat{\xi}^{(c)} = \xi_{pp}^{(c)}, \tag{52}$$

по повторяющимся индексам проводится суммирование и $v_1 = 1 - v_2$ — относительный объем, занимаемый вмещающей средой. Отсюда и из (23) получаем нелинейное уравнение для определения диэлектрической проницаемости ε эталонной среды:

$$v_1\xi^{(1)} + v_2\xi^{(2)} = 0. \tag{53}$$

Что же касается корреляционных функций возмущений, то для принятой модели среды их можно записать [46, гл. 4] через безразмерную бинарную корреляционную функцию (43):

$$C_{mpqn}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = v_1 v_2\, \varphi(R)\, D_{mpqn}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} D_{mpqn} = {} & \xi^{(1)\,2}\,\delta_{mp}\delta_{qn} + \langle\alpha_{mj}\alpha_{pk}\alpha_{qs}\alpha_{nt}\rangle_{or}\,\xi^{(c)}_{jkst} - \\ & - \delta_{mp}\,\xi^{(1)}\,\langle\alpha_{qs}\alpha_{nt}\rangle_{or}\,\xi^{(c)}_{st} - \delta_{qn}\,\xi^{(1)}\,\langle\alpha_{mj}\alpha_{pk}\rangle_{or}\,\xi^{(c)}_{jk}. \end{aligned} \tag{55}$$

В этих формулах индекс «*or*» означает усреднение по ориентациям рассеивателя (осуществляемое, например, при помощи надлежащих плотностей вероятности для трех углов Эйлера, определяющих ориентацию осей его собственной системы координат). Отметим, что в этом месте проявляется предположение об однородности включений. Именно, зависимость корреляционных функций (54) только от разности пространственных аргументов, что характерно для статистически-однородных сред [10, 12] и что необходимо для применимости метода замены полевых переменных, имеет место только для пространственно-однородных включений.

Полезно заметить, что теория предыдущего пункта, на которую мы здесь опираемся, предполагает малость пространственной волны: $k_0L \ll 1$. Величина L в силу (54) совпадает с интервалом корреляции безразмерной бинарной корреляционной функции (43), который, в свою очередь, больше диаметра одного включения или равен ему. Таким образом, для справедливости предпринятого здесь рассмотрения и последующих результатов (58), (61) необходимо, чтобы сферические включения были малыми в масштабе длины волны.

Из физических соображений очевидно, что вследствие равномерного распределения случайных ориентаций рассеивателей эффективная среда должна быть изотропной, и выражение (35) на деле должно иметь гораздо более простую структуру, отвечающую этому предположению, а именно:

$$\xi^{(e)}_{mn} = \delta_{mn}\,\delta\varepsilon, \tag{56}$$

где

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{3}\xi^{(e)}_{mm}. \tag{57}$$

Вычисляя свертку $\xi^{(e)}_{mm}$ по формулам (35), и конкретизируя выражения (15) и (16) для случая изотропной эталонной среды, получаем

$$\delta\varepsilon = \frac{8\pi}{3} v_1 v_2 D k_0^2 \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(k)\frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2\varepsilon}, \tag{58}$$

$$D = \xi^{(1)2} + \frac{1}{3}\xi^{(c)}_{np}\xi^{(c)}_{pn} - \frac{2}{3}\xi^{(1)}\xi^{(2)}. \tag{59}$$

Согласно (36), эффективная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой дискретной среды получается в виде

$$\hat{\varepsilon}^{(e)}(\omega) = \varepsilon^{(e)}(\omega)\,\hat{I}, \tag{60}$$

$$\varepsilon^{(e)}(\omega) = \varepsilon + \delta\varepsilon. \tag{61}$$

Эффективная среда оказывается электрически изотропной и характеризуется скалярной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(e)}(\omega)$. Для частного случая изотропной вмещающей среды и изотропных включений уравнение (53) и выражение (58) переходят в известные ранее результаты из [45].

3.2. Затухание среднего поля

Проанализируем эффективную диэлектрическую проницаемость (61) для ситуации, когда диссипативные потери в случайном композите отсутствуют. В этом случае диэлектрическая проницаемость вмещающей среды $\varepsilon^{(1)}$ вещественна: $\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon^{(1)})^*$, а тензор диэлектрических постоянных $\varepsilon^{(c)}$ анизотропного включения в собственной системе координат является эрмитовским (но не обязательно вещественным): $\varepsilon^{(c)} = (\varepsilon^{(c)})^{T*}$ (здесь и далее «$*$» означает комплексное сопряжение). Можно проверить, что в этих условиях имеет место равенство $D = D^*$, и величина D из (59) оказывается вещественной.

Естественно ожидать, что в отсутствие диссипации в случайной среде квазистатическое значение эффективной диэлектрической проницаемости также должно описывать бездиссипативную среду. Действительно, в отсутствие потерь в случайной среде единственной причиной ослабления среднего поля может быть только перекачка его энергии в рассеянную компоненту поля за счет дифракции на включениях. Однако в квазистатическом пределе вклад дифракционных явлений в эффективную диэлектрическую проницаемость, как уже отмечалось выше, исчезает, и квазистатическое значение эффективной диэлектрической проницаемости — а им является величина ε — должно поэтому описывать среду без потерь. Следовательно, в рассматриваемом случае проницаемость эталонной среды ε является вещественной величиной. (Косвенным указанием на это служит тот факт, что, как следует из (48) и (52), если ε подчиняется уравнению (53), то этому же уравнению удовлетворяет и комплексно-сопряженная величина ε^*. Мы, правда, постулируем более сильное утверждение, что эти два корня, ε и ε^*, совпадают.)

Напомним, что итоговое выражение (58) предыдущего пункта, строго говоря, относится к диссипативной случайной и эталонной средам, а результат в отсутствие диссипации должен быть получен из (58) путем предельного перехода, когда потери в эталонной среде стремятся к нулю. Интеграл в правой части (58) имеет полюсы первого порядка в точках $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$ и $k = -k_0\sqrt{\varepsilon}$, первый из которых при исчезновении потерь ($\operatorname{Im}\varepsilon \to +0$) «выползает» сверху на положительную часть вещественной оси (всюду в данной работе используется та ветвь квадратного корня из комплексного числа Z, для которой $0 \le \arg\sqrt{Z} < \pi$). Применяя для вычисления предельного значения интеграла в (58) лемму о половине вычета, в отсутствие диссипации в случайной и эталонной средах имеем

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon' + i\delta\varepsilon'' , \tag{62}$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{8\pi}{3} v_1 v_2 D k_0^2 \int_0^\infty \tilde{\varphi}(k) \frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2\varepsilon} \approx \frac{8\pi}{3} v_1 v_2 D k_0^2 \int_0^\infty \tilde{\varphi}(k)\, dk , \tag{63}$$

$$\delta\varepsilon'' = \frac{(2\pi)^2}{3} \sqrt{\varepsilon} v_1 v_2\, \tilde{\varphi}(0) k_0^3\, D, \tag{64}$$

где $\delta\varepsilon'$ и $\delta\varepsilon''$ — вещественные величины, и интеграл в (63) вычисляется в смысле главного значения в точке $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, «дифракционная» добавка $\delta\varepsilon$ к квазистатическому значению эффективной диэлектрической проницаемости, а значит, и сама проницаемость получаются комплексными. Вещественная часть «дифракционной» добавки дается интегралом по волновым числам и формируется, следовательно, за счет рассеяния в непрерывный спектр волн. Мнимая часть эффективной диэлектрической проницаемости, которая совпадает с $\delta\varepsilon''$, дается полувычетом подынтегрального выражения (58) в полюсе $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$, отвечающем постоянной распространения плоской волны в эталонной среде.

Найдем теперь постоянную распространения $k^{(e)}$ плоской волны среднего поля в эффективной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(e)}(\omega)$. Интересующая нас величина дается выражениями

$$k^{(e)} = k_0\sqrt{\varepsilon^{(e)}(\omega)} = k_0\sqrt{\varepsilon}(1 + \gamma^{(e)}), \tag{65}$$

$$\gamma^{(e)} \approx \delta\varepsilon/2\varepsilon, \tag{66}$$

$$\operatorname{Re}\gamma^{(e)} = \frac{4\pi}{3\varepsilon} v_1 v_2 D k_0^2 \int_0^\infty \tilde{\varphi}(k)\, dk, \tag{67}$$

$$\operatorname{Im}\gamma^{(e)} = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{\varepsilon}} v_1 v_2 \tilde{\varphi}(0) k_0^3 D. \tag{68}$$

Вещественная часть безразмерной величины $\gamma^{(e)}$ определяет, очевидно, сдвиг фазовой скорости волны по сравнению с таковой для эталонной среды в результате процесса многократного рассеяния на случайных частицах. Мнимая часть $\gamma^{(e)}$ описывает появление затухания среднего поля за счет рассеяния на этих частицах. Легко видеть из (65), что мнимая часть эффективной постоянной распространения зависит от частоты как ω^4, что типично для ослабления поля в результате рэлеевского рассеяния [48] и согласуется с рассматриваемой моделью малоразмерных включений.

Литература

1. T. Oguchi, Proc. IEEE **71**, 1029 (1983).
2. *Радиолокационные методы исследования Земли*, под ред. Ю. А. Мельника, Сов. Радио, Москва (1980).
3. A. K. Fung, *Microwave Remote Sensing*, Artech House, London (1994).
4. T. L. Krohn, L. M. Medgyesi-Mitschang, IEEE Trans. **AP-37**, 219 (1989).
5. *Механика композитных материалов и элементов конструкций.* Т. 1; *Механика композитных материалов*, Наукова думка, Киев (1982).

6. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, *Ученые записки Харьковского государственного университета*, Труды физич. отделения физ.-мат. факультета **2**, 41 (1950).
7. I. M. Kaganova and M. I. Kaganov, Waves in Random Media **3**, 117 (1993).
8. *Dielectric Properties of Heterogeneous Materials*, ed. by A. Priou, Elsevier, New York (1992).
9. R. G. Barrera, J. Giraldo, and W. Luis Mochán, Phys. Rev. B **47**, 8528 (1993).
10. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, Наука, Москва (1967).
11. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ **48**, 656 (1965).
12. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, Ч. 2 *Случайные поля*, Наука, Москва (1978).
13. В. И.Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ **44**, 676 (1963).
14. R. C. Bourret, Nuovo Cimento **26**, 1 (1962).
15. J. B. Keller and F. C. Karal, J. Mat. Phys. **7**, 661 (1966).
16. Э. А. Канер, Изв. вузов, Радиофизика **2**, 827 (1959).
17. Ф. Г. Басс, Изв. вузов, Радиофизика **2**, 1015 (1959).
18. D. Dence and J. E. Spence, IEEE Trans. **AP-19**, 302 (1971).
19. E. Dence and J. E. Spence, IEEE Trans. **AP-20**, 110 (1972).
20. Е. Н. Ермакова, В. В. Тамойкин, Изв. вузов, Радиофизика **18**, 1417 (1975).
21. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. вузов, Радиофизика **7**, 605 (1964).
22. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов, Радиофизика **21**, 316 (1978).
23. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ **32**, 338 (1957).
24. A. D. Yaghjian, Proc. IEEE **68**, 248 (1980).
25. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. вузов, Радиофизика **13**, 356 (1970).
26. J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, Wiley Interscience, New York (1990).
27. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ **16**, 969 (1946).
28. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ **21**, 1184 (1951).
29. В. М. Финкельберг, ЖТФ **24**, 509 (1964).
30. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **46**, 725 (1964).
31. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов, Радиофизика **9**, 39 (1966).
32. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. вузов, Радиофизика **9**, 205 (1966).
33. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **53**, 401 (1967).
34. Б. С. Абрамович, ЖЭТФ **77**, 87 (1979).
35. L. Tsang and J. A. Kong, Radio Sci. **16**, 303 (1981).
36. A. Stogryn, IEEE Trans. **AP-31**, 985 (1983).
37. Z. D. Genchev, Waves in Random Media **2**, 99 (1992).
38. S. V. Nghiem, R. Kwok, J. A. Kong et al., Radio Sci. **28**, 687 (1993).
39. N. P. Zhuck, Phys. Rev. B **21**, 15636 (1994).
40. N. P. Zhuck and A. S. Omar, in *Proc. '95 Int. Symposium on Electromagnetic Theory*, St. Petersburg, Russia, (1995), p. 631.
41. B. Michel and A. Lakhtakia, Phys. Rev. E **51**, 5701 (1995).
42. N. P. Zhuck and A. S. Omar, IEEE Trans. **AP-44**, 1142 (1996).
43. B. Michel and A. Lakhtakia, J. Phys. D **29**, 1431 (1996).
44. A. Stogryn, Radio Sci. **18**, 1283 (1983).
45. H. H. Lin, M. E. Veysoglu, S. H. Yueh et al., J. Electromagn. Waves Appl. **8**, 801 (1994).
46. Т. Д. Шермергор, *Теория упругости микронеоднородных сред*, Наука, Москва (1977).
47. Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред*, Изд. АН БССР, Минск (1958).
48. К. С. Шифрин, *Рассеяние света в мутной среде*, Гостехметеоиздат, Москва–Ленинград (1951).