ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 1121–1136

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Ю. П. Емец

Институт электродинамики Национальной академии наук Украины
252680, Киев, Украина

Поступила в редакцию 29 января 1997 г.

Исследованы эффективные параметры трехкомпонентной плоской диэлектрической среды с двоякопериодическим расположением круговых включений. Задача решается в однодипольном приближении. Результаты проведенных вычислений сравниваются с расчетами двухкомпонентной модели Рэлея. Обсуждается общая структура формул эффективных параметров и определены соотношения взаимности трехкомпонентной матричной системы. Даны явные выражения эффективной диэлектрической проницаемости при малой концентрации включений круговой формы, и определена область их приложения. Показано, что в трехкомпонентной среде при некоторых определенных условиях поляризации эффективная проводимость в точности равна значению диэлектрической проницаемости матрицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В числе многих проблем, возникающих при изучении физических процессов переноса в неоднородных средах, задача определения макроскопических (эффективных) характеристик и параметров занимает одно из центральных мест; она имеет простую формулировку и часто привлекается для объяснения различных явлений в композиционных материалах. Решение этой задачи, однако, наталкивается на серьезные математические трудности, которые необходимо преодолевать при вычислении и усреднении неоднородных физических полей. Особенно большие сложности возникают при расчете трехмерных полей в многокомпонентных системах. В более благоприятном отношении находятся двумерные системы, в частности двухкомпонентные матричные среды, для изучения которых можно применить мощный математических аппарат теории функций комплексного переменного. Благодаря этому обстоятельству для двумерных двухкомпонентных систем получен ряд важных результатов, среди которых следует отметить теорему о соотношении взаимности Келлера–Мендельсона [1, 2], преобразования симметрии Дыхне [3] и точные решения краевых задач для некоторых матричных систем с двоякопериодическим расположением включений правильной формы [4–6].

Недостаточно исследованными в настоящее время остаются многокомпонентные системы, когда в основной фазе имеется не один, а несколько видов включений, которые различаются физическими свойствами и размерами. Многофазные системы могут иметь довольно сложное строение, и их макроскопические характеристики становятся более разнообразными. Различие в строении двухкомпонентных и многокомпонентных систем в некотором отношении подобно различию между черно-белым и многоцветным изображением текстуры реальных материалов, имеющих множество оттенков.

В настоящей работе определены эффективные параметры трехкомпонентной диэлектрической среды. Рассматривается матричная система с двоякопериодическим расположением параллельных цилиндров двух разновидностей. В поперечном сечении система двумерна и ее условно можно разбить на квадратные ячейки, в центре которых с периодическим чередованием размещены круговые включения двух различных видов и размеров.

Периодические решеточные модели были введены в рассмотрение Рэлеем при вычислении коэффициентов преломления в сильнонеоднородных средах [7]. В исследованной им модели круговые цилиндры одного вида располагались двоякопериодически в центрах прямоугольных ячеек; в трехмерном аналоге системы сферические включения помещались в кубические ячейки. Для систем с такой структурой можно сформулировать краевую задачу для гармонического уравнения и полностью рассчитать поле в одной ячейке с одним выделенным включением, учитывая влияние всех окружающих включений. Метод, предложенный Рэлеем, позволяет записать формулы эффективных параметров для рассмотренной им системы с любой необходимой степенью точности, что имеет важное значение при оценке различных приближенных результатов. К сожалению, этот метод неприменим непосредственно при исследовании многокомпонентных систем; расчет полей в таких системах приводит к постановке сложных граничных задач сопряжения в многосвязных областях, решение которых требует новых подходов.

Ниже для расчета характеристик трехкомпонентной матричной системы привлекается решение модельной задачи о двух диэлектрических цилиндрах, помещенных во внешнее однородное электрическое поле. Эта задача имеет точное аналитическое решение при общих предположениях относительно радиусов цилиндров, их взаимного расположения во внешнем поле и соотношении между диэлектрическими проницаемостями материалов матрицы и включений [8]. В соответствии с результатами этой задачи взаимное влияние включений друг на друга в многокомпонентной системе можно учесть диполь-дипольными взаимодействиями. Ниже исследуется неоднородная среда с малой концентрацией включений, и для упрощения расчетов можно ограничиться однодипольным приближением. В этом случае из бесконечного числа диполей, определяющих электрическое поле взаимодействующих включений, учитываются только первые диполи, расположенные в центрах круговых включений. Точность вычислений при этом оценивается величинами малых параметров, характеризующих систему, а также сравнением с результатами расчетов по формулам Рэлея для эквивалентных условий.

Полученные для изучаемой системы выражения эффективной диэлектрической проницаемости естественно обобщаются на случай квазистационарных электрических полей введением комплексной диэлектрической проницаемости. Физическая интерпретация результатов в этом случае становится более наглядной при рассмотрении эквивалентных электрических цепей с периодическим чередованием комплексных сопротивлений.

Общие свойства трехкомпонентных систем во многом схожи со свойствами, присущими двухкомпонентным средам. Для них также выполняются соотношения взаимности, которые принимают теперь форму, отражающую зависимость от двух дополнительных фаз. Вместе с тем трехкомпонентные диэлектрические среды могут приобретать характеристики, которые не реализуются для двухкомпонентных материалов.

Из многих возможных способов расположения круговых включений на плоскости ниже исследуются изотропная система с квадратной структурой. Однако используемый метод расчета полей вполне применим и для изучения систем с другим строением, например гексагональной системы.

Решение задачи дано в терминах диэлектрической проницаемости. В силу известной аналогии результаты применимы также при рассмотрении макроскопических характеристик других физических сред.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СИСТЕМЕ

Пусть в неограниченной диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 размещены с двоякопериодическим чередованием два вида круговых диэлектрических цилиндров, имеющих соответственно проницаемости ε_2 и ε_3 и радиусы r_1 и r_2. В поперечном сечении длинные однонаправленные цилиндры образуют плоскую систему с круговыми включениями, расположенными в центрах квадратных ячеек, стороны которых имеют длину l (рис. 1). Такие системы служат удобной теоретической моделью для исследования макроскопических характеристик разнообразных многокомпонентных гетерогенных структур; например, периодических решеток, композиционных материалов, тонких пленок с топологической структурой и других. Практический интерес вызывают прежде всего системы с малой концентрацией разнородных включений (πr_1^2, $\pi r_2^2 \ll l^2$). В расчетном плане они более просты для исследования, но при этом сохраняют многие основные свойства, присущие трехкомпонентным средам.

Чтобы определить эффективную диэлектрическую проницаемость изучаемой системы, необходимо вначале провести расчет поля внутри включений и в матричной среде. Вследствие регулярного строения системы картина поля в ней двоякопериодически повторяется, поэтому достаточно рассчитать поле в одной ячейке с двумя выделенными

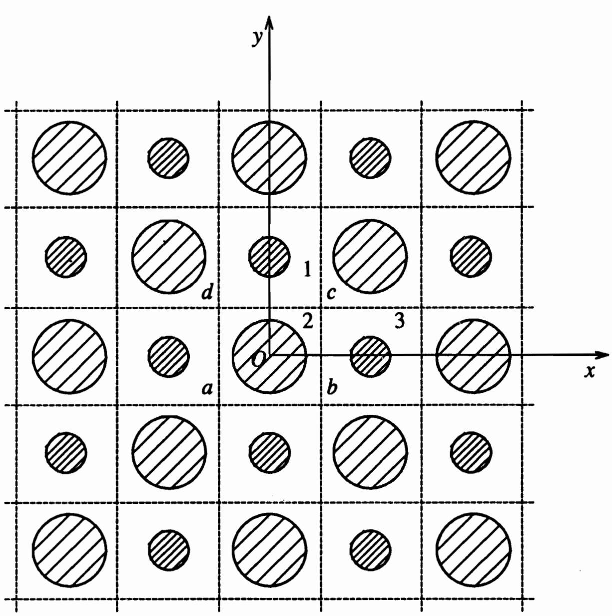

Рис. 1

разнородными включениями. При этом следует иметь в виду следующее обстоятельство. Формирование электрического поля в каждом включении зависит от наличия в системе всех остальных включений. Это влияние включений друг на друга можно представить как сумму парного взаимодействия выделенного включения с каждым другим включением в системе. При определении электрического поля в системе необходимо, таким образом, знать решение задачи о взаимодействии двух разнородных диэлектрических цилиндров во внешнем электрическом поле. Это ключевая задача для расчета поля. Решение этой задачи известно [8], для справок оно приведено в Приложении. Согласно (П.1) выражение электрического поля представлено бесконечной суммой линейных диполей, моменты и координаты которых зависят от радиусов цилиндров, расстояния между ними, их свойств и внешнего электрического поля в системе.

С учетом сделанного предположения о малой концентрации включений можно воспользоваться приближенным выражением электрического поля, принимая во внимание только первые, главные, диполи, расположенные в центрах включений. Эти диполи имеют наибольший момент и вносят основной вклад в формирование электрического поля при малой концентрации включений ($\pi r_1^2,\ \pi r_2^2 \ll l^2$). Если на рис. 1 выделить квадратную ячейку $abcd$ с включением, имеющим диэлектрическую проницаемость ε_2 и радиус r_1, то согласно формулам (П.1) в принятом здесь приближении выражения напряженности электрического поля в ячейке записываются так:

вне включения

$$E_1(z) = E_0 - \overline{E}_0 \left\{ \Delta_{12} r_1^2 z^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\Delta_{12} r_1^2 (z - a_{mn})^{-2} + \Delta_{13} r_2^2 (z - b_{mn})^{-2}\right] \right\}, \tag{1}$$

во включении

$$E_2(z) = (1 + \Delta_{12}) \left\{ E_0 - \overline{E}_0 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\Delta_{12} r_1^2 (z - a_{mn})^{-2} + \Delta_{13} r_2^2 (z - b_{mn})^{-2}\right] \right\}. \tag{2}$$

Здесь $E_k(z) = E_{kx} - iE_{ky}$ $(k = 1, 2)$ — комплексная функция электрического поля; $z = x + iy$ — комплексная переменная; $E_0 = E_{0x} - iE_{0y}$ — внешнее однородное электрическое поле; черта над E_0 означает комплексное сопряжение; Δ_{1p} — относительная диэлектрическая проницаемость:

$$\Delta_{1p} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_p}{\varepsilon_1 + \varepsilon_p} \quad \left(-1 \le \Delta_{1p} \le 1\right) \quad p = 2, 3, \tag{3}$$

a_{mn} — координаты расположения диполей во всех однотипных включениях, имеющих параметры ε_2 и r_1, кроме включения, находящегося в ячейке $abcd$, центр которого совмещен с началом координат, b_{mn} — координаты расположения диполей во всех включениях другого типа, имеющих параметры ε_3 и r_2 (см. рис. 1). Координаты a_{mn} и b_{mn}, вместе с тем, являются координатами центров круговых включений в системе. Имеем

на оси x

$$a_{mn} = \pm 2ml, \quad b_{mn} = \pm l(2m - 1),$$

на оси y

$$a_{mn} = \pm 2inl, \quad b_{mn} = \pm il(2n - 1),$$

вне осей

$$
\begin{aligned}
&a_{mn} = \pm 2l(m + in), \quad b_{mn} = \pm l\,[2m + i(2n-1)]\,, \\
&a_{\acute{m}n} = \pm 2l(m - in), \quad b_{mn} = \pm l\,[2m - i(2n-1)]\,, \\
&a_{mn} = \pm l\,[2m - 1 + i(2n-1)]\,, \quad b_{mn} = \pm l\,[2m - 1 + 2in]\,, \\
&a_{mn} = \pm l\,[2m - 1 - i(2n-1)]\,, \quad b_{mn} = \pm l\,[2m - 1 - 2in]\,, \\
&m, n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Если необходимо определить электрическое поле в ячейке с включением, имеющим параметры ε_3 и r_2, то можно воспользоваться теми же самыми формулами (1) и (2), проведя в них замену обозначений $E_2(z) \to E_3(z)$, $\Delta_{12} \leftrightarrow \Delta_{13}$, $r_1 \leftrightarrow r_2$ и $a_{mn} \leftrightarrow b_{mn}$. При этом начало координатной системы перемещается в центр включения новой выделенной ячейки.

Формулы (1) и (2) дают первое приближение взаимодействия включений в системе. Если взаимодействие между ними отсутствует, то в формулах (1) и (2) двойные суммы необходимо опустить, и тогда электрическое поле во включениях однородно и для каждого типа соответственно равно

$$
E_2(z) = (1 + \Delta_{12})E_0, \quad E_3(z) = (1 + \Delta_{13})E_0,
$$

как и должно быть для уединенных цилиндров во внешнем однородном поле.

При увеличении концентрации дополнительных фаз взаимное влияние включений друг на друга возрастает и в выражениях для электрического поля необходимо учитывать следующие диполи, уточняющие интенсивность взаимодействия включений. Число дополнительно учитываемых диполей устанавливается исходя из условия, определяющего обеспечение требуемой точности вычислений. Принципиально такой подход к уточнению расчетов не вызывает каких-либо осложнений, но выражения для электрического поля приобретают более громоздкий вид, и объем вычислений значительно возрастает.

Поскольку взаимодействие между включениями уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, в практических расчетах бесконечные суммы в формулах (1) и (2) можно заменить конечными суммами малого порядка; тем самым пренебрегается взаимодействием между включениями, удаленными друг от друга на большие расстояния.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Эффективная диэлектрическая проницаемость связывает, по определению, усредненные по области векторы индукции и напряженности электрического поля

$$
\langle \mathbf{D} \rangle = \varepsilon_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle. \tag{5}
$$

Усреднение проводится по области, характерные размеры которой равны или больше характерных размеров системы.

Для рассматриваемой среды с периодической структурой достаточно вычислить средние поля для одной квадратной ячейки размером l. Удобно, например, выбрать

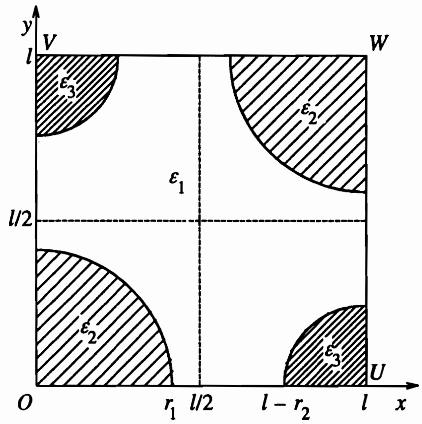

Рис. 2

элементарную ячейку, $OUWV$, представленную на рис. 2. Если вектор напряженности внешнего электрического поля направлен вдоль оси x, $E_0 = E_{0x}$, то отрезки OV и UW совпадают с эквипотенциалями, а отрезки OU и VW лежат на силовых линиях. Это свойство ячейки $OUWV$ позволяет свести процедуру усреднения к определению средних значений поля путем вычисления соответствующих контурных интегралов на отрезках OU и OV:

$$
\begin{gathered}
\langle E_x \rangle = \frac{1}{l}\left[\int_0^{r_1} E_{x2}(x)dx + \int_{r_1}^{l/2} E_{x1}(x)dx + \int_{l/2}^{r_2} E_{x1}(x)dx + \int_{r_2}^{l} E_{x3}(x)dx\right], \\
\langle D_x \rangle = \frac{\varepsilon_1}{l}\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\int_0^{r_1} E_{x2}(y)dy + \int_{r_1}^{l/2} E_{x1}(y)dy + \int_{l/2}^{r_2} E_{x1}(y)dy + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\int_{r_2}^{l} E_{x3}(y)dy\right].
\end{gathered} \tag{6}
$$

При вычислении интегралов (6) следует помнить, что электрическое поле в матрице $E_1(z)$ имеет разные выражения в областях, примыкающих к разнородным ячейкам; об этом шла речь в разд. 2.

Окончательно после вычисления интегралов (6) с учетом формул (1), (2) и (4) получаем следующее выражение эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемой трехкомпонентной системы:

$$
\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{12}s_1/2 - \Delta_{13}s_2/2 + \Delta_{12}^2 A_1 + \Delta_{13}^2 A_2 + \Delta_{12}\Delta_{13}(B_1 + B_2)}{1 + \Delta_{12}s_1/2 + \Delta_{13}s_2/2 + \Delta_{12}^2 A_1 + \Delta_{13}^2 A_2 + \Delta_{12}\Delta_{13}(B_1 + B_2)}. \tag{7}
$$

Здесь

$$
s_k = \frac{\pi r_k^2}{l^2} = \pi r_{k*}^2, \quad r_{k*} = \frac{r_k}{l} \quad (k = 1, 2) \tag{8}
$$

— концентрации включений с диэлектрическими проницаемостями соответственно ε_2

и ε_3. Параметры A_k и B_k $(k = 1,2)$ являются функциями радиусов включений:

$$A_k = 2r_k^2 \left\{ 2r_k^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4 - 16m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{r_k - 2m}{(r_k - 2m)^2 + 4n^2} + \frac{r_k + 2m}{(r_k + 2m)^2 + 4n^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{r_k - 2m + 1}{(r_k - 2m + 1)^2 + (2n-1)^2} + \frac{r_k + 2m - 1}{(r_k + 2m - 1)^2 + (2n-1)^2} \right] \right\},$$
$$B_k = 2r_{3-k}^2 \left\{ 2r_k^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^4 - (2m-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{r_k - 2m}{(r_k - 2m)^2 + (2n-1)^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{r_k + 2m}{(r_k + 2m)^2 + (2n-1)^2} + \frac{r_k - 2m + 1}{(r_k - 2m + 1)^2 + 4n^2} + \frac{r_k + 2m - 1}{(r_k + 2m - 1)^2 + 4n^2} \right] \right\}. \tag{9}$$

В формулах (9) радиусы включений записаны в относительных величинах, $r_{r^*} = r_k/l$; звездочки для краткости опущены. Если воспользоваться выражениями (8), то параметры A_k и B_k можно представить функциями концентраций включений s_1 и s_2. В конкретных расчетах бесконечные суммы заменяются конечными, причем достаточная в практических расчетах точность вычислений обеспечивается при учете сравнительно небольшого числа членов $(m, n = 10 \div 100)$. Коэффициенты при параметрах Δ_{12} и Δ_{13} первой степени в формуле (7) определяются при вычислении соответствующих интегралов в (6), что дает

$$A_{0k} = r_k^2(2 + A_{11} + B_{11}), \quad k = 1,2, \tag{10}$$

где

$$A_{11} = 4 \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 256m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-4m}{(1-4m)^2 + 16n^2} + \frac{1+4m}{(1+4m)^2 + 16n^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1 - 2(2m-1)}{[1 - 2(2m-1)]^2 + 4(2n-1)^2} + \frac{1 + 2(2m-1)}{[1 + 2(2m-1)]^2 + 4(2n-1)^2} \right] \right\} = 0.09644,$$
$$B_{11} = 4 \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 16(2m-1)^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-4m}{(1-4m)^2 + 4(2n-1)^2} + \frac{1+4m}{(1+4m)^2 + 4(2n-1)^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1 - 2(2m-1)}{[1 - 2(2m-1)]^2 + 16n^2} + \frac{1 + 2(2m-1)}{[1 + 2(2m-1)]^2 + 16n^2} \right] \right\} = -0.52562. \tag{11}$$

В соотношении (10) выражение в круглых скобках в точности равно $\pi/2$, откуда следует, что $A_{01} = s_1/2$, $A_{02} = s_2/2$, как это и представлено в формуле (7).

4. СВОЙСТВА ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Эффективная диэлектрическая проницаемость, определенная формулой (7), зависит от концентраций включений s_1 и s_2 (или, что то же самое, от радиусов разнотипных включений r_1 и r_2) и от параметров Δ_{12} и Δ_{13}, характеризующих соотношение между диэлектрическими проницаемостями матрицы и включений.

Для слабонеоднородных сред, когда можно пренебречь квадратичными членами Δ_{12}^2 и Δ_{13}^2, формула (7) принимает особенно простой вид

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - (\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2)/2}{1 + (\Delta_{12}s_1 + \Delta_{13}s_2)/2}. \tag{12}$$

Формула (12) точно описывает макроскопические характеристики систем с включениями, диэлектрические проницаемости которых мало отличаются от проницаемости матрицы. Она также справедлива для систем при очень малых концентрациях включений, $s_1, s_2 \ll 1$, и тогда параметры Δ_{12} и Δ_{13} могут принимать любые значения в диапазоне своего изменения, $-1 \leq \Delta_{12}, \Delta_{13} \leq 1$. Фактически формула (12) применима к средам, характеризуемым малыми комбинированными параметрами $\Delta_{12}s_1/2$ и $\Delta_{13}s_2/2$.

Если концентрации дополнительных фаз равны, $s_1 = s_2 = s$, т. е. равны радиусы всех включений, $r_1 = r_2 = r$, то формула (12) принимает вид

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - s(\Delta_{12} + \Delta_{13})/2 + A(\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2) + 2B\Delta_{12}\Delta_{13}}{1 + s(\Delta_{12} + \Delta_{13})/2 + A(\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2) + 2B\Delta_{12}\Delta_{13}}, \tag{13}$$

где $A_1 = A_2 = A$ и $B_1 = B_2 = B$. Если к тому же равны и диэлектрические проницаемости всех включений, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ($\Delta_{12} = \Delta_{13}$), то выражение для эффективной диэлектрической проницаемости претерпевает дальнейшее упрощение:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{12}s + 2\Delta_{12}^2(A + B)}{1 + \Delta_{12}s + 2\Delta_{12}^2(A + B)}. \tag{14}$$

Формула (14) определяет теперь эффективную диэлектрическую проницаемость двухкомпонентной системы, совпадающей с моделью Рэлея [7], в которой однонаправленные круговые цилиндры с одинаковыми характеристиками образуют двоякопериодическую решетку. Это совпадение позволяет сравнить приведенные здесь результаты с более точными данными расчетов, полученными другим методом в работе [7], и, таким образом, установить область приложения формулы (14) и косвенно более общих формул (12) и (13).

Для слабонеоднородных сред, когда параметры Δ_{12} и s очень малы (Δ_{12}, $s \ll 1$), эффективная диэлектрическая проницаемость для модели Рэлея в первом приближении дается формулой (представленной здесь в обозначениях настоящей работы)

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{12}s}{1 + \Delta_{12}s}. \tag{15}$$

Как видно, она соответствует формуле (14) в линейном приближении по параметру Δ_{12}.

В общем случае, если ограничиться первыми тремя приближениями, выражение для эффективной диэлектрической проницаемости, соответствующее модели Рэлея, можно записать в таком виде:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{12}s - f_j(\Delta_{12}, s)}{1 + \Delta_{12}s - f_j(\Delta_{12}, s)} \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

где для первого приближения

$$f_1 = 0,$$

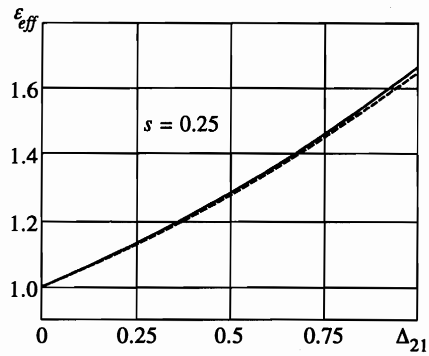

Рис. 3

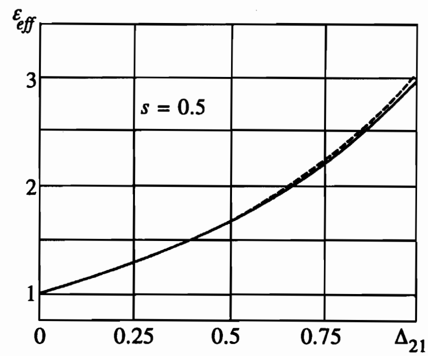

Рис. 4

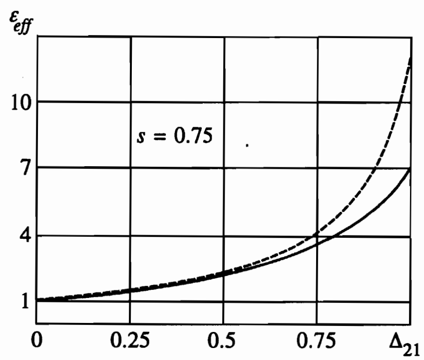

Рис. 5

что приводит к формуле (15), для второго приближения

$$f_2 = 0.306\Delta_{12}^2 s^4 \tag{17}$$

и для третьего приближения

$$f_3 = \frac{f_2}{1 - 1.403\Delta_{12}^2 s^8} + 0.0134\Delta_{12}^2 s^8. \tag{18}$$

Сравнение формул (14) и (16) (последняя для случая f_3), полученных двумя независимыми методами, показывает, что они дают совпадающие результаты при концентрациях включений $s < 0.4$ для всех значений параметра Δ_{12} и при любой концентрации включений, $0 \le s \le \pi/4$, если $\Delta_{12} < 0.5$. Это видно из графиков на рис. 3, 4 и 5, построенных для зависимостей $\varepsilon_{eff}(\Delta_{12})$ соответственно при $s = 0.25$, 0.5 и 0.75, где штриховые линии соответствуют модели Рэлея и построены по формулам (16), (18), а сплошные линии соответствуют полученной формуле (14).

Из общего выражения для эффективной диэлектрической проницаемости (13) можно получить ряд интересных частных решений.

Пусть, например, одна из дополнительных фаз, вторая, с проницаемостью ε_3 исключена из системы, тогда, полагая $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 0$), имеем двухкомпонентную среду, для которой

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \Delta_{12}s/2 + A\Delta_{12}^2}{1 + \Delta_{12}s/2 + A\Delta_{12}^2}. \tag{19}$$

Если материалом одного из двух видов включений, например второго, служит металл ($\varepsilon_3 \to \infty$, $\Delta_{13} = -1$), то формула (13) преобразуется к виду

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 + s/2 + A - \Delta_{12}^2(s/2 + 2B) + A\Delta_{12}^2}{1 - s/2 + A + \Delta_{12}^2(s/2 + 2B) + A\Delta_{12}^2}. \tag{20}$$

Последние два случая можно рассмотреть и для общего выражения (7), определяющего ε_{eff} при неравных концентрациях включений.

5. КОМПОЗИТНАЯ СРЕДА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Из всевозможных соотношений между геометрическими параметрами и физическими характеристиками трехкомпонентной среды отдельно необходимо выделить случай, когда диэлектрическая проницаемость матрицы имеет некоторое среднее значение между проницаемостями разнородных включений.

Пусть вначале рассматриваемая система имеет равные концентрации дополнительных фаз и, следовательно, равные радиусы всех включений, $s_1 = s_2 = s$ ($r_1 = r_2 = r$). Тогда, при условии

$$\Delta_{12} = -\Delta_{13}, \tag{21}$$

из формулы (13) следует, что

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1. \tag{22}$$

С учетом выражения (3) равенство (21) можно записать в таком виде:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}. \tag{23}$$

Таким образом, если диэлектрическая проницаемость матрицы ε_1 равна среднему геометрическому значению проницаемостей двух различных видов включений ε_2 и ε_3, то эффективная диэлектрическая проницаемость такой неоднородной среды равна проницаемости матрицы. Физически такие характеристики среды объясняются тем, что векторы диэлектрической поляризации в разнородных включениях равны по абсолютной величине и имеют противоположные направления. При этом электрическое поле в композиционном материале существенно неоднородно: вектор индукции вытесняется из одних включений, проницаемость которых меньше ε_1, и втягивается в другие, проницаемость которых больше ε_1.

Если систему с такими свойствами интерпретировать в терминах эквивалентных электрических цепей с RLC-элементами, то соотношение (23) означает, что в цепи активное сопротивление равно характеристическому сопротивлению:

$$R = \sqrt{LC}\,. \tag{24}$$

Следует иметь в виду, что соотношения (21)–(23) установлены для системы с равными концентрациями дополнительных фаз. Однако вполне аналогично могут быть исследованы системы, в которых разнородные цилиндрические включения имеют различные радиусы и, следовательно, неравные концентрации двух фаз в матрице. В этом случае необходимо обратиться к общему выражению эффективной диэлектрической проницаемости в форме (7). Полагая в (7)

$$\Delta_{12}s_1 = -\Delta_{13}s_2, \tag{25}$$

вновь приходим к равенству $\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1$. В раскрытом виде соотношение (25) принимает вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_s}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \sqrt{\frac{\Delta_s^2}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3}\,, \tag{26}$$

где $\Delta_s = (s_1 - s_2)/(s_1 + s_2)$.

При равных концентрациях дополнительных фаз, $s_1 = s_2$, равенство (25) переходит в равенство (21), а соотношение (26) в соотношение (23).

В системе с неравными концентрациями фаз векторы диэлектрической поляризации также направлены противоположно в разнородных включениях, но, в отличие от прежнего случая, величины векторов диэлектрической поляризации в фазах не равны и зависят от поперечного сечения цилиндров. Для того чтобы выполнялось условие $\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1$, поляризация диэлектрика в цилиндрах с меньшим радиусом должна быть больше и наоборот. Количественные соотношения между параметрами среды при этом устанавливаются равенством (25). Диэлектрическая проницаемость матрицы ε_1, как и ранее, имеет промежуточное значение между проницаемостями включений ε_2 и ε_3. Но теперь ε_1 зависит согласно (26) и от соотношения концентраций дополнительных фаз.

Предложенный подход расчета эффективных параметров может быть распространен на матричные системы с числом компонентов более трех, и, следовательно, могут быть получены условия, определяющие компенсацию поляризационных явлений в многокомпонентных системах.

6. СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ

В теории двумерных двухкомпонентных матричных систем важное место занимает теорема Келлера [1]. Эта теорема устанавливает соотношение между компонентами тензора эффективной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{eff\;xx}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_{eff\;yy}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2, \tag{27}$$

где x-компонента определяется для среды, матрица и включения которой имеют соответственно параметры ε_1 и ε_2; y-компонента отвечает параметрам среды, у которой диэлектрическая проницаемость матрицы ε_2 и включений ε_1. Соотношение (27) устанавливает наиболее общее свойство, характеризующее двухкомпонентные двумерные системы независимо от их конкретного строения. В практическом плане оно позволяет во многих случаях упростить анализ изучаемых систем, сокращая объем аналитических вычислений и численных расчетов. Для доказательства соотношений (27) Келлер рассмотрел среду с включениями в виде одинаковых круговых цилиндров, которые параллельны друг другу и в поперечном сечении образуют двоякопериодическую прямоугольную решетку. Эта та же система, которую исследовал Рэлей [7] и, как можно убедиться, полученные им выражения эффективной диэлектрической проницаемости (15)–(18) удовлетворяют соотношениям (27).

В дальнейшем соотношения (27) были распространены на более общие структуры двухкомпонентных неоднородных материалов. Дыхне установил преобразования симметрии для таких сред [3]. Развивая метод Дыхне, Балагуров показал, что соотношения (27) справедливы при любой концентрации включений, их форме и распределении в среде [9]. Для доказательства соотношений взаимности Мендельсон применил тензорный анализ и получил весьма общие результаты [2]. Шульгасер предложил наглядную интерпретацию соотношений взаимности, используя комбинированные методы геометрии, алгебры и математического анализа [10]. Следует заметить, что в цитированных выше работах, как и во многих других, соотношение взаимности обсуждается обычно в терминах электропроводности (иногда теплопроводности, как, например, в [10]), что в действительности не имеет принципиального значения и в соответствии с известной аналогией полученные результаты вполне применимы также при изучении магнитных, диффузионных, электрических и других процессов в неоднородных системах.

Для трехкомпонентных систем соотношение взаимности принимает несколько иной вид. С учетом предшествующего исследования его удобно записать в такой форме, где используются параметры Δ_{12} и Δ_{13}, которые естественно возникают в решении полевой задачи (1), (2) и присутствуют в усредненных формулах. Основной результат можно сформулировать в виде следующей теоремы. Если диэлектрическая среда с проницаемостью ε_1 содержит включение в виде параллельных диэлектрических цилиндров двух разновидностей с проницаемостями ε_2 и ε_3 и включения с двоякопериодическим чередованием распределены с шагом квадратной ячейки, то эффективная диэлектрическая проницаемость такой среды удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon_{eff}(\Delta_{12}, \Delta_{13})\varepsilon_{eff}(\Delta_{21}, \Delta_{31}) = \varepsilon_1^2, \tag{28}$$

где, согласно определению (3), $\Delta_{1p} = -\Delta_{p1}$ ($p = 2, 3$). Если рассматриваются прямоугольные ячейки, то система в целом анизотропна и тогда

$$\varepsilon_{eff\ xx}(\Delta_{12}, \Delta_{13})\varepsilon_{eff\ yy}(\Delta_{21}, \Delta_{31}) = \varepsilon_1^2. \tag{29}$$

Концентрации разновидностей включений при этом могут быть различны. Из соотношений (28) и (29) можно получить как частный случай соотношение взаимности для двухкомпонентной среды, положив $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 0$); в принятой здесь форме оно записывается так:

для изотропной системы

$$\varepsilon_{eff}(\Delta_{12})\varepsilon_{eff}(\Delta_{21}) = \varepsilon_1^2, \tag{30}$$

для анизотропной системы

$$\varepsilon_{eff\ xx}(\Delta_{12})\varepsilon_{eff\ yy}(\Delta_{21}) = \varepsilon_1^2. \tag{31}$$

Нетрудно убедиться, что соотношение взаимности для двухкомпонентных систем в форме (30) действительно выполняется для известных точных решений. Ему, например, удовлетворяет решение в модели Рэлея (15)–(18); оно справедливо и для системы со структурой шахматного поля, для которой [3, 5]

$$\varepsilon_{eff} = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \varepsilon_1\sqrt{\frac{1-\Delta_{12}}{1+\Delta_{12}}}. \tag{32}$$

Оно также соответствует точному решению задачи о двоякопериодическом распределении в матрице прямоугольных включений с концентрацией $s = 0.25$ [4]; в частном случае для квадратных включений из работы [4] после несложных вычислений можно получить (в терминах диэлектрической проницаемости), что

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1\sqrt{\frac{2-\Delta_{12}}{2+\Delta_{12}}}. \tag{33}$$

Соотношение взаимности (31) применимо и к одномерным структурам, к слоистым средам, для которых при равных концентрациях фаз

$$\varepsilon_{eff\,xx} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \varepsilon_1(1-\Delta_{12}), \quad \varepsilon_{eff\,yy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_1}{1+\Delta_{12}}. \tag{34}$$

Соотношения взаимности для трехкомпонентных сред доказывается путем непосредственного решения полевой задачи в рассматриваемой периодической системе и усреднением электрического поля в элементарной ячейке с двумя разнородными включениями. Такой подход принят в настоящей работе.

Структурно формула для определения параметра в общем виде имеет следующее представление:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1\frac{F(\Delta_{12},\Delta_{13},s_1,s_2)}{F(\Delta_{21},\Delta_{31},s_1,s_2)}, \tag{35}$$

где, напомним, $\Delta_{21} = -\Delta_{12}$ и $\Delta_{31} = -\Delta_{13}$ (в соответствии с формулой (3)), $F(\ldots)$ — функция своих параметров. Это неявное выражение эффективной диэлектрической проницаемости; оно справедливо при любых концентрациях включений двух дополнительных фаз.

При большой концентрации включений в решении полевой задачи необходимо учитывать многодипольные взаимодействия. В частном случае при малых концентрациях включений, когда можно ограничится однодипольными взаимодействиями, выражение функции $F(\Delta_{12},\Delta_{13},s_1,s_2)$ получено в настоящей работе в явном виде (7)–(11). В формуле (35) функция $F(\Delta_{21},\Delta_{31},s_1,s_2)$ определяет среднюю на шаг элементарной ячейки напряженность электрического поля $\langle E_x\rangle$ вдоль оси x и совпадает с направлением внешнего поля $E_0 = E_{0x}$ в системе. Соответственно функция $\varepsilon_1 F(\Delta_{12},\Delta_{13},s_1,s_2)$ дает среднее значение индукции электрического поля $\langle D_x\rangle$ в ячейке. При этом средние поля $\langle E_x\rangle$ и $\langle D_x\rangle$ определяются интегралами (6).

Из выражения (35) следуют соотношения взаимности (28), если рассматривают квадратные ячейки, и (29), если берутся прямоугольные ячейки.

Нетрудно видеть, что соотношение взаимности для трехкомпонентной системы выполняется для слоистых сред с равными концентрациями фаз (одномерные периодические структуры), для которых эффективные параметры даются формулами, обобщающими (34),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eff\,xx} &= \frac{3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3} = 3\varepsilon_1\frac{(1-\Delta_{12})(1-\Delta_{13})}{(1-\Delta_{12})(1+\Delta_{13})+(1+\Delta_{12})(1-\Delta_{13})+(1-\Delta_{12})(1-\Delta_{13})}, \\ \varepsilon_{eff\,yy} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \frac{\varepsilon_1}{3}\,\frac{(1+\Delta_{12})(1-\Delta_{13})+(1-\Delta_{12})(1+\Delta_{13})+(1+\Delta_{12})(1+\Delta_{13})}{(1+\Delta_{12})(1+\Delta_{13})}. \end{aligned} \tag{36}$$

Соотношение взаимности (29) представлено в виде общего алгебраического выражения; оно не имеет уже столь простой физической наглядности, в какой мере это присуще двухкомпонентной системе. Однако главное преимущество написания соотношения взаимности в форме, содержащей произведение функций от параметров Δ_{12} и Δ_{13}, состоит в том, что оно допускает естественное обобщение на системы с произвольным числом компонентов.

Так, если в матрице композитного диэлектрика содержится n разнородных включений, то соотношение взаимности принимает вид:

$$\varepsilon_{eff\,xx}(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \ldots, \Delta_{1n})\varepsilon_{eff\,yy}(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \ldots, \Delta_{n1}) = \varepsilon_1^2. \tag{37}$$

В справедливости соотношения (37) можно убедиться, рассматривая периодические структуры с помощью использованной техники вычислений. В частности, соотношению (37) удовлетворяют, как легко убедиться, многокомпонентные одномерные структуры с формулами, обобщающими формулы (36).

7. КОМПЛЕКСНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

В квазистационарном приближении, когда длина волны больше характерных размеров системы, все три компоненты диэлектрической проницаемости рассматриваемой среды можно считать комплексными:

$$\hat{\varepsilon}_j = \varepsilon'_j - i\varepsilon''_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{38}$$

Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости указывает на наличие потерь в диэлектрической среде.

В таком случае комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость неоднородной системы $\hat{\varepsilon_{eff}} = \varepsilon'_{eff} - i\varepsilon''_{eff}$ определяется выражением (7), в котором вместо скалярных величин необходимо подставить комплексные значения диэлектрической проницаемости (38); при этом используются комплексные параметры

$$\hat{\Delta}_{1k} = \frac{\hat{\varepsilon}_1 - \hat{\varepsilon}_p}{\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_p} \quad (p = 2, 3). \tag{39}$$

Потери в неоднородной диэлектрической среде в общем случае определяются токами смещения и токами проводимости; они сложным образом зависят от соотношения между компонентами системы и от частоты внешнего электрического поля.

В этом случае в исходном выражении (15) и формулах (13), (19) и (20) необходимо произвести замену $\varepsilon_{eff} \to \hat{\varepsilon}_{eff}$, $\varepsilon_1 \to \hat{\varepsilon}_1$ и $\Delta_{1p} \to \hat{\Delta}_{1p}$. Тогда при

$$\hat{\Delta}_{12} = -\hat{\Delta}_{12} \tag{40}$$

имеем

$$\hat{\varepsilon}_{eff} = \hat{\varepsilon}_1, \tag{41}$$

причем

$$\hat{\varepsilon}_1 = \sqrt{\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3}\,. \tag{42}$$

Формулы (40)–(42) обобщают соответствующие формулы (21)–(23). В комплексной форме можно записать также выражения (24), (32) и (33).

Если включения имеют малые диэлектрические потери $\operatorname{tg}\delta_2$, $\operatorname{tg}\delta_3 \ll 1$ (δ_2 и δ_3 — углы диэлектрических потерь в разнородных цилиндрах), то, используя приближенное разложение корня, соотношение (42) можно представить так:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \sqrt{\varepsilon_2'\varepsilon_3'}\left[1 - \frac{i}{2}(\operatorname{tg}\delta_1 + \operatorname{tg}\delta_2)\right].$$

Очевидно, что в средах с малыми потерями диэлектрическая проницаемость матрицы близка к значению $\sqrt{\varepsilon_2'\varepsilon_3'}$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трехкомпонентные системы изучены пока недостаточно. Это связано с трудностями расчета физических полей в таких системах. Для двумерных систем с упорядоченным распределением разнородных включений могут быть привлечены методы краевых задач теории аналитических функций, подобно тому как для рассматриваемой среды с круговыми включениями используется решение задачи для пары включений.

Трехкомпонентные матричные системы обладают многими свойствами, которые присущи двухкомпонентным системам. Для них также справедливы соотношения взаимности, которые записываются в виде произведения зависимостей от параметров, определяющих относительные значения диэлектрических проницаемостей включений. Вместе с тем в трехкомпонентных системах более разнообразны поляризационные явления; в некоторых случаях, как показано, векторы диэлектрической поляризации в разнородных включениях могут иметь противоположные направления и при определенных условиях может наступить их взаимная компенсация. Эффективная диэлектрическая проницаемость у такой системы будет равна проницаемости матрицы. Для двухкомпонентных систем такие условия принципиально не осуществимы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведено точное аналитическое решение задачи о двух круговых диэлектрических включениях, находящихся во внешнем однородном электрическом поле. Оно использовано при исследовании рассмотренной трехкомпонентной системы.

Пусть в диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 находятся два круговых диэлектрических цилиндра, которые параллельны друг другу и имеют соответственно радиусы r_1 и r_2 и диэлектрические проницаемости ε_2 и ε_3; h — расстояние между осями цилиндров ($h > r_1 + r_2$). Внешнее электрическое поле E_0 однородно и направлено нормально к осям цилиндров, которые размещены вдоль оси x, начало координат совмещено с осью цилиндра, имеющего радиус r_1. При этих условиях решение задачи дается следующими формулами:

во внешней области цилиндров

$$E_1(z) = E_0 - (x_1 - x_2)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Delta^k\left\{\overline{E}_0\left[\frac{1}{\Delta_{13}}\left(\frac{g_{1k}}{z - z_{1k}}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_{12}}\left(\frac{g_{2k}}{z - z_{2k}}\right)^2\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - E_0\left[\left(\frac{g_{3k}}{z - z_{3k}}\right)^2 + \left(\frac{g_{4k}}{z - z_{4k}}\right)^2\right]\right\}\right\}, \qquad (\text{П.1})$$

в первом цилиндре

$$E_2(z) = (1 + \Delta_{12}) \left\{ E_0 - (x_1 - x_2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^k \left[\frac{\overline{E}_0}{\Delta_{12}} \left(\frac{g_{2k}}{z - z_{2k}} \right)^2 - E_0 \left(\frac{g_{3k}}{z - z_{3k}} \right)^2 \right] \right\} \right\},$$

во втором цилиндре

$$E_3(z) = (1 + \Delta_{13}) \left\{ \overline{E}_0 - (x_1 - x_2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta^k \left[\frac{\overline{E}_0}{\Delta_{13}} \left(\frac{g_{1k}}{z - z_{1k}} \right)^2 - E_0 \left(\frac{g_{4k}}{z - z_{4k}} \right)^2 \right] \right\} \right\}.$$

Здесь $E_j(z) = E_{xj} - iE_{yj}$ ($j = 1, 2, 3$) — комплексные функции напряженности электрического поля; $z = x + iy$ — комплексная переменная; x_1 и x_2 — точки симметрии, расположенные на оси x с координатами

$$x_1 = br_1, \quad x_2 = \frac{r_1}{b},$$

$$b = \frac{1}{2r_1 h} \left[h^2 + r_1^2 + r_2^2 - \sqrt{(h^2 + r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1^2 h^2} \right];$$

g_{vk} ($v = 1, \ldots, 4$) — параметры, определенные формулами

$$g_{vk} = \frac{a_v}{1 - a_v^2}, \quad g_{4k} = -g_{3k},$$

$$a_1 = a_4 \left(\frac{h - x_1}{h - x_2} \right)^{1/2}, \quad a_2 = \frac{1}{a_4} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{1/2}, \quad a_3 = \frac{1}{a_4}, \quad a_4 = \left(\frac{x_1 h - r_1^2}{x_2 h - r_2^2} \right)^{k/2};$$

z_{vk} — координаты диполей на оси x,

$$z_{vk} = \frac{x_1 - x_2 a_v^2}{1 - a_v^2};$$

Δ — параметр,

$$\Delta = \Delta_{12}\Delta_{13}, \quad -1 \le \Delta \le 1;$$

черта над E_0 означает комплексное сопряжение.

Приведенные выражения получены из решения соответствующей краевой задачи. Подробно это решение изложено в работе [8], где дано также конструктивное решение этой задачи методом инверсии.

Литература

1. J. B. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
2. K. S. Mendelson, J. Appl. Phys. **46**, 4740 (1975).
3. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
4. Ю. В. Обносов, ДАН СССР **319**, 1125 (1991).
5. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
6. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
7. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481 (1882).
8. Yu. P. Emets and Yu. P. Onofrichuk, IEEE Trans. DEI **3**, 87 (1996).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **81**, 665 (1981).
10. K. A. Schulgasser, Int. Comm. Heat Mass Transfer **19**, 639 (1992).