ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 881–891

СТРУКТУРА И ЭВОЛЮЦИОННОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. И. Жданов, П. В. Титаренко*

Астрономическая обсерватория Киевского университета им. Тараса Шевченко
254053, Киев, Украина

Поступила в редакцию 1 декабря 1997 г.

Получены условия существования релятивистских ударных волн в идеально проводящей жидкости с общим уравнением состояния, гарантирующие наличие непрерывного профиля стационарной волны в присутствии малой вязкости. Для этого исследованы одномерные решения уравнений магнитной гидродинамики с релятивистским тензором вязкости. В работе допускаются аномальные области термодинамических переменных и не используется известное условие выпуклости адиабат Пуассона. Результаты приводят к соотношениям между скоростями магнитозвуковых, альфвеновских и ударных волн до и после разрыва, которые оказываются более жесткими, чем следствия условий эволюционности. В нерелятивистском случае, а также в случае параллельной и перпендикулярной ударных волн различия между обоими условиями исчезают.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории ударных волн важную роль играют физические критерии, определяющие допустимость разрывов в решениях гидродинамических уравнений. Их роль особенно значительна в случае сложных уравнений состояния сверхплотной материи, привлекаемых, например, в релятивистской астрофизике. Выводы этих критериев в релятивистской гидродинамике обычно качественно не отличаются от нерелятивистского рассмотрения. Однако результат данной работы дает пример релятивистской специфики, которая возникает при учете дополнительных степеней свободы, связанных с магнитным полем. Оказывается, что в магнитной гидродинамике (МГД) выводы двух фундаментальных критериев существования ударных волн — условия эволюционности и условия существования структуры, т. е. непрерывного профиля ударной волны в присутствии сколь угодно малой вязкости — различаются в релятивистском случае, хотя и совпадают в нерелятивистском.

Общеизвестно, что законов сохранения, связывающих термодинамические величины по обе стороны фронта ударной волны в идеальной жидкости, недостаточно для корректного определения физически допустимого ударного перехода. В этой связи привлекаются дополнительные критерии, обеспечивающие однозначность решения уравнений гидродинамики в окрестности разрыва. Среди этих критериев одним из самых общих является условие эволюционности ударных волн [1]. В классической МГД требование эволюционности приводит к соотношениям между скоростями магнитозвуковых и альфвеновских волн и скоростью ударной волны относительно среды до и после разрыва [2, 3], ограничивающим области существования разных типов ударных волн.

*E-mail: zhdan@aoku.freenet.kiev.ua

Условия эволюционности интересно сравнить с другими ограничениями на параметры ударной волны, возникающими в методе малой вязкости. Введение вязкости является одним из наиболее эффективных и физически оправданных приемов, позволяющих определить разрывное течение как некоторый предел непрерывных решений (см., например, [4]). Условие допустимости ударного перехода из состояния 0 среды перед фронтом в состояние 1 за фронтом при этом получается как условие существования вязкого профиля ударной волны — стационарного вязкого течения, параметры которого непрерывно меняются от состояния 0 к состоянию 1.

В настоящей работе для получения этого условия в уравнения релятивистской МГД [5, 6] вводится релятивистский тензор вязкости [1] с последующим предельным переходом, когда вязкость стремится к нулю. Оказывается возможным провести рассмотрение для общего уравнения состояния, не ограничиваясь требованием выпуклости адиабат Пуассона, которое играет важную роль в теории ударных волн как одно из условий Бете–Вейля для нормальной среды [4]. Как известно из классической гидродинамики [4], если условие выпуклости нарушается, энтропийный критерий не отсеивает все нефизические решения и поэтому недостаточен для отбора допустимых решений. Имеющиеся результаты по ударным волнам в релятивистской МГД [5, 6] также опираются на свойство выпуклости, которое в релятивистской области имеет вид $(\partial^2 p/\partial X^2)_S > 0$, где $X = (\varepsilon + p)V^2$, p — давление, ε — плотность энергии, V — удельный объем (на один барион), S — удельная энтропия. Свойство выпуклости не является термодинамическим требованием [1] и может нарушаться в случае сложных уравнений состояния. Последнее обстоятельство вызвало в свое время интерес к исследованию релятивистских ударных волн в среде с аномальными свойствами в связи с гидродинамическими моделями кварк-адронного фазового перехода (см., например, [7–12] и ссылки в этих работах). Общие критерии допустимости релятивистских ударных волн с учетом наличия вязкого профиля были получены в [11, 12]. Одним из результатов этих работ было условие на скорости ударных волн [12], которое совпадает с выводами условий эволюционности (так же, как и в нерелятивистской гидродинамике [1]).

В данной статье мы обобщаем результаты работ [11, 12] на случай МГД для жидкости с идеальной проводимостью [5, 6]. Условие существования вязкого профиля релятивистской ударной волны позволяет сформулировать критерий ее допустимости в виде некоторых неравенств, содержащих уравнение состояния. Отсюда получаются ограничения на скорости ударных волн, которые в данном случае отличаются от следствий условий эволюционности, однако это различие исчезает в нерелятивистском пределе.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения движения идеальной релятивистской жидкости с бесконечной проводимостью и единичной проницаемостью в магнитном поле определяются законами сохранения для магнитогидродинамического тензора энергии-импульса [5, 6]

$$T^{\mu\nu} = (p^* + \varepsilon^*)u^\mu u^\nu - p^* g^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} h^\mu h^\nu, \tag{1}$$

где u^μ — 4-скорость жидкости, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, $h^\mu = -(1/2)e^{\mu\alpha\beta\gamma}\times$ $\times F_{\alpha\beta}u_\gamma$ — магнитное поле, $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — символ Леви-Чивита, $F_{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля,

$$p^* = p + \frac{1}{8\pi}|h|^2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon + \frac{1}{8\pi}|h|^2, \quad |h|^2 = -h^\alpha h_\alpha > 0.$$

Предполагается, что давление p связано с плотностью энергии ε и плотностью n барионного числа (или плотностью какого-либо иного сохраняющегося заряда) посредством достаточно гладкого уравнения состояния $p = p(\varepsilon, n)$.

Условия сохранения энергии-импульса должны быть дополнены законом сохранения барионного заряда и уравнениями Максвелла. Непрерывное течение жидкости описывается следующей системой уравнений движения:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_\mu (n u^\mu) = 0, \tag{3}$$

$$\partial_\mu (u^\mu h^\nu - u^\nu h^\mu) = 0. \tag{4}$$

В случае разрыва в течении законы сохранения связывают гидродинамические и электродинамические величины по обе стороны ударной волны [1]:

$$D_{10}[T^{\mu\nu} l_\mu] = 0, \tag{5}$$

$$D_{10}[n u^\mu l_\mu] = 0, \quad D_{10}\left[(u^\mu h^\nu - h^\mu u^\nu) l_\mu\right] = 0, \tag{6}$$

где l_μ — нормаль к гиперповерхности разрыва, $l_\mu l^\mu = -1$, $D_{10}(F) = F_1 - F_0$, F_0 и F_1 — величины соответственно перед и за разрывом. Для заданного состояния среды перед фронтом ударной волны уравнения (5), (6) определяют кривую ударных переходов — ударную адиабату Гюгонио–Тауба–Лихнеровича [5, 6], однако не все такие переходы являются допустимыми.

Чтобы проанализировать допустимые ударные волны, удовлетворяющие (5), (6), «размажем» разрыв при помощи вязкостных эффектов, заменяя уравнения (2) на

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) = 0, \tag{7}$$

где

$$\tau_{\mu\nu} = \eta(u_{\mu,\nu} + u_{\nu,\mu} - u_\mu u^\alpha u_{\nu,\alpha} - u_\nu u^\alpha u_{\mu,\alpha}) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) \tag{8}$$

— релятивистский тензор вязкости [1]. Далее уравнения (3), (4) рассматриваются совместно с (7) в предположении существования соответствующего предельного решения при $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$, которое описывает разрывные течения идеальной жидкости.

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УДАРНОГО ПЕРЕХОДА

Строго говоря, полное исследование предполагает детальный анализ физических процессов на фронте ударной волны с учетом его протяженности. Однако при изучении сверхплотной материи достаточно часто приходится довольствоваться феноменологическими моделями, которые не позволяют описать микроструктуру ударной волны.

Поэтому представляет интерес анализ методов регуляризации разрывных решений и сравнение различных требований, ограничивающих класс допустимых релятивистских ударных волн. Подобные исследования проводились в классической МГД (см., например, [13] и ссылки в этой работе). Их выводы показывают, что критерии существования ударных волн могут, вообще говоря, зависеть от способа сглаживания разрыва. Например, при наличии магнитной вязкости оказывается [13], что только эволюционные ударные волны обладают непрерывным профилем при любом соотношении между диссипативными коэффициентами. Иное введение диссипативных эффектов предполагает учет конечной проводимости или теплопроводности. Используемый нами частный выбор сглаживания при помощи тензора (8) обусловлен соображениями простоты и возможностью сопоставления с немагнитным случаем. Ниже рассматриваются ударные волны, получающиеся независимо от способа перехода к пределу $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$. Это дает возможность ограничиться случаем $\eta = 0$, причем одного коэффициента вязкости $\zeta \neq 0$ оказывается достаточно, для того чтобы реализовать непрерывный профиль ударной волны и перекрыть условия эволюционности.

Стационарная ударная волна, распространяющаяся в пространственно-подобном направлении l_μ, локально может быть представлена в соответствующей системе отсчета стационарным вязким течением, зависящим только от одной переменной $x = x^\mu l_\mu$. Выберем координаты так, чтобы $\{l_\mu\} = \{0, 1, 0, 0\}$, $x = x^1$; при $x \to -\infty$ все параметры вязкого течения стремятся к некоторым постоянным значениям, обозначенным индексом «0», которые соответствуют состоянию перед ударной волной, а при $x \to \infty$ — к значениям с индексом «1» позади ударной волны; соответственно $u^1 > 0$.

Из уравнений (7), (3), (4) получаем следующие интегралы:

$$T^{1\nu} + \tau^{1\nu} = \text{const}, \tag{9}$$

$$u^1 h^\nu - h^1 u^\nu \equiv H^\nu = \text{const}, \tag{10}$$

$$n u^1 \equiv j = \text{const}. \tag{11}$$

Так как $\tau^{\mu\nu} \to 0$ при $x \to \pm\infty$, соотношения (5) и (6) должны выполняться для соответствующих асимптотических значений $T^{\mu\nu}$, n, h^μ, получаемых из непрерывных решений системы (9)–(11). Аналогично классической гидродинамике [4] условия существования решений этой граничной задачи интерпретируются как условия допустимости соответствующего ударного перехода $u^\mu_{(0)}, h^\mu_{(0)}, n_0, p_0 \to u^\mu_{(1)}, h^\mu_{(1)}, n_1, p_1$, причем эти состояния должны удовлетворять соотношениям (5), (6) на ударной волне.

Далее без потери общности можно положить $u^3 \equiv 0$ и $h^3 \equiv 0$; компоненты u^1 и h^1 нормальны к поверхности $x = \text{const}$, параллельной фронту ударной волны, а u^2 и h^2 — тангенциальные составляющие. При этом остается свобода в выборе системы отсчета, которую можно зафиксировать, полагая $u^2_{(0)} = 0$.

Из (10) следует

$$h^\mu = \frac{1}{u^1}\left[H^\mu - u^\mu H^\alpha u_\alpha\right]. \tag{12}$$

Умножая (9) на u_ν и учитывая, что $\tau^{\mu\nu} u_\nu = 0$, имеем

$$\varepsilon^* u^1 = T^{1\mu}_{(0)} u_\mu, \tag{13}$$

откуда ε и h^μ выражаются через u^1 и u^2.

Исключая единственную производную du^1/dx из (9) при $\eta=0$ для $\mu=1,2$, получаем соотношение между u^1 и u^2, которое с учетом (12), (13) приводится к виду

$$\left(H^2u^2-H^0u^0\right)\left(H^2u^0-H^0u^2\right)=4\pi u^1\left(T^{10}_{(0)}u^2-T^{12}_{(0)}u^0\right).$$

Отсюда получаем связь между компонентами трехмерной скорости $v_1 = u^1/u^0$ и $v_2=u^2/u^0$:

$$v_1=-A(v_2-a)(v_2-b)/(v_2-c), \tag{14}$$

где

$$A=\frac{H^0H^2}{4\pi T^{10}_{(0)}},\quad a=\frac{H^2}{H^0},\quad b=\frac{1}{a},\quad c=\frac{T^{12}_{(0)}}{T^{10}_{(0)}},$$

которая линейна по v_1 и квадратична по v_2. Здесь нас интересует связная часть кривой (14), которая содержит точку $v_2=0$. Уравнение (9) для $\mu=1$ дает

$$\zeta\left[1+(u^1)^2\right]\frac{du^1}{dx}=T^{11}-T^{11}_{(0)}. \tag{15}$$

Поскольку скорости выражаются (см. (11)) через плотность n,

$$u^1=u^1_{(0)}n_0/n, \tag{16}$$

задача сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно $n(x)$ либо $u^1(x)$. Уравнения (12)–(16) полностью определяют структуру ударного перехода.

Используя (12)–(14), (16), уравнение (15) можно записать следующим образом:

$$\zeta\frac{n_0u^1_0}{n^2}\frac{dn}{dx}=\tilde p(n)-p\left(\tilde\varepsilon(n),n\right), \tag{17}$$

где обозначено

$$\tilde p(n)=\left\{1+(u^1)^2\right\}^{-1}\left\{T^{11}_{(0)}+\frac{1}{4\pi}(H^\alpha u_\alpha)^2-T^{1\mu}_{(0)}u_\mu u^1\right\}-\frac{1}{8\pi}(u^1)^{-2}\left\{(H^\alpha u_\alpha)^2-H^\alpha H_\alpha\right\},$$

$$\tilde\varepsilon(n)=\frac{T^{1\mu}_{(0)}u_\mu}{u^1}-\frac{1}{8\pi}(u^1)^{-2}\left\{(H^\alpha u_\alpha)^2-H^\alpha H_\alpha\right\}.$$

Условие знакопостоянства правой части выражения (17) внутри интервала (n_0,n_1), которая обращается в нуль на его концах, определяет существование непрерывного решения с асимптотиками $n(x)\to n_0$ при $x\to-\infty$ и $n(x)\to n_1$ при $x\to\infty$. Если, например, $n_1>n_0$ и правая часть уравнения (17) является положительной непрерывно-дифференцируемой функцией от $n\in(n_1,n_0)$, такое решение, очевидно, существует. Если же правая часть выражения (17) меняет знак в некоторой точке между n_0 и n_1, то решение с указанными свойствами отсутствует. Некоторое внимание требуется, чтобы исключить переход через точку ветвления функции $v_2(u^1)$, в которой возможна потеря дифференцируемости решения. Эта точка соответствует точке экстремума $v_2 = v_2^*$ обратной функции $u^1(v_2)$. Для этого достаточно переписать уравнение (17) в виде

$$\zeta \frac{du^1}{dv_2} \frac{dv_2}{dx} = p\left(\tilde{\varepsilon}(n), n\right) - \tilde{p}(n),$$

в котором $n = n(v_2)$ в силу (11) и (14) и правая часть является однозначной функцией от v_2, и исследовать его в окрестности указанной точки, где $du^1/dv_2 \approx C(v_2 - v_2^*)$, $C \neq 0$. Предполагая, от противного, $v_2(x^*) = v_2^*$ в некоторой точке x^*, нетрудно убедиться в невозможности продолжения решения через эту точку, если в ней не происходит также и перемены знака правой части уравнения (17). Но даже если подобное совпадение имело бы место, оно бы не сохранялось при малых вариациях уравнения состояния в окрестности точки $\{\varepsilon(v_2^*), p(v_2^*)\}$. В этом случае менялось бы положение корня правой части уравнения (17), но не положение точки v_2^*, зависящей от уравнения состояния лишь в точках 0 и 1 (см. (14)). Поэтому указанный случай следует исключить, допуская лишь монотонное изменение u^1 и u^2 вдоль решений.

Тем самым получаем следующий критерий допустимости стационарного ударного перехода:

$$(n_0 - n_1)\left(p\left(\tilde{\varepsilon}(n), n\right) - \tilde{p}(n)\right) \geq 0 \tag{18}$$

для всех n между n_0 и n_1, где предполагается, что уравнение (14) имеет на соответствующем участке однозначное регулярное решение относительно v_2. Здесь не исключается случай касания кривых p и $\tilde{p}$ (точка Чепмена–Жуге), разрешенный в пределе малой вязкости, когда левая часть неравенства (18) может равняться нулю между n_0 и n_1, но не меняет свой знак. Данный критерий рассматривается как необходимый. Он не является достаточным, например, в случае уравнений состояния, приводящих к неоднозначным ударным адиабатам: из классической гидродинамики известно, что в этом случае даже при выполнении условий существования вязкого профиля ударной волны возможны неединственности разрывных решений, для устранения которых необходимы дополнительные требования негидродинамического характера [14, 15].

Критерию можно придать эквивалентную форму в терминах ударной адиабаты Гюгонио–Тауба–Лихнеровича [4, 5] (Приложение 1).

4. СЛЕДСТВИЯ КРИТЕРИЯ (18)

Далее нам потребуется еще одно соотношение, тождественно выполняющееся вдоль решений уравнений (9)–(11), которое получается с учетом явного вида тензора энергии-импульса (1):

$$T^{12}_{(0)}H^0 - T^{10}_{(0)}H^2 = \left(T^{12} + \tau^{12}\right)H^0 - \left(T^{10} + \tau^{10}\right)H^2 = -\sqrt{1 + (u^1)^2}\,\tilde{h}^2 \left[R - \zeta (u^1)^2 \frac{du^1}{dx}\right], \tag{19}$$

где $R = (p^* + \varepsilon^*)(u^1)^2 - (h^1)^2/4\pi$, а $\tilde{h}^2$ — поперечная компонента магнитного поля в системе отсчета, где $u^2 = 0$:

$$\tilde{h}^2 = \frac{h^2\left(1 + (u^1)^2\right) - u^1 u^2 h^1}{u^0\sqrt{1 + (u^1)^2}} = u^0 \frac{h^2 - v_2 h^0}{\sqrt{1 + (u^1)^2}}.$$

Поскольку нас интересует непрерывное решение в интервале $(-\infty, \infty)$, из (19) следует, что $\tilde{h}^2$ не меняет знака (либо $\tilde{h}^2 \equiv 0$ и до, и после ударной волны). Отсюда следует вывод о невозможности ударных волн включения и выключения в релятивистской МГД (ср. [5]). Напомним, что перед ударной волной включения тангенциальное магнитное поле равно нулю, а после нее — отлично от нуля; такие ударные волны допустимы в классической МГД [3]. Невозможность релятивистских ударных волн включения и выключения детально проанализирована иным способом в [5].

Поскольку $du/dx \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и правая часть уравнения (19) в этом пределе пропорциональна R, из этого уравнения следует, что в нетривиальном случае знак R также не меняется. Соотношение

$$(u_A)^2 = \frac{(h^1)^2}{4\pi(p^* + \varepsilon^*)}$$

определяет компоненту 4-скорости альфвеновских волн, распространяющихся вдоль оси x, т. е. знак R совпадает со знаком разности $(u^1)^2 - (u_A^1)^2$, который, следовательно, сохраняется при переходе через ударную волну. Соответственно, при $R > 0$ в пределе малой вязкости рассматриваемые уравнения описывают быструю ударную волну, а при $R < 0$ — медленную.

Еще одно условие для скоростей вытекает из результата о знакопостоянстве вдоль допустимой траектории величины du^1/dv_2. Вычислим эту величину перед фронтом ($x \to -\infty$) в системе, где $u_{(0)}^2 = 0$, используя (14):

$$\left.\frac{du^1}{dv_2}\right|_{(0)} = -\left.\frac{4\pi u^0}{h^1\tilde{h}^2} R^*\right|_{(0)}, \tag{20}$$

где

$$R^* = (p+\varepsilon)(u^1)^2\left[1 + (u^1)^2\right] - \frac{1}{4\pi}(h^1)^2$$

содержит составляющие скорости и магнитного поля, нормальные плоскости $x = \mathrm{const}$, и не изменяет своего вида при движениях инерциальной системы отсчета параллельно указанной плоскости. Поскольку знак du^1/dv_2 сохраняется при этих движениях, величина R^* определяет этот знак в произвольной такой системе. Ввиду знакопостоянства du^1/dv_2 также и вдоль решения знаки $R_{(0)}^*$ перед фронтом и $R_{(1)}^*$ за фронтом совпадают. Здесь следует использовать знакопостоянство $\tilde{h}^2$ и h^1 (см. ниже) вдоль допустимой траектории. Заметим, что в нерелятивистском пределе R^* совпадает с R.

Аналогично (19) получается соотношение

$$T_{(0)}^{12}H^2 - T_{(0)}^{10}H^0 = u^1h^1\left(p + \varepsilon - \zeta\frac{du^1}{dx}\right), \tag{21}$$

которое устанавливает знакопостоянство продольной компоненты магнитного поля h^1.

Проанализируем зависимость (14) в системе отсчета, где $u_{(0)}^2 = 0$. Мы предполагаем $h_{(0)}^1 \neq 0$, $h_{(0)}^2 \neq 0$; случаи перпендикулярной ($h_{(0)}^1 = 0$) и параллельной ($h_{(0)}^2 = 0$) ударных волн рассматриваются более просто [16]. В этой системе в (14) имеем

$$A = \frac{u_{(0)}^1 c}{u_{(0)}^0}, \quad a = -\frac{u_{(0)}^1 u_{(0)}^0 h_{(0)}^2}{h_{(0)}^1}, \quad b = \frac{1}{a}, \quad c = -h_{(0)}^1 h_{(0)}^2\left[4\pi\left(p_0 + \varepsilon_0 + \frac{(h_{(0)}^2)^2}{4\pi}\right)u_{(0)}^1 u_{(0)}^0\right]^{-1}.$$

Используя (19), (20), нетрудно убедиться, что случай, когда c находится между a и b, соответствует $R < 0$ и описывает медленную ударную волну; при этом ветвь зависимости (14), содержащая начальную точку $v_2 = 0$, является монотонной. Если c находится вне отрезка $[a, b]$, имеем $R > 0$, т. е. быструю ударную волну; в этом случае указанная ветвь имеет точку экстремума.

Найдем связь между скоростью ударной волны и скоростями магнитозвуковых волн до и после разрыва, раскладывая (18) в окрестности точек 0 и 1. С учетом (12)–(14), (16) в окрестности точки 0 прямое вычисление дает

$$p - \tilde{p} = \left.\frac{d(p - \tilde{p})}{du^1}\right|_{u^1 = u^1_{(0)}} \left(u^1 - u^1_{(0)}\right) = \frac{(p_0 + \varepsilon_0)^2}{u^1_{(0)}} D\left(u^1_{(0)}\right)\left(u^1 - u^1_{(0)}\right),$$

где

$$D(u^1) = \frac{Q(u^1)}{R^*(u^1)}, \quad Q(\xi) = \xi^4(1 - c_s^2) - \xi^2\left(c_s^2 + \frac{|h|^2}{4\pi(p + \varepsilon)}\right) + \frac{(h^1)^2 c_s^2}{4\pi(p + \varepsilon)},$$

$c_s^2 = (\partial p/\partial \varepsilon)_S$ — скорость звука; все величины вычисляются здесь в окрестности точки 0.

Заметим, что уравнение $Q(\xi) = 0$ совпадает с уравнением для нормальных компонент 4-скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн, ξ_f и ξ_{sl} [5, 6], которые являются корнями функции

$$Q(\xi) \equiv (1 - c_s^2)(\xi^2 - \xi_f^2)(\xi^2 - \xi_{sl}^2).$$

Условие (18) в окрестности точки 0 дает $D(\xi)|_{\xi = u^1_{(0)}} > 0$.

Аналогичные рассуждения для конечной точки 1 с учетом переобозначений (теперь ξ_f и ξ_{sl} вычисляются в этой точке) дают $D(\xi)|_{\xi = u^1_{(1)}} < 0$. Отсюда видно, что если, например, в начальном состоянии $(u^1_{(0)})^2 > \xi^2_{f(0)}$, то в конечном состоянии (учитывая также неизменность знака R) получим $\xi^2_{f(1)} > (u^1_{(1)})^2 > (u_{A(1)})^2$.

Дополнительное ограничение снизу на скорости быстрых ударных волн относительно среды после фронта получается, если учесть совпадение знаков R^* в точках 0 и 1. Обозначим компоненту 4-скорости, которая обращает R^* в нуль, как

$$u_A^* = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{(h^1)^2}{\pi(p + \varepsilon)}} - 1\right)}.$$

Учитывая соотношение между u_A и u_A^* (Приложение 2), для параметров после фронта ударной волны получим $\xi^2_{f(1)} > (u^1_{(1)})^2 > (u^*_{A(1)})^2 \geq (u_{A(1)})^2$.

Перебор возможных вариантов с учетом этих неравенств дает следующие соотношения для трехмерных скоростей ударной волны (v_{sh}), быстрой и медленной магнитозвуковых (v_f, v_{sl}), альфвеновских (v_A) волн, а также величины v_A^* до и после разрыва, которые связаны обычным образом с компонентами 4-скоростей u_{sh}, ξ_f, ξ_{sl}, u_A, u_A^*. В случае быстрой ударной волны характерные скорости перед фронтом удовлетворяют неравенствам

$$v_{sh(0)} > v_{f(0)} > v^*_{A(0)} > v_{A(0)} > v_{sl(0)}, \tag{22}$$

а после фронта —

$$v_{f(1)} > v_{sh(1)} > v^*_{A(1)} > v_{A(1)} > v_{sl(1)}. \tag{23}$$

Для медленной ударной волны соответственно имеем

$$v_{A(0)} > v_{sh(0)} > v_{sl(0)}, \quad v_{sl(1)} > v_{sh(1)}. \tag{24}$$

Здесь учет монотонности изменения скоростей в быстрой ударной волне приводит к появлению запрещенной области $[v_{A(1)}, v^*_{A(1)}]$. Наличие этой области специфично для релятивистской МГД: в классическом пределе $v_{A(1)} \approx v^*_{A(1)}$ и указанная область исчезает. Заметим также, что $v_A = v^*_A$ для параллельной ударной волны; для перпендикулярной ударной волны обе скорости обращаются в нуль.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Полученное необходимое условие (18) существования непрерывного вязкого профиля ударной волны в релятивистской МГД гарантирует также и рост энтропии, поскольку исходит из уравнений с вязкостью. Этот критерий, а также и его вариант на языке ударных адиабат (см. Приложение 1) согласуются в случае нулевого магнитного поля с результатами работ [11, 12], в которых аналогичное условие оказывается достаточным, чтобы реализовать непрерывный профиль ударной волны и ее эволюционность. При учете магнитного поля соотношения (24) для медленных ударных волн совпадают с известными ограничениями на скорости ударной волны [5, 6], которые можно получить из условий эволюционности, в то время как неравенства (23) для быстрых ударных волн являются более жесткими.

Следует отметить, что условие (18) должно выполняться на всем участке $[n_0, n_1]$, а не только в крайних точках, так что уже поэтому оно сильнее условий эволюционности. Однако в нормальной непроводящей среде (в немагнитной релятивистской гидродинамике), где адиабаты Пуассона, а с ними и ударные адиабаты не меняют знака выпуклости, основное ограничение связано именно со скоростями ударной и звуковых волн. Здесь оно получается одинаковым как из условий эволюционности, так и из соображений существования вязкого профиля [11, 12] подобно нерелятивистскому случаю [4]. В отличие от этого при рассмотрении непрерывной структуры ударной волны в релятивистской МГД появляется новая характерная скорость v^*_A, ограничивающая скорость быстрых ударных волн относительно среды за фронтом. В нерелятивистском пределе этот параметр совпадает с обычной альфвеновской скоростью; вместе с ними совпадают и допустимые интервалы скоростей ударных волн. Таким образом, более жесткое ограничение на скорости отражает релятивистскую специфику, которая, однако, исчезает в случае перпендикулярной и параллельной релятивистских ударных волн.

В заключение еще раз отметим, что в настоящей работе используется частная модель сглаживания разрывов при помощи малой вязкости. Эта модель не является единственно возможной, в связи с чем было бы интересным рассмотреть другие способы регуляризации, в частности с учетом иных диссипативных эффектов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Другая форма условий существования ударного перехода

Для данного начального состояния $u^{\mu}_{(0)}$, $h^{\mu}_{(0)}$, V_0, p_0, где $V = 1/n$ — удельный объем, ударная адиабата [5,6] $p_H(V)$ определяет возможные ударные переходы посредством условий (5), (6). Зависимость $p_H(V)$ может быть и неоднозначной. Кривые $p(\tilde{\varepsilon}(V), V)$, $\tilde{p}(V)$ и $p_H(V)$ в силу своего определения имеют лишь общие точки пересечения: если в некоторой точке V^* выполняется $p(\tilde{\varepsilon}(V^*), V^*) = \tilde{p}(n^*)$, то это означает (ср. правые части (15) и (17)), что $T^{1\nu}_{(*)} = T^{1\nu}_{(0)}$, т. е. V^* лежит на ударной адиабате и $p(\tilde{\varepsilon}(V^*), V^*) = p_H(V^*)$. Если вязкий профиль существует, то вследствие (15) эти кривые пересекаются лишь в начальной и конечной точках, а между ними не имеют общих точек (за возможным исключением точек касания).

Исследуем взаимное расположение кривых. Обозначим через H функцию, которая определяет ударную адиабату [5]:

$$H \equiv w^2V^2 - w_0^2V_0^2 - (wV^2 + w_0V_0^2)(p - p_0) + \frac{1}{2}(wV^2 - w_0V_0^2)(\psi - \psi_0)^2 = 0,$$

где

$$w = \varepsilon + p, \quad \psi^2 = h_n^2 + |h|^2(1 - u_n^2).$$

В начальной точке этой адиабаты

$$\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{V=V_0} = \frac{2\tau_0 T_0}{V_0} \left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_{V=V_0} > 0, \quad \tau = wV^2,$$

что означает $H > 0$ на участке выше начальной точки и $H < 0$ ниже ее. Вычислим теперь значение H на кривой $p(\tilde{\varepsilon}(V), V)$, т. е. $H(p(\tilde{\varepsilon}(V), V), V)$ в окрестности начальной точки. После громоздких, но несложных вычислений получаем

$$H\left(p(\tilde{\varepsilon}(V), V), V\right) \approx \frac{\tau_0}{V_0}\left(\frac{dp(\tilde{\varepsilon}(V), V)}{dV} - \frac{d\tilde{p}(V)}{dV}\right)_0 (V - V_0)^2. \qquad (\text{П.1})$$

Учитывая, что знак разности $p(\tilde{\varepsilon}(V), V) - \tilde{p}(V)$ в окрестности начальной точки определяет знак (П.1), в этой окрестности имеем

$$(V_1 - V_0)(p_H(V) - \tilde{p}(V)) \geq 0. \qquad (\text{П.2})$$

Это условие, рассматриваемое вместе с отсутствием пересечений ударной адиабаты и шаблонной кривой, является эквивалентной формой критерия существования ударной волны. Если к тому же $p_H(V)$ — однозначная функция, то, поскольку между начальной и конечной точками пересечений этих кривых нет, знак левой части (П.2) остается неизменным всюду между этими точками. В этом случае условие (П.2) должно выполняться на всем интервале между V_0 и V_1 и эквивалентно требованию (18). Этот результат согласуется с выводами работ [11, 12] в случае нулевого магнитного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Соотношения между характерными скоростями

Как известно, в релятивистской МГД, как и в классической, $v_f > v_A > v_{sl}$ до и после фронта ударной волны.

Для сравнения величин u_A и u_A^*, которые обращают в нуль соответственно R и R^*, заметим, что они не зависят от параллельных фронту ударной волны движений системы отсчета. Тогда в системе, где $u^2 = 0$, учитывая ортогональность 4-х векторов u^μ и h^μ, получаем

$$R = \left[p + \varepsilon + \frac{(h^2)^2}{4\pi}\right](u^1)^2 - \frac{(h^1)^2}{4\pi\left[1 + (u^1)^2\right]}.$$

Сравнивая выражения для R^* и R, имеем $(u_A)^2 \le (u_A^*)^2$. Из этих соотношений видно, что $u_A = u_A^*$ для параллельной ударной волны. Для перпендикулярной ударной волны обе скорости обращаются в нуль.

В нерелятивистском пределе $p^* + \varepsilon^* \approx p + \varepsilon$, поэтому

$$(u_A^*)^2 \approx \frac{(h^1)^2}{4\pi(p + \varepsilon)} \approx (u_A^1)^2,$$

и условие (23) совпадает в этом пределе с условиями эволюционности в классической МГД.

Подставляя u_A^* в явное выражение для $Q(\xi)$, имеем

$$Q(u_A^*) \equiv (u_A^*)^4\left[(u_A^*)^2 + 1\right](1 - c_S^2) - (u_A^*)^2\frac{p^* + \varepsilon^*}{p + \varepsilon} + \frac{(h^1)^2 c_S^2}{4\pi(p + \varepsilon)} = \frac{p^* + \varepsilon^*}{p + \varepsilon}\left[(u_A)^2 - (u_A^*)^2\right] < 0.$$

Поскольку ξ_f^2, ξ_{sl}^2 — корни квадратного трехчлена $Q(\xi)$, отсюда вытекает соотношение $\xi_{sl}^2 < (u_A)^2 < \xi_f^2$.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
2. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ **35**, 731 (1958).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
4. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений*, Наука, Москва (1978).
5. A. Lichnerowicz, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York (1967).
6. Н. Р. Сибгатуллин, *Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях*, Наука, Москва (1984).
7. L. Van Hove, Z. Phys. C **21**, 93 (1983).
8. H. W. Barz, L. P. Csernai, B. Kampfer, and B. Lukacs. Phys. Rev. D **32**, 115 (1985).
9. P. Danielewicz and P. V. Ruuskanen. Phys. Rev. D **35**, 344 (1987).
10. J. P. Blaizot and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **36**, 916 (1987).
11. K. A. Bugaev, M. I. Gorenstein, and V. I. Zhdanov, Z. Phys. C **39**, 365 (1988).
12. К. А. Бугаев, М. И. Горенштейн, В. И. Жданов, ТМФ **80**, 138 (1989).
13. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, ПММ **25**, 125 (1961).
14. R. Menikoff and B. J. Plohr, Rev. Mod. Phys. **61**, 75 (1989).
15. Н. Н. Кузнецов, ЖЭТФ **88**, 470 (1985).
16. V. I. Zhdanov and P. V. Titarenko, Nonlin. Math. Phys. **4**, 214 (1997).