# СТАБИЛИЗАЦИИ РИДБЕРГОВСКОГО АТОМА И КОНКУРЕНЦИЯ Л- И V-КАНАЛОВ ПЕРЕХОДОВ

Н. П. Полуэктов, М. В. Федоров\*

Институт общей физики Российской академии наук 117942, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 1998 г.

Теоретически исследуются фотоионизация ридберговского атома и его стабилизация в сильном лазерном поле. Анализируется роль переходов рамановского типа между соседними ридберговскими уровнями через континуум и через резонансные ридберговские уровни меньшей энергии (переходы л- и V-типа, соответственно). Определены условия, при которых возможно экспериментальное наблюдение этого явления. Описаны особенности стабилизации, обусловленной переходами V-типа.

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интересных и широко обсуждаемых явлений в области взаимодействия атомов с сильным лазерным полем является стабилизация атомов, т.е. повышение их устойчивости по отношению к фотоионизации с ростом интенсивности лазерного поля. В работах [1] и [2] (и в больших циклах последующих работ) были предложены и описаны два существенно различных механизма стабилизации: адиабатическая или высокочастотная стабилизации [1] и интерференционная стабилизация ридберговских атомов [2]. Согласно теории интерференционной стабилизации при взаимодействии ридберговского атома с полем световой волны за счет рамановских переходов Л-типа (через континуум) происходит эффективное когерентное перезаселение атомных уровней  $E_n$ , близких к первоначально заселенному уровню  $E_{na}$ . Возникающая в результате когерентная суперпозиция ридберговских состояний оказывается устойчивой по отношению к фотоионизации, в силу того что переходы с различных ридберговских состояний в континуум интерферируют и взаимно погашают друг друга, затрудняя ионизацию атома. Экспериментальное наблюдение интерференционной стабилизации ридберговских атомов и когерентного перезаселения ридберговских уровней, описано, соответственно, в работах [3] и [4].

В принципе, помимо переходов  $\Lambda$ -типа, когерентное перезаселение ридберговских уровней может осуществляться и за счет рамановских переходов V-типа, через нижележащие резонансные атомные уровни, если таковые имеют место (см. рис. 1). В работе [4] был сделан вывод, что V-переходы не играют роли в перераспределении населенностей риберговских уровней, что в общем случае вряд ли верно.

Следует отметить, что в работах [5–7] перераспределение населенностей ридберговских уровней исследовалось теоретически с учетом обоих каналов переходов,  $\Lambda$ - и V-типа. Однако степень значимости V-канала и условия, при которых он является опреде-

<sup>\*</sup>E-mail: fedorov@theor.msk.ru





ляющим, не были найдены и исследованы в полной мере, в частности, ввиду отсутствия ясного понимания соотношения между матричными элементами  $\Lambda$ - и V-переходов.

В настоящей работе проблема интерференционной стабилизации ридберговских атомов исследуется теоретически с учетом как  $\Lambda$ -, так и V-каналов переходов при использовании известных выражений для матричных элементов, вычисленных в квазиклассическом (ВКБ) приближении [8–10]. Раздел 2 посвящен математической формулировке задачи и используемым в процессе решения приближениям. В разд. 3 представлена простейшая трехуровневая модель, которая допускает аналитическое решение задачи и при определенных условиях позволяет качественно исследовать соотношение и роль переходов как  $\Lambda$ -, так и V-типа в интерференционной стабилизации. При больших расстройках использование трехуровневой модели становится некорректным. Простейшим обобщением трехуровневой модели на нерезонансный случай является четырехуровневая модель, рассмотренная в разд. 4. В разд. 5 приведены результаты численного анализа задачи с включением в рассмотрение до 22-х уровней, что позволяет проверить справедливость выводов, сделанных на основании аналитических решений, а также сделать количественные оценки величин, измеряемых в эксперименте. В Заключении содержится краткое резюме состояния проблемы и сформулированы условия экспериментального наблюдения стабилизации ридберговского атома в лазерном поле за счет рамановских переходов V-типа.

#### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие атома с классическим полем световой волны, напряженность электрического поля которой в дипольном приближении задаем в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) \cos(\omega t), \tag{1}$$

где  $\omega$  — частота, а  $\varepsilon_0(t)$  — зависящая от времени амплитуда напряженности (огибающая) импульса поля,  $\varepsilon_0(t) \to 0$  при  $t \to \pm \infty$ . Пусть до прихода лазерного импульса  $(t \to -\infty)$  атом находится в некотором возбужденном (ридберговском) *s*-состоянии с энергией  $E_{n_0} = -1/2n_0^2$ , где  $n_0 \gg 1$ ; здесь и далее используется атомная система единиц. Пусть частота  $\omega$  превосходит энергию связи электрона в состоянии  $\varphi_{n_0}, \omega > |E_{n_0}|$ , т. е. возможен однофотонный переход из этого состояния в континуум. Рамановские переходы  $\Lambda$ -типа — это переходы через континуум (например,  $\varphi_{n_0} \to$  континуум  $\to \varphi_n$ ), сопровождаемые виртуальным поглощением и излучением кванта  $\omega$  и возбуждением ридберговских уровней  $E_n$ , близких к первоначально заселенному уровню  $E_{n_0}$ . В силу того что, вообще говоря,  $E_n \neq E_{n_0}$ , такие переходы могут быть эффективными только в достаточно сильном поле.

Пусть структура атомного спектра такова, что наряду с переходами  $\Lambda$ -типа (через континуум) возможны также эффективные резонансные (или почти резонансные) переходы между состояниями  $\varphi_n$  и ридберговскими *p*-состояниями  $\varphi_{n'}$  с меньшими значениями главного квантового числа,  $n' < n_0$ , и энергии,  $E_{n'} < E_{n_0}$ . Рамановские переходы между этими группами состояний (например,  $\varphi_{n_0} \to \varphi_{n'} \to \varphi_n$ ) будем называть переходами V-типа (см. рис. 1).

Волновая функция атома  $\Psi(t)$  в поле  $\varepsilon(t)$  (1) может быть разложена по базису волновых функций свободного атома. При этом проекция  $\Psi(t)$  на связанные состояния атома,  $\Psi_{bound}(t)$ , представляется в виде суперпозиции функций  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n'}$ :

$$\Psi_{bound}(t) = \sum_{n} a_n(t)\varphi_n + \sum_{n'} a_{n'}(t)\varphi_{n'},$$
(2)

где  $a_n(t)$  и  $a_{n'}(t)$  — амплитуды вероятности нахождения атома на уровнях  $E_n$  и  $E_{n'}$ , соответственно. Благодаря ионизации атома норма  $\Psi_{bound}(t)$  не сохраняется и определяет вероятность ионизации за импульс:

$$w_i = 1 - \langle \Psi_{bound}(t) | \Psi_{bound}(t) \rangle |_{t \to \infty}.$$
(3)

Под стабилизацией атома мы подразумеваем такую ситуацию, когда при превышении полем определенного порогового значения вероятность ионизации  $w_i$  становится убывающей функцией пиковой напряженности поля в импульсе,  $\varepsilon_{0 max}$ , или выходит на постоянное значение меньшее единицы.

Уравнение Шредингера для полной функции атома в поле  $\Psi(t)$  может быть сведено к уравнению для  $\Psi_{bound}(t)$  или к эквивалентной системе уравнений для амплитуд вероятности  $a_n(t)$  и  $a_{n'}(t)$  с помощью процедуры, известной как адиабатическое исключение континуума [11,12]. В рамках такого подхода  $\Lambda$ -переходы между близкими ридберговскими уровнями (например,  $E_n$  и  $E_m$ ) описываются тензором ионизационных ширин  $\Gamma_{n,m}$ :

$$\Gamma_{n,m} = 2\pi V_{n,E} V_{E,m} \Big|_{E=E_m+\omega},\tag{4}$$

где E — энергия электрона в промежуточном p-состоянии непрерывного спектра,  $V_{a,b} = \langle \varphi_a | - \mathbf{d} \varepsilon_0 / 2 | \varphi_b \rangle$  — матричные элементы переходов и  $\mathbf{d}$  — дипольный момент атома.

Принимая во внимание сказанное и учитывая как  $\Lambda$ -, так и V-переходы, запишем уравнения для амплитуд вероятности  $a_n(t)$  и  $a_{n'}(t)$  в приближении «вращающейся волны» (резонансное приближение [11, 12]) в виде

$$i\dot{a}_{n'}(t) = (E_{n'} + \omega)a_{n'}(t) + \sum_{n} V_{n',n}a_{n}(t),$$
  

$$i\dot{a}_{n}(t) = E_{n}a_{n}(t) + \sum_{n'} V_{n,n'}a_{n'}(t) - i\sum_{m} \frac{\Gamma_{n,m}}{2}a_{m}(t).$$
(5)

Как было отмечено выше, для матричных элементов переходов  $V_{a,b}$  существуют весьма простые и удобные аналитические выражения, полученные в квазиклассическом (ВКБ) приближении [8–10]:

$$V_{n,n'} \sim \frac{\varepsilon_0}{(nn')^{3/2} \omega^{5/3}}, \quad V_{n,E} \sim \frac{\varepsilon_0}{n^{3/2} \omega^{5/3}}.$$
 (6)

При больших n и n' зависимость матричных элементов  $V_{n,n'}$  и  $V_{n,E}$  от n и n' становится достаточно медленной, и приближенно ею можно пренбречь, полагая  $n \approx n_0$  и  $n' \approx n'_0$ , где  $n'_0$  — главное квантовое число уровня  $E_{n'_0}$  (из серии  $E_{n'}$ ), наиболее близкого к резонансу с уровнем  $E_{n_0}$ , т. е. уровня, соответствующего минимальной расстройке резонанса

$$\delta = E_{n_0'} + \omega - E_{n_0}.\tag{7}$$

В приближении  $n \approx n_0$ ,  $n' \approx n'_0$  из уравнений (4), (6) находим

$$\Gamma_{n,m} \approx \Gamma = \text{const} \sim \frac{\varepsilon_0^2}{n_0^3 \omega^{10/3}},$$

$$V_{n,n'} \approx \Omega_R = \text{const} \sim \frac{\varepsilon_0}{(n_0 n_0')^{3/2} \omega^{5/3}},$$
(8)

где  $\Omega_R$  — аналог частоты Раби в двухуровневой системе [13]. Ионизационная ширина Г и частота Раби  $\Omega_R$  (8) — это основные параметры, характеризующие рассматриваемую систему. Дополнительными, но тоже важными параметрами системы являются расстройка резонанса между уровнями  $E_{n_0}$  и  $E_{n'_0}$ ,  $\delta$  (7), и расстояния между соседними ридберговскими уровнями в областях энергий ~  $E_n$  и  $E_{n'}$ ,  $\Delta$  и  $\Delta'$ , соответственно:

$$\Delta = E_{n_0+1} - E_{n_0} \approx \frac{1}{n_0^3}, \quad \Delta' = E_{n_0'+1} - E_{n_0'} \approx \frac{1}{n_0'^3}.$$
(9)

## 3. ТРЕХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ И РОЛЬ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМА С ПОЛЕМ

Наиболее простой физической моделью, представляющей изучаемую систему, является модель, в которой учитывается только два ридберговских уровня  $E_1$  и  $E_2$  в серии  $\{E_n\}$  (например,  $E_{n_0}$  и  $E_{n_0+1}$ ) и один уровень  $E_0$  ( $E_{n_0'}$ ) нижележащей серии уровней





 ${E_{n'}}$  (рис. 2). Главное преимущество данной модели состоит в ее простоте, что обеспечивает возможность получения аналитических решений, из которых наиболее ясно видно, какие из введенных в конце предыдущего раздела параметров определяют поведение системы в различных диапазонах полей.

В рамках трехуровневой модели система (5) состоит из трех уравнений:

$$i\dot{a}_{0}(t) = (E_{0} + \omega)a_{0}(t) + \Omega_{R} [a_{1}(t) + a_{2}(t)],$$

$$i\dot{a}_{1}(t) = \Omega_{R}a_{0}(t) + E_{1}a_{1}(t) - i\frac{\Gamma}{2} [a_{1}(t) + a_{2}(t)],$$

$$i\dot{a}_{2}(t) = \Omega_{R}a_{0}(t) + E_{2}a_{2}(t) - i\frac{\Gamma}{2} [a_{1}(t) + a_{2}(t)].$$
(10)

В модели мгновенного включения и выключения взаимодействия (т.е. для импульсов прямоугольной формы) в течение времени действия импульса его огибающая постоянна, так же как и параметры  $\Omega_R$  и Г. В этом случае система (10) — это система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая имеет решения вида

$$a_k(t) = b_k \exp(-i\gamma t), \tag{11}$$



Рис. 3. Соотношения между параметрами задачи в различных диапазонах напряженности, представление характеристических полей

где  $b_k$  — константы, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений

$$(E_{0} + \omega)b_{0} + \Omega_{R}(b_{1} + b_{2}) = \gamma b_{0},$$
  

$$\Omega_{R}b_{0} + \left(E_{1} - i\frac{\Gamma}{2}\right)b_{1} - i\frac{\Gamma}{2}b_{2} = \gamma b_{1},$$
  

$$\Omega_{R}b_{0} - i\frac{\Gamma}{2}b_{1} + \left(E_{2} - i\frac{\Gamma}{2}\right)b_{2} = \gamma b_{2}.$$
(12)

Постоянная  $\gamma$  имеет смысл комплексной квазиэнергии системы [14, 15], и ее значения могут быть определены как собственные значения матрицы коэффициентов в левой части уравнений (12). Поскольку система (12) — это система однородных уравнений, условие ее разрешимости определяется равенством нулю ее детерминанта. Это есть характеристическое уравнение системы, которое в данном случае может быть записано в виде

$$\Omega_R^2(2x-\Delta) = (x-\delta) \left[ x(x-\Delta) + i\frac{\Gamma}{2}(2x-\Delta) \right], \tag{13}$$

где x — квазиэнергия, отсчитываемая от уровня  $E_1$ ,  $x = \gamma - E_1$ ,  $\Delta = E_2 - E_1$  и  $\delta = E_0 + \omega - E_1$ . На рис. 3 представлены зависимости  $\Omega_R$  и  $\Gamma$  от амплитуды напряженности поля  $\varepsilon_0$ . Область полей, в которых могут иметь место отклонения от теории возмущений — это та область, где либо  $\Omega_R$ , либо  $\Gamma$ , превосходят расстояние  $\Delta$  между уровнями  $E_1$  и  $E_2$  (горизонтальная линия на рис. 3). Пусть  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — решения уравнений  $\Omega_R(\varepsilon) = \Delta$  и  $\Gamma(\varepsilon) = \Delta$ , соответственно. Третье характеристическое значение напряженности поля,  $\varepsilon_3$ , отмеченное на рис. 3, определено как решение уравнения  $\Gamma(\varepsilon) = \Omega_R(\varepsilon)$ , т.е. это то поле, при котором частота Раби и ионизационная ширина сравниваются друг с другом. В квазиклассическом приближении с помощью формул (6)–(9) находим явный вид характеристических полей  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ :

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{n_0'}{n_0}\right)^{3/2} \omega^{5/3}, \quad \varepsilon_2 = \omega^{5/3}, \quad \varepsilon_3 = \left(\frac{n_0}{n_0'}\right)^{3/2} \omega^{5/3}.$$
(14)

Этим значениям поля соответствуют следующие значения параметра  $V = \varepsilon / \omega^{5/3}$ :

$$V_1 = \left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^{3/2}, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = \left(\frac{n_0}{n'_0}\right)^{3/2}.$$
 (15)

Эти величины расположены в порядке возрастания, и каждая последующая отличается от предыдущей множителем  $(n_0/n'_0)^{3/2}$ . Этот множитель может достигать достаточно больших значений, и, таким образом, точки  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  могут соответствовать существенно различным диапазонам полей. Так, например, в условиях эксперимента [4] квантовые числа  $n_0$  и  $n'_0$  были равны 26 и 5 соответственно, что дает  $(n_0/n'_0)^{3/2} \sim 12$ . Соответствующие значения характеристических полей:

$$\varepsilon_1 = 7 \cdot 10^5, \quad \varepsilon_2 = 8 \cdot 10^6, \quad \varepsilon_3 = 9 \cdot 10^7 \text{ BT/cm.}$$
 (16)

Как видим, эти поля отличаются друг от друга на порядок. Ниже основное внимание будет уделено ситуации, отвечающей большому значению параметра  $(n_0/n'_0)^{3/2}$ . При этом также проанализировано, какие отличия проявляются в динамике ионизации, когда отношение  $n_0/n'_0$  становится порядка единицы.

Как следует из приведенных оценок и рис. 3, если параметр  $(n_0/n'_0)^{3/2}$  велик, то существует весьма широкий интервал полей  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_3$ , в котором теория возмущений неприменима ( $\Omega_R > \Delta$ ) и при этом частота Раби  $\Omega_R$  намного больше ионизационной ширины Г. В этих условиях резонансные переходы V-типа могут играть определяющую роль для эффекта стабилизации атома. Учет резонансной связи с нижележащим уровнем  $E_0$  приводит к тому, что «порог нелинейности», т. е. значение поля, при котором наступают отклонения от теории возмущений ( $\varepsilon_1$ ), лежит значительно ниже, чем в случае, когда такая связь отсутствует (в этом случае пороговым для стабилизации является поле  $\varepsilon_2$ , т. е. корень уравнения  $\Gamma(\varepsilon) = \Delta$ ).

Перейдем теперь к анализу уравнения (13) для определения комплексных квазиэнергий системы. Прежде всего рассмотрим случай, когда расстройка  $\delta$  равна половине расстояния между ридберговскими уровнями  $\Delta$ ,  $\delta = \Delta/2$ . Легко заметить, что в этом случае уравнение (13) допускает точное аналитическое решение, и корни (13) имеют вид

$$x_1 = \frac{\Delta}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{\Delta}{2} - i\frac{\Gamma}{2} \pm \beta, \quad \beta = \sqrt{2\Omega_R^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}.$$
 (17)

Первое из уравнений (17) показывает, что уровень  $x_1$  стабилен  $(\text{Im}[x_1(\varepsilon_0)] \equiv 0)$ и его положение не зависит от поля ( $\text{Re}[x_1(\varepsilon_0)] = \Delta/2 = \text{const}$ ). Что касается корней  $x_{2,3}(\varepsilon_0)$  (17), то функции  $|\text{Im}[x_{2,3}(\varepsilon_0)]|$  являются монотонно растущими вплоть до значения напряженности  $\varepsilon_0 \approx 2\varepsilon_3$ , при котором  $\Gamma = 2\Omega_R$  и  $\beta = 0$ . Монотонный рост функций  $|\text{Im}[x_{2,3}(\varepsilon_0)]|$  означает, что квазиэнергетические уровни  $x_{2,3}$  не сужаются во всем диапазоне полей  $0 < \varepsilon_0 < 2\varepsilon_3$ . Такое поведение квазиэнергетических уровней находится в разительном контрасте с поведением квазиэнергетических уровней в отсутствие V-переходов, т. е. при  $\Omega_R = 0$ : при учете только  $\Lambda$ -переходов квазиэнергетические уровни сужаются, начиная с напряженности поля  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_2$ , что и является причиной интерференционной стабилизации  $\Lambda$ -типа. Следовательно, по сравнению со схемой, в которой учитываются только  $\Lambda$ -переходы, рассматриваемая здесь схема (рис. 2) имеет качественные отличия: в такой схеме при  $\delta = \Delta/2$  отсутствуют сужение уровней (вплоть до  $\varepsilon_0 \approx 2\varepsilon_3$ ) и индуцированная полем стабилизация атома, но зато возникает один квазиэнергетический уровень ( $x_1$ ), стабильный при любых значениях напряженности поля от 0 до  $\varepsilon_3$ .

«Абсолютная» стабильность уровня  $x_1$  является результатом специального выбора расстройки  $\delta$ . При  $\delta \sim \Delta$ , но  $\delta \neq \Delta/2$  у  $x_1$  появляется ширина, малая по сравнению с ионизационной шириной  $\Gamma$  и пропорциональная ( $\delta - \Delta/2$ )<sup>2</sup>. В зависимости от напряженности  $\varepsilon_0$ , ширина уровня | Im[ $x_1(\varepsilon_0)$ ]| имеет максимум при  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$  и при  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$  убывает, что свидетельствует о сужении уровня и стабилизации атома [16]. Таким образом, в общем случае  $\delta \neq \Delta/2$  (но  $\delta \sim \Delta$ ), в рассматриваемой трехуровневой системе (рис. 2) один из трех квазиэнергетических уровней  $(x_1)$  по мере роста поля сперва испытывает обычное ионизационное уширение, а затем — сужение, причем сужение начинается с аномально низких полей (по сравнению со схемой без V-переходов).

При больших значениях расстройки, в принципе, решения уравнения (13) можно найти, представляя их в виде разложения по степеням  $1/\delta$ . Однако здесь мы эти решения не приводим, ввиду того что сама по себе применимость такого разложения оказывается формально оправданной только при очень больших расстройках,

$$|\delta| > \frac{\Omega_R^2}{\Gamma} = \frac{1}{n_0^{\prime 3}} = \Delta', \tag{18}$$

т.е. при расстройках, превышающих расстояние между соседними ридберговскими уровнями  $E_{n'}$ . При этом более адекватной является четырехуровневая модель.

Решение задачи о фотоионизации не исчерпывается нахождением квазиэнергий. В принципе, необходимо решение начальной задачи, т. е. нахождение полной волновой функции электрона в поле  $\Psi(t)$  или, по крайней мере, ее проекции на связанные состояния  $\Psi_{bound}(t)$ . При мгновенном включении и выключении взаимодействия эта задача может быть решена методом квазиэнергий и квазиэнергетических состояний. При этом функция  $\Psi_{bound}(t)$  представляется в виде суперпозиции квазиэнергетических функций

$$\Psi_{bound}(t) = \sum_{k} C_k \exp(-i\gamma_k t)\psi_k,$$
(19)

где  $\psi_k$  — квазиэнергетические функции, соответствующие квазиэнергиям  $\gamma_k$  и определяемые из решения уравнений типа (12), а коэффициенты разложения  $C_k$  определяются из начальных условий [17].

Для трехуровневой системы (рис. 2) точное аналитическое решение начальной задачи возможно в случае, когда расстройка  $\delta$  равна половине расстояния между уровнями  $E_1$  и  $E_2$ ,  $\delta = \Delta/2$ . Опуская громоздкие выкладки, приведем результат:

$$w_{i}(t) = 1 - \langle \Psi_{bound}(t) | \Psi_{bound}(t) \rangle = \frac{\Omega_{R}^{2} + (\Delta/2)^{2}}{2\Omega_{R}^{2} + (\Delta/2)^{2}} \left[ 1 - \exp(-\Gamma t) \right] + \frac{\Gamma}{2\beta} \frac{\Omega_{R}^{2}}{2\Omega_{R}^{2} + (\Delta/2)^{2}} \exp(-\Gamma t) \sin(2\beta t) - \frac{\Gamma^{2}}{2\beta^{2}} \frac{\Omega_{R}^{2} + (\Delta/2)^{2}}{2\Omega_{R}^{2} + (\Delta/2)^{2}} \exp(-\Gamma t) \sin^{2}(\beta t), \quad (20)$$

где параметр  $\beta$  определен уравнением (17).

Согласно уравнению (20) атом ионизуется за время  $t_i \sim 1/\Gamma$ . При этом, однако, даже в асимптотическом пределе  $t \gg t_i$  существует конечная, отличная от нуля остаточная вероятность нахождения атома на дискретных уровнях  $w_{res}$ :

$$w_{res} = \frac{\Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + (\Delta/2)^2}.$$
(21)

Ввиду того что  $\Omega_R \propto \varepsilon_0$ , в области слабых полей ( $\Omega_R < \Delta/2$ ) остаточная вероятность  $w_{res}(\varepsilon_0)$  (21) является растущей функцией напряженности поля  $\varepsilon_0$ . При  $\Omega_R > \Delta/2$  вероятность ионизации  $w_{res}(\varepsilon_0)$  насыщается на уровне 1/2. Следует подчеркнуть, что данный предел характерен только для трехуровневой модели. При рассмотрении модели с большим числом уровней предельное значение остаточной вероятности  $w_{res}(\varepsilon_0)$  при

больших значениях  $\varepsilon_0$  будет другим, но, тем не менее, оно будет конечным и, следовательно, вероятность ионизации никогда не достигнет единицы. Подробнее вопрос о влиянии числа уровней, вовлеченных в рассмотрение, на результаты задачи, рассматривается ниже в разд. 4 при численном решении задачи. Отметим, что конечность остаточной вероятности (вероятности того, что атом не ионизуется в пределе лазерного импульса сколь угодно большой длительности) существенно связана с учетом V-переходов: в случае, когда V-канал отсутствует, асимптотическая остаточная вероятность равна нулю. Этот вывод следует, в частности, и из уравнения (21), в котором отсутствие V-канала соответствует случаю  $\Omega_R \equiv 0$  и, следовательно,  $w_{res} \equiv 0$ .

Из (20) следует, что для проявления V-стабилизации необходим лазерный импульс значительной длительности. Действительно, если длительность импульса t столь мала, что выполняются неравенства  $\Gamma t \ll 1$  и  $\beta t \ll 1$ , то выражение в правой части уравнения (20) можно разложить в ряд Тейлора по времени t, что в линейном приближении приводит уравнение (20) к виду, тождественному результату теории возмущений («золотое правило Ферми») [18]:

$$w_i(t) = \Gamma t. \tag{22}$$

Очевидно, что уравнение (22) не описывает никакой стабилизации, так как согласно (22)  $w_i \propto \varepsilon_0^2$ , т.е. вероятность ионизации монотонно растет с ростом напряженности поля.

В промежуточной области длительностей импульса,  $\beta^{-1} \ll t \ll \Gamma^{-1}$ , как нетрудно проверить, основной вклад в вероятность ионизации  $w_i(t)$  вносит первое слагаемое в правой части уравнении (20). В силу предположения  $\Gamma t \ll 1$  экспонента  $\exp(-\Gamma t)$  может быть разложена в ряд, что дает

$$w_i(t) \approx \frac{\Omega_R^2 + (\Delta/2)^2}{2\Omega_R^2 + (\Delta/2)^2} \,\Gamma t.$$
(23)

Это выражение также не описывает никакой стабилизации, так как соответствующая вероятность ионизации  $w_i(\varepsilon_0)$  по-прежнему остается монотонно растущей функцией напряженности поля  $\varepsilon_0$ .

И, наконец, только при длительности импульса t, превышающей время ионизации атома  $1/\Gamma$ ,  $\Gamma t > 1$ , вероятность ионизации  $w_i(\varepsilon_0)$  насыщается и выходит на уровень

$$w_i = 1 - w_{res},\tag{24}$$

где остаточная вероятность нахождения на дискретных уровнях  $w_{res}$  определяется уравнением (21). По нашему определению, насыщение функции  $w_i(\varepsilon_0)$  на уровне меньшем единицы интерпретируется как стабилизация атома. При длительности импульса порядка классического кеплеровского периода,  $t \sim T_K$ , полученное условие стабилизации  $\Gamma t \sim 1$  выполняется в полях с напряженностью  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_2$ , т.е. при тех же условиях, что и в случае интерференционной стабилизации за счет рамановских переходов  $\Lambda$ -типа. Если же интерсоваться областью значительно более слабых полей,  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ , то в этом случае условие стабилизации  $\Gamma t > 1$  накладывает весьма жесткое ограничение снизу на длительность импульса t:

$$t > (n_0/n_0')^3 T_K.$$
 (25)

Степень жесткости условия (25) может быть оценена, например, при значениях параметров, отвечающих условиям эксперимента [4]:  $T_K \approx 3$  пс,  $n_0 = 26$ ,  $n'_0 = 5$  и  $(n_0/n'_0)^3 \approx 10^2$ . При этом условие (25) выполняется, если t > 50 пс. Следует отметить, что согласно результатам численных расчетов, приведенных ниже (разд. 4), условие (25) несколько смягчается при учете большего числа уровней в рассматриваемой модельной системе. Тем не менее по-прежнему стабилизация за счет переходов V-типа может наблюдаться в области сравнительно слабых полей,  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ , только если длительность импульса t достаточно велика и, по крайней мере, превышает несколько кеплеровских периодов. В этом плане стабилизация за счет переходов V-типа радикально отличается от стабилизации за счет переходов  $\Lambda$ -типа, которая проявляется наиболее ярко при  $t < T_K$ .

Везде в настоящем разделе предполагалось, что  $n_0 \gg n'_0$ . Следует отметить, что столь сильное неравенство может и не выполняться. Например, при частоте  $\omega$ , близкой к энергии связи электрона на уровне  $E_{n_0}$ ,  $\omega \approx 1/2n_0^2$ , и, как следует из законов сохранения энергии для  $\Lambda$ - и V-переходов,  $n'_0 \approx n_0/\sqrt{2}$ . Следовательно, вообще говоря, имеет смысл и рассмотрение случая  $n_0 \sim n'_0$ . Легко видеть, что в такой ситуации все три характеристических поля  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_2$ , определенные уравнением (14) и диаграммой на рис. 3, оказываются близкими друг к другу,  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon_3$ . Это значит, что при  $n_0 \sim n_0'$  область существования V-стабилизации  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_3$  практически вырождается в точку, и единственным реализуемым механизмом стабилизации остается стабилизация за счет переходов Л-типа. Таким образом, для существования нетривиальной области параметров, в которой может иметь место стабилизация атома за счет переходов V-типа, необходимо достаточное превышение частоты поля над пороговым значением  $\omega \gg |E_{n_0}|$ . При этом для реализации резонансов с нижележащими ридберговскими уровнями необходимо, чтобы частота  $\omega$  была не слишком велика,  $\omega \ll |E_q|$ , где Е<sub>а</sub> — энергия основного состояния атома. В целом условия на величину частоты лазерного поля, обеспечивающие возможность существования эффекта стабилизации атома за счет переходов V-типа, могут быть записаны в виде неравенств

 $|E_{n_0}| \ll \omega \ll |E_g|. \tag{26}$ 

#### 4. ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ АТОМА

Как было отмечено в предыдущем разделе, при большой величине расстройки,  $\delta \geq \Delta'$  (18), рассмотренная выше трехуровневая модель становится неприменимой. Естественным простейшим обобщением трехуровневой модели является модель четырех уровней,  $E_{n_0} \equiv E_1$ ,  $E_{n_0+1} \equiv E_2$  и, например,  $E_{n'_0-1} \equiv E_{1'}$  и  $E_{n'_0} \equiv E_{2'}$  (см. рис. 4).

Для четырехуровневой модели система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{split} i\dot{a}_{1'}(t) &= (E_{1'} + \omega)a_{1'}(t) + \Omega_R \left[a_1(t) + a_2(t)\right], \\ i\dot{a}_{2'}(t) &= (E_{2'} + \omega)a_{2'}(t) + \Omega_R \left[a_1(t) + a_2(t)\right], \\ i\dot{a}_1(t) &= \Omega_R \left[a_{1'}(t) + a_{2'}(t)\right] + E_1a_1(t) - i\frac{\Gamma}{2} \left[a_1(t) + a_2(t)\right], \\ i\dot{a}_2(t) &= \Omega_R \left[a_{1'}(t) + a_{2'}(t)\right] + E_2a_2(t) - i\frac{\Gamma}{2} \left[a_1(t) + a_2(t)\right], \end{split}$$

$$(27)$$

где, по-прежнему,  $\Gamma$  и  $\Omega_R$  определены уравнениями (8).





Характеристическое уравнение системы (27) — это уравнение четвертого порядка, являющееся обобщением уравнения (13):

$$(x-\delta)(x-\delta+\Delta')\left[x(x-\Delta)+i\frac{\Gamma}{2}(2x-\Delta)\right] = \Omega_R^2(2x-\Delta)\left[2(x-\delta)+\Delta'\right], \quad (28)$$

где, как и прежде, x — это квазиэнергия, отсчитанная от уровня  $E_1$ ,  $x = \gamma - E_1$ , а параметры  $\delta$ ,  $\Delta$  и  $\Delta'$  определены уравнениями (7) и (9).

Чтобы проанализировать аналитически в рамках простых формул область больших расстроек  $\delta \geq \Delta'$ , рассмотрим наиболее простой случай, когда  $\delta = \Delta'/2$ . Считая  $\Delta'$  большим параметром задачи ( $\Delta' \gg \Delta$ ), замечаем, что при  $\delta = \Delta'/2$  правая часть уравнения (28) не содержит  $\Delta'$ . Поэтому в нулевом приближении по  $1/\Delta'$  решения уравнения (28) совпадают с решениями этого же уравнения, но с нулевой правой частью:

$$x_1^{(0)} = \delta, \quad x_2^{(0)} = \delta - \Delta, \quad x_{3,4}^{(0)} = \frac{\Delta}{2} - i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}.$$
 (29)

Решения (29) вообще не зависят от частоты Раби  $\Omega_R$ . Это значит, что в нулевом порядке по  $1/\Delta'$  при  $\delta = \Delta'/2$  в силу интерференции взаимодействие уровней  $E_{1,2}$  с уровнями  $E_{1',2'}$  оказывается подавленным. Поэтому решения (29) — это те значения квазиэнергии, которые получились бы для системы двух уровней,  $E_1$  и  $E_2$ , связанных с континуумом  $(x_{3,4})$ , и двух нижележащих уровней  $E_{1'}$  и  $E_{2'}$ , которые не связаны ни друг с другом, ни с верхними уровнями, ни с континуумом  $(x_{1,2})$ . В связи с этим понятно, что решения  $x_{3,4}$  (29) описывают сужение одного из уровней при  $\Gamma > \Delta$  ( $\varepsilon_0 > \varepsilon_2$ ), соответствующее интерференционной стабилизации атома за счет переходов  $\Lambda$ -типа [2]. Требование малости поправок к решению (29), вносимых ненулевой правой частью (28), приводит к условию

$$|\delta| < \Omega_R, \tag{30}$$

которое выполняется вплоть до полей  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_3$ . Следовательно, в случае, когда расстройка  $\delta$  порядка половины расстояния между нижележащими уровнями  $\Delta'$ , имеет место стабилизация  $\Lambda$ -типа. Этот результат не может быть получен в рамках моделей, содержащих только один уровень в серии уровней  $\{E_n'\}$  (см. рис. 1), так как является следствием частичного взаимопогашения вкладов от различных уровней этой серии (в данном случае уровней  $E_{1'}$  и  $E_{2'}$ ). Область расстроек, в которой V-переходы в значительной мере компенсируют друг друга, достаточно широка и сравнима с величиной  $\Delta'$ . Таким образом, можно сформулировать условия на величину расстройки, при которых возникает тот или иной тип стабилизации: вблизи резонанса, при выполнении условия

$$|\delta| \ll \Delta',\tag{31}$$

имеет место V-стабилизация, которая осуществляется в полях  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ , слабых по сравнению с полями  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_2$ , характерными для  $\Lambda$ -стабилизации в отсутствие V-канала переходов. В свою очередь  $\Lambda$ -стабилизации возникает вдали от резонанса, при  $|\delta| \sim \Delta'/2$ , в диапазоне полей  $\varepsilon_0 > \varepsilon_2$ . Эти два типа стабилизации переходят друг в друга при изменении расстройки  $\delta$  на масштабе  $\sim \Delta'$ .

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

При всей привлекательности и простоте рассмотренных выше моделей, они не могут претендовать на удовлетворительное количественное описание спектра ридберговского атома и динамики его ионизации. С целью приближения к реальной действительности нами были рассмотрены более сложные, многоуровневые модели, причем задача о фотоионизации решалась численно. Численное решение позволило также проанализировать зависимость результатов от других ранее использованных приближений, таких как, например, приближение мгновенного включения взаимодействия и др.

Прежде всего была проведена проверка существования эффекта стабилизации атома за счет переходов V-типа в случае сложных многоуровневых моделей, которые необходимо привлекать для количественного описания фотоионизации реального ридберговского атома. На рис. 5 приведены кривые вероятности ионизации, отвечающие последовательно и симметрично наращиваемому количеству уровней, соседствующих с первоначально заселенным уровнем  $E_{n_0}$  (рассмотрен случай точного резонанса,  $\delta = 0$ ). При этом предполагалось, что эти уровни эквидистантны и обладают равными матричными элементами переходов (см. формулы (8)). Как легко видеть, добавление новых уровней только усиливает эффект стабилизации.

Также проводилось сравнение результатов решения задачи в случае плавного и мгновенного включения лазерного поля (рис. 6). При этом для двух видов включения сопоставлялись друг с другом результаты, полученные для импульсов с одинаковыми значениями пиковой напряженности поля и энергии в импульсе. Плавное включение



**Рнс. 5.** Вероятность ионизации в зависимости от поля в случае различного числа уровней в серии  $\{E_n\}$ : 3, 5, ..., 21. Лазерный импульс имеет прямоугольную форму, расчеты выполнены при следующих значениях параметров:  $t = 8T_K$ ,  $\delta = 0$ ,  $(n_0/n_0')^{3/2} = 10$ 



Рис. 6. Вероятность ионизации, вычисленная в рамках трехуровневой модели, в зависимости от поля для двух типов включения лазерного импульса — плавного (1) и мгновенного (2); а — короткие импульсы ( $t = T_K$ ), б — импульсы значительной длительности ( $t = 5T_K$ ). Остальные параметры:  $\delta = \Delta/2$ , ( $n_0/n_0'^{3/2} = 10$ 

моделировалось огибающей вида  $f(t) = \sin^2(t/\tau)$ . Оказалось, что для небольших длительностей импульса результаты вычислений как для мгновенного включения, так и для плавного близки друг к другу (рис. 6*a*). Если рассмотреть более длительные импульсы, то видно (рис. 6*b*), что обе кривые вероятности ионизации как для плавного, так и для мгновенного включения совпадают друг с другом в области применимости теории возмущений, но дальше расходятся. При этом существенно, что плавное включение не привносит качественных изменений и не разрушает эффект стабилизации, хотя эффект и оказывается менее ярко выраженным, чем в случае мгновенного включения взаимодействия атома с полем.

Зависимость решений от длительности лазерного импульса иллюстрируется результатами расчетов, представленными на рис. 7*a* ,*б*. Рисунки 7*a* и 7*б* отличаются друг от друга количеством учитываемых атомных уровней: три близких уровня ( $E_{n_e}$ ,  $E_{n_e+1}$  и

3 ЖЭТФ, №3 (9)



**Рис.** 7. Вероятность ионизации в зависимости от поля в случае мгновенного включения лазерного импульса. Длительность импульса составляет  $t = T_K/2$  (1),  $2T_K$  (2),  $8T_K$  (3). Остальные параметры:  $\delta = 0$ ,  $(n_0/n_0')^{3/2} = 10$ . Расчетная схема содержит 3 + 1 (a) и 9 + 1 (б) уровень

 $E_{n_0-1}$ ) + один уровень  $E_{n'_0}$  (рис. 7*a*) и девять уровней  $E_n$  + один уровень  $E_{n'_0}$  (рис. 7*b*). Из рисунка видно, что остановка роста вероятности ионизации с увеличением напряженности поля, т.е. стабилизация атома, наступает в тем меньших полях, чем больше длительность импульса. Однако чем большее количество уровней содержит модель, тем результаты менее чувствительны к длительности импульса. Таким образом, условие (25), полученное в рамках трехуровневой модели, смягчается при переходе к моделям, в которых учитывается большее количество уровней. Тем не менее даже в таких многоуровневых моделях стабилизация атома за счет переходов V-типа может иметь место, только если длительность импульса составляет по крайней мере несколько кеплеровых периодов.

Следует отметить, что в количественном отношении результаты расчетов в моделях с малым и большим числом учитываемых уровней заметно отличаются друг от друга. Тем не менее все качественные утверждения, сделанные на основании простейших моделей с малым количеством уровней, сохраняют силу и в случае более сложных моделей. Поэтому мы не рассматриваем здесь вопрос о том, сколь много уровней следует учитывать в моделях рассматриваемого типа для получения правильного количественного описания ионизации реального ридберговского атома. Возможно, что на самом деле такая задача потребует не только количественной, но и качественной модификации модели расчетов. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения и, несмотря на свою несомненную актуальность, выходит за рамки настоящей статьи.

На рис. 8 приведены кривые зависимости вероятности ионизации от расстройки  $\delta$ при различных значениях параметра  $V = \varepsilon/\omega^{5/3}$ . Расчетная схема содержит три уровня  $E_{n'_0}$  и пятнадцать уровней  $E_n$ . Полученные кривые полностью подтверждают сделанное в предыдущем разделе утверждение о том, что зависимость решений от расстройки проявляется на масштабе ~  $\Delta'$ . В случае сильной резонансной связи ( $\delta = 0, \pm \Delta'$ ) имеет место стабилизация V-типа, характеризуемая сильным подавлением процесса ионизации, наступающим в относительно слабых полях  $V ~ V_1$ . В обратном случае, т. е. в межрезонансной области ( $\delta ~ \pm \Delta'/2$ ), имеет место стабилизация  $\Lambda$ -типа [2], проявляющаяся только в значительно более сильных полях,  $V \ge V_2 ~ 1$ . Действительно, в области  $\delta ~ \pm \Delta'/2$  кривая  $w_i(\delta)$  на рис. 8 при V = 3 лежит ниже кривой  $w_i(\delta)$  при V = 1, что указывает на наличие стабилизации атома в диапазоне полей V > 1.



**Рис. 8.** Вероятность ионизации в зависимости от отстройки для различной напряженности лазерного поля (V = 0.1 (1), 0.3 (2), 1 (3), 3 (4)). Количество уровней в серии  $\{E_n\}$ равно 15, в серии  $\{E_{n'}\}$  — 3. Лазерный импульс имеет прямоугольную форму, параметры импульса:  $t = 3T_K$ ,  $(n_0/n'_0)^{3/2} = 10$ 

#### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе дано последовательное теоретическое описание фотоионизации ридберговского атома в сильном лазерном поле с учетом рамановских переходов как  $\Lambda$ -так и V-типа и исследованы условия и закономерности возникновения эффекта стабилизации атома в таких условиях. Показано, что резонансные переходы V-типа определяют новый тип интерференционной стабилизации ридберговских атомов, отличный от стабилизации за счет переходов  $\Lambda$ -типа. Основной особенностью V-стабилизации является возможность ее возникновения в весьма умеренных полях ( $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ ), намного более слабых, чем в случае  $\Lambda$ -стабилизации. Так, например, при  $n_0/n'_0 = 5$  интенсивность лазерного поля, при которой начинаются отклонения от теории возмущений, на два порядка меньше той интенсивности, при которой наблюдались бы нелинейные эффекты в отсутствие V-переходов.

Как показано выше, необходимые условия для реализации эффекта стабилизации V-типа определяются уравнениями (25), (26) и (31): длительность импульса должна быть достаточно велика (25), частота поля  $\omega$  должна быть много больше энергии связи электрона на ридберговском уровне  $|E_{n_0}|$ , но много меньше энергии связи в основном состоянии  $|E_g|$  (26), и расстройка резонанса  $\delta$  должна быть много меньше расстояния между соседними ридберговскими уровнями серии  $E_{n'}$  (с энергией  $E_{n'} \sim E_{n_0} - \omega$ ) (31). Как было показано выше, ограничение на длительность импульса (25) является наиболее жестким в простейшей трехуровневой модели и несколько смягчается при переходе к более реалистичным многоуровневым моделям. При этом, однако, по-прежнему остается в силе требование, что длительность импульса должна быть много больше классического кеплеровского периода  $T_K$ .

Необходимо отметить, что ни в одном из предыдущих экспериментов по стабилизации и перераспределению населенности [3, 4, 19] не были выполнены все условия, необходимые для наблюдения стабилизации ридберговского атома за счет V-переходов. Например, в работе [4] не наблюдалось изменений в перераспределении населенностей на ридберговских уровнях при варьировании частоты поля  $\omega$ . При этом расстройка  $\delta$ изменялась на интервале порядка  $10\Delta$ , где  $\Delta$  — расстояние между соседними ридберговскими уровнями группы  $\{E_n\}$  (см. рис. 1). Однако в масштабе расстояния между соседними уровнями группы  $\{E_{n'}\}, \Delta',$ этот интервал изменения  $\delta$  весьма мал: он меньше, чем 0.1∆'. С другой стороны, в соответствии с полученными выше результатами именно при изменении расстройки  $\delta$  на интервале порядка  $\Delta'$  могут быть обнаружены существенные изменения в механизме ионизации и стабилизации атома и в картине распределения населенности на атомных уровнях. Кроме того, длительность лазерного импульса в эксперименте [4] составляла менее одного кеплерова периода, чего, согласно (25), явно недостаточно для возникновения стабилизации атома за счет рамановских переходов V-типа. Таким образом, в целом следует признать, что до настоящего времени стабилизация атомов за счет рамановских переходов V-типа экспериментально не наблюдалась. В то же время условия, необходимые для такого эксперимента, представляются вполне реализуемыми. По нашему мнению, постановка такого эксперимента представляет несомненный интерес. Условия, при которых возможно наблюдение стабилизации V-типа, могут быть, например, такими:  $n_0 = 25$ ,  $n'_0 = 5$ ,  $\omega \approx 8 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$ , t > 15 пс и  $\varepsilon \ge 10^6$  В/см, что соответствует интенсивности  $I \ge 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>.

Авторы выражают благодарность участникам научного семинара под руководством Н. Б. Делоне (ИОФАН) за ценные замечания при обсуждении проблемы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 9602-17649) и Гражданского фонда исследования и развития, США (грант № RP1-244).

## Литература

- 1. M. Gavrila and J. Z. Kaminski, Phys. Rev. Lett. 52, 613 (1984).
- 2. M. V. Fedorov and A. M. Movsesian, J. Phys. B 21, L155 (1988).
- 3. J. H. Hoogenraad, R. B. Vrijen, and L. D. Noordam, Phys. Rev. A 50, 4133 (1994).
- 4. L. D. Noordam, H. Stapelfeldt, and D. I. Duncan, Phys. Rev. Lett. 68, 1496 (1992).
- 5. M. Yu. Ivanov, Phys. Rev. A 49, 1165 (1994).
- 6. A. Wojcik and R. Parzinski, Phys. Rev. A 50, 2475 (1994).
- 7. A. Wojcik and R. Parzinski, J. Opt. Soc. Am. B 12, 369 (1995).
- 8. И. Я. Берсонс, ЖЭТФ 80, 1727 (1981).
- 9. N. B. Delone, S. P. Goreslavsky, and V. P. Krainov, J. Phys. B 22, 2941 (1989).
- 10. M. S. Adams, M. V. Fedorov, V. P. Krainov, and D. D. Meyerhofer, Phys. Rev. A 52, 125 (1995).
- 11. М. В. Федоров, Электрон в сильном световом поле, Наука, Москва (1991).
- 12. M. V. Fedorov, Laser Physics 3, 219 (1993).
- 13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Наука, Москва (1989).
- 14. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 51, 1492 (1966).
- 15. В. И. Ритус, ЖЭТФ 51, 1544 (1966).
- 16. M. V. Fedorov and N. P. Poluektov, Laser Physics 7, 299 (1997).
- 17. M. V. Fedorov, M.-M. Tegranchi, and S. M. Fedorov, J. Phys. B 29, 2907 (1996).
- 18. M. V. Fedorov and A. E. Kazakov, Progr. Quant. Electr. 13, 1 (1989).
- 19. R. B. Vrijen, J. H. Hoogenraad, and L. D. Noordam, Phys. Rev. A 52, 2279 (1995).