

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ДВУМЕРНО-РАЗУПОРЯДОЧЕННОЙ СРЕДЫ

*М. В. Энтин**

*Институт физики полупроводников
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 31 декабря 1997 г.

Получено точное решение для двумерной двухфазной модели неупорядоченной среды [1], возникающей при иерархическом смешивании фаз с разными диэлектрическими проницаемостями. Задача сводится к нелинейному рекуррентному соотношению для диэлектрических проницаемостей. Выражения для диэлектрических проницаемостей на n -ом этапе итерации удается свернуть к элементарным функциям. Показано, что в отсутствие поглощения высокочастотная диэлектрическая проницаемость композита при разных знаках исходных диэлектрических проницаемостей ϵ не сходится ни к какому пределу и осциллиционно зависит от частоты и n . Найдены частоты локальных плазмонов в рассматриваемой среде для массивного и пленочного образцов.

В ряде работ последнего времени [2–7] было показано, что в случайно-неоднородных макроскопических средах, построенных из непоглощающих микроскопических частей, не происходит установления высокочастотных эффективных электрических параметров системы. В этом высокочастотный случай кардинально отличается от статического предела. В работе [4] было исследовано уравнение ренормировки для иерархической цепочки импедансов с точки зрения теории динамического хаоса и было установлено, что импеданс большой цепочки является фрактальной функцией частоты. Отсутствие самоусредняемости приводит к гигантским флуктуациям высокочастотных электрических полей в случайно-неоднородной среде [2] и расходимости моментов квадрата модуля электрического поля [6]. В результате происходит гигантское усиление нелинейных эффектов, связанных с этими моментами, таких как комбинационное рассеяние [5] и фотогальванический эффект [7].

Работа [2] базировалась на использовании модели Дыхне [8] двумерной статистически эквивалентной двухфазной случайной диэлектрической среды. По аналогии с [4] следовало бы ожидать, что в беспоглотительном случае диэлектрическая проницаемость большой системы не стремится к определенному пределу — эффективной диэлектрической проницаемости. К сожалению, установить это, опираясь непосредственно на модель Дыхне, использующую предельный переход, не удастся. Однако существует регулярная модель Морозовского и Снарского (МС) изотропной двумерной среды [1], обладающая в статическом случае такой же эффективной диэлектрической проницаемостью, как и среда Дыхне. В то же время она опирается на иерархическое построение, что помогает точному решению задачи.

Модель МС базируется на построении среды путем последовательных и параллельных соединений исходных фаз: берем предельно тонкие слои равной толщины с про-

*E-mail: entin@isp.nsc.ru

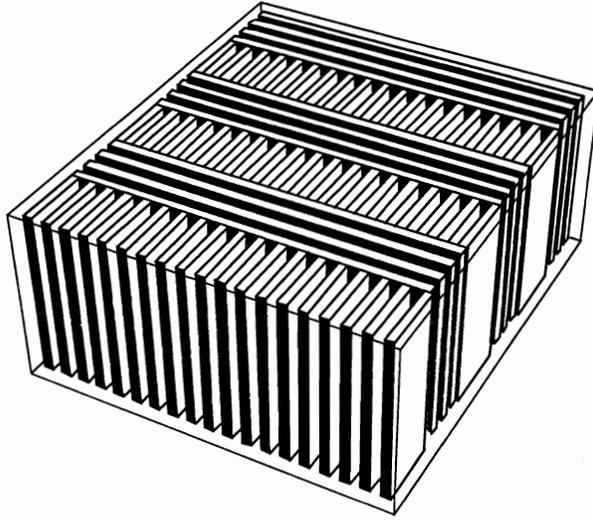


Рис. 1

проводимостями σ_1 и σ_2 и складываем их стопкой. Полученная среда имеет анизотропную проводимость с главными значениями σ'_1 и σ'_2 . На следующем этапе иерархии процедура повторяется: из получившейся среды вырезаются в направлении 1 и 2 осей слои равной толщины и вновь собираются в стопку. На рис. 1 изображены два этапа итерации, причем одна из сред заменена пустыми промежутками. В результате возникает цепочка проводимостей $\sigma_{1,2}^n$. Бесконечное повторение процедуры приводит к одинаковым значениям σ_1^∞ и σ_2^∞ , совпадающими с соотношениями Дыхне:

$$\sigma_1^\infty = \sigma_2^\infty = \sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \tag{1}$$

Для удобства мы будем говорить не на языке проводимости, а на языке диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1 + 4\pi i\sigma/\omega$. Преобразование МС для комплексных диэлектрических проницаемостей системы $\epsilon_1^n, \epsilon_2^n$ имеет вид

$$\epsilon_1^{n+1} = \frac{\epsilon_1^n + \epsilon_2^n}{2}, \quad \epsilon_2^{n+1} = \frac{2\epsilon_1^n \epsilon_2^n}{\epsilon_1^n + \epsilon_2^n}. \tag{2}$$

В случае постоянного тока ϵ_1 и ϵ_2 чисто мнимы и получившаяся цепочка сходится к результату Дыхне. То же справедливо и в случае чисто действительных положительных ϵ_1, ϵ_2 , соответствующих статической диэлектрической проницаемости.

По аналогии с [4] можно было бы ожидать, что отображение (2) должно привести к сценарию динамического хаоса для чисто действительных ϵ_1, ϵ_2 с противоположными знаками. В работе [9] с помощью компьютерного моделирования было показано, что при $\epsilon_1, \epsilon_2 < 0$ последовательность значений (2) не сходится. Результат оказывается чувствительным к начальному значению, и ни на каком шаге не происходит изотропизации системы: $\epsilon_1^n \neq \epsilon_2^n$.

В настоящей работе получено точное решение для модели Морозовского и Снарского конечного размера и проведено ее исследование в области комплексных ϵ . Найденное решение позволяет определить спектр плазмонов конечной модели МС.

Заменой

$$\varepsilon_1^n = z_n \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2^n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_1^n, \quad (3)$$

$$h = \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \quad (4)$$

уравнения (2) преобразуются к виду

$$z_0 = 1/\sqrt{h}, \quad z_{n+1} = (z_n + 1/z_n)/2.$$

Заметим вначале, что при подстановке $z_n = \text{th } t$ рекуррентия (5) превращается в $z_{n+1} = \text{cth}(2t)$. Используя это, получим, что

$$z_n = \text{cth}(2^n t), \quad n \geq 1. \quad (5)$$

С помощью начального условия находим $t = \text{arcth } z_0 = \text{arcth}(\sqrt{h})$. Пусть h действительно и положительно. При $n \rightarrow \infty$

$$z_n \sim 1 + (-1)^n \exp(-2^n t).$$

Отсюда следует выражение (1) для проводимости. Этот предел существует не только для действительного h , но и всегда, когда t имеет действительную часть.

Для отрицательного h заменой гиперболических функций на тригонометрические получаем

$$\varepsilon_1^n = -\sqrt{(-\varepsilon_1/\varepsilon_2)} \text{ctg}\left(2^n \text{arctg}\sqrt{(-\varepsilon_1/\varepsilon_2)}\right), \quad \varepsilon_2^n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_1^n. \quad (6)$$

При большом n и $h < 0$ величины z_n являются быстро осциллирующими функциями h . На малом промежутке по h эти функции ведут себя как $\text{tg}(2^n h + \text{const})$. При $h \sim 1$ расстояние между соседними нулями или полюсами z_n имеет порядок величины $\pi 2^{-n}$, т. е. при увеличении n на 1 частота осцилляций удваивается. Хотя это поведение очень резкое, функция (5) вполне регулярная, и никакой фрактальности, или перемежаемости регулярного и фрактального поведения, как в картине динамического хаоса [4], не наблюдается. Согласно (3), нули ε_1^n и полюса ε_2^n (и наоборот) совпадают с нулями и полюсами z_n соответственно.

Частотная зависимость диэлектрической проницаемости большого образца определяется через h зависимостью от частоты ω начальных диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Предположим, что две исходных среды являются металлами, описываемыми в модели Друде-Лоренца:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2(1,2)}{\omega(\omega + i/\tau_{1,2})}. \quad (7)$$

В пределе слабого поглощения $\tau \rightarrow \infty$ и

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2(1,2)}{\omega^2} + i \frac{\omega_p^2(1,2)}{\omega^3 \tau}.$$

Для того чтобы получить различные знаки $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, нужно предполагать, что частота лежит между плазменными частотами массивных материалов ω_{p1} и ω_{p2} , в частности $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$.

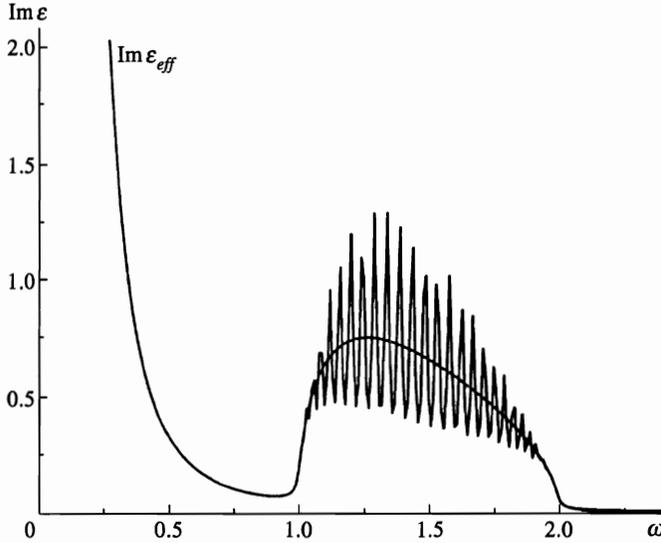


Рис. 2

На рис. 2 изображена частотная зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости ϵ_1^6 при $2\omega_{p1} = \omega_{p2} = 2$, $1/\tau = 0.02$, которая в среднем повторяет $\text{Im}(\epsilon_{eff}) = \text{Im}\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}$ (средняя линия). На обеих кривых выделяется область низкочастотного поглощения и плазменная зона $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$. В ее пределах ϵ_1^6 осциллирует. С уменьшением $1/\tau$ осцилляции обостряются и синусоидально модулированная средняя кривая распадается на отдельные пики. При возрастании n частота пиков увеличивается и они сливаются в среднюю кривую, соответствующую эффективной проводимости. Именно из-за слияния резонансов в области частот между плазменными в бездиссипативной среде возникает конечная действительная часть эффективной проводимости.

Согласно [4, 6], резонансы в диэлектрической проницаемости композита отражают локальные частоты колебаний в среде. В массивном образце нули диэлектрической проницаемости определяют плазменные частоты образца в длинноволновом пределе. Однако для определения плазменных частот важны не только микроскопические свойства среды, но и устройство образца.

Рассмотрим вначале случай массивного трехмерного образца с диэлектрической проницаемостью, зависящей только от двух координат $(x, y) = \rho$, построенного указанным способом. Мы будем предполагать, что иерархическое построение кончается на n -ом этапе, а далее среда строится однородно. Величины ϵ_1^n , ϵ_2^n являются диагональными элементами тензора эффективной диэлектрической проницаемости среды. Пусть волновой вектор плазмона \mathbf{k} лежит в плоскости ρ и гораздо меньше обратного характерного пространственного масштаба предпоследнего уровня иерархии. Это необходимо, чтобы рассматривать среду макроскопически.

С учетом анизотропии из уравнений Максвелла в низкочастотном пределе

$$\nabla \mathbf{D} = 0, \quad [\nabla \mathbf{E}] = 0 \tag{8}$$

следует дисперсионное уравнение для плазмонов с волновым вектором $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ и

поляризации $E \parallel k$:

$$\varepsilon_1^n k_x^2 + \varepsilon_2^n k_y^2 = 0.$$

Выражая через h и угол α между k и осью x , находим

$$-h = \operatorname{ctg}^2 \gamma,$$

$$\omega^2 = \omega_{p,1}^2 \sin^2 \gamma + \omega_{p,2}^2 \cos^2 \gamma,$$

где

$$\gamma = 2^{-n}(\pi(j + 1/2) \pm \alpha), \quad j — \text{целое число.}$$

Число разных плазменных мод равно $2^{n+1} - 1$ т.е. совпадает с точностью до единицы с удвоенным числом элементарных «кирпичиков» построения.

Это легко понять, исходя из того, что на границе двух сред с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ возникают связанные плазмоны с частотой $\sqrt{(\omega_{p,1}^2 + \omega_{p,2}^2)/2}$. Перекрытие полей, создаваемых различными плазмонами, расщепляет их частоты. В то же время, поскольку поля считаются плавными по сравнению со всеми геометрическими масштабами задачи, все слои данного уровня разбиения дают одну дополнительную частоту и число резонансных мод не зависит от числа слоев, на которые мы разбиваем данный уровень.

Другим примером являются плазменные колебания двумерной композитной пленки, материал которой построен тем же способом. Рассмотрим пленку толщины d , нанесенную на поверхность $z = 0$ диэлектрика с проницаемостью ε_0 . Мы будем предполагать, что толщина пленки превышает максимальный размер иерархии разбиения, но меньше длины волны поверхностных плазмонов. Первое условие необходимо, чтобы заменить среду эффективной, а второе позволяет решать задачу о спектре плазмонов, пренебрегая толщиной пленки. Диэлектрическая проницаемость пленки имеет вид

$$\varepsilon_{1,2}^n(\mathbf{r}) = d\varepsilon_{1,2}^n \delta(z).$$

Спектр плазмонов в длинноволновом квазистатическом приближении определяется уравнениями (8) с учетом пространственной зависимости диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = d\varepsilon_{1,2}^n \delta(z) + 1 + (\varepsilon_0 - 1)\theta(z),$$

$\theta(z)$ — тета-функция Хевисайда. Уравнения (8) для поверхностных плазмонов пленки [10, 11] имеют решение

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 e^{ik\rho} e^{-k|z|}, \\ (\varepsilon_0 + 1)k &= -4\pi d(\varepsilon_1^n k_x^2 + \varepsilon_2^n k_y^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ϕ — потенциал плазмонов. В пределе $kd \ll 1$ уравнение (9) удовлетворяется при $\varepsilon_1^n k_x^2 + \varepsilon_2^n k_y^2 \rightarrow \infty$. Таким образом, условия для плазменных колебаний массивного образца и пленки оказываются противоположными. За исключением очень малого или

очень близкого к $\pi/2$ угла α из этого условия следует, что $\varepsilon_1^n \rightarrow \infty$ либо $\varepsilon_2^n \rightarrow \infty$. Отсюда получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_{p,1}^2 \sin^2(2^{-(n+1)}\pi j) + \omega_{p,2}^2 \cos^2(2^{-(n+1)}\pi j).$$

Таким образом, резонансы диэлектрической проницаемости определяют локальные плазмонные частоты. Рассматриваемая система в пределе $n \rightarrow \infty$ является уникальным примером точно решаемой большой неоднородной системы.

Из полученных результатов видно, что при $n \rightarrow \infty$ соседние резонансы диэлектрической проницаемости и, соответственно, плазмонные частоты расположены на почти одинаковом расстоянии.

Локальные плазмонные частоты большой системы могут рассматриваться так же, как электронные состояния в случайной среде. Согласно теории случайных матриц Вигнера–Дайсона [12], в системе с неразделяющимися переменными спектр состояний хаотичен и вероятность сближения соседних состояний ведет себя степенным образом $\propto \delta E^m$, где $m = 1, 2, 4$ в зависимости от ансамбля. Рассматриваемая система является двумерной и случайной, в которой, казалось бы, следует ожидать аналогичного поведения плазменных резонансов.

Ближкий к эквидистантному спектр имеется в одномерных квазиклассических ямах. В то же время в многомерных системах такая жесткая корреляция состояний обычно не наблюдается. Так, соседние уровни электрона в двумерном прямоугольном ящике не скоррелированы. В изотропном осцилляторе, являющимся исключением, эквидистантность возникает из-за вырождения состояний, отсутствующего в данной модели.

В иерархической цепочке импедансов [4], описываемой неупрощаемым рекуррентным соотношением, резонансы импеданса распределены случайно со степенной корреляцией. Моделирование показывает, что функция распределения расстояний $\delta\omega$ между соседними резонансами ведет себя в широкой области $\delta\omega$ как $\delta\omega^{-1.25}$. Такое степенное поведение, видимо, типично для систем с динамическим хаосом.

Однако из-за точной разрешимости отображения (5) в модели Морозовского и Снарского динамический хаос не возникает и состояния оказываются приближенно эквидистантными.

Автор благодарен А. А. Снарскому за возможность ознакомления с его работой до опубликования и Э. М. Баскину за полезные обсуждения.

Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 950204432, 960219353, 97-02-18397) и грантом Volkswagen-Stiftung.

Литература

1. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, УФЖ **28**, 1230 (1983).
2. F. Brouers, S. Blacher, and A. K. Sarychev, in: *Fractal Reviews in the Natural and Applied Sciences*, ed. by M. M. Novak, Chapman and Hall, London (1995), p. 237; F. Brouers, S. Blacher, N. Henriouille, and A. Sarychev, in: *Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, ed. by A. M. Dykne, A. N. Lagarkov, and A. K. Sarychev, Scientific Center for Applied Problems in Electrodynamics, Moscow (1996), p. 46; A. N. Lagarkov, K. N. Rosanov, A. K. Sarychev, and N. A. Simonov, J. Phys. A **241**, 199 (1996).

3. J. P. Clerc, G. Giraud, J. M. Laugier, and J. M. Luck, *Advances in Physics* **39**, 191 (1990).
4. М. В. Энтин, Г. М. Энтин, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 427 (1996).
5. F. Brouers, S. Blacher, A. N. Lagarkov, A. K. Sarychev, P. Gadenne, and V. M. Shalaev, *Phys. Rev. B* **55**, 13234 (1997).
6. E. M. Baskin, M. V. Entin, A. K. Sarychev, and A. A. Snarskii, *Physica A* **242**, 49 (1997).
7. М. В. Энтин, *ФТП* **31**, 973 (1997).
8. А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **59**, 110 (1970).
9. С. П. Лукьянец, А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, частное сообщение.
10. R. A. Ferrel, *Phys. Rev.* **111**, 1214 (1958).
11. А. В. Чаплик, *ЖЭТФ* **60**, 1845 (1971).
12. F. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).