ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 2(8), стр. 406–417

НОВЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ИНФЛЯЦИОННОЙ КОСМОЛОГИИ

В. М. Журавлев, С. В. Червон, В. К. Щиголев*

Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 21 мая 1997 г.

В рамках космологической модели со скалярным самодействующим полем рассматривается задача определения вида потенциала самодействия в форме зависимости потенциальной энергии поля от времени, допускающего существование режима инфляции и выход эволюции на фридмановский режим асимптотического расширения. Вводится вариационная формулировка понятия режима медленного скатывания. На ее основе построено точное решение эволюции масштабного фактора и формы потенциала самодействия. Развит метод построения и анализа точных космологических решений уравнений Эйнштейна, основанный на представлении их в форме линейного уравнения второго порядка. Исследуются некоторые типы потенциалов и соответствующей им эволюции Вселенной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению общих свойств эволюции однородной изотропной Вселенной на основе анализа системы уравнений Эйнштейна для самодействующего скалярного поля. Одним из важных требований, накладываемых на теории ранней Вселенной современными наблюдательными данными, является существование инфляционного этапа в развитии Вселенной, когда масштабный фактор увеличивался экспоненциально быстро [1]. Однако физические причины, породившие этап инфляции и затем осуществившие его завершение на определенной стадии эволюции Вселенной, до конца не выяснены. На этот счет имеется ряд различных гипотез. Поэтому представляется важным выяснить общие свойства модели самодействующего скалярного поля, характеризующие этап инфляции и выделяющие этот этап на фоне общей эволюции Вселенной, начиная с доинфляционной эпохи и кончая более поздними эпохами развития Вселенной. Можно надеяться, что это позволит выяснить сами причины возникновения инфляции и ее завершения. Формулировка проблем и методы их исследований, предпринимаемых в данной работе, в значительной степени связаны с привлечением метода тонкой настройки потенциала [2] и иллюстрируют его эвристические возможности.

Обычно под инфляционным режимом (изотропной и однородной) Вселенной понимают такой период $t_i < t < t_f$ ее ранней эволюции, начинающийся с момента t_i и заканчивающегося в момент t_f, когда масштабный фактор $K(t)$ ускоренно возрастал, т.е.

$$\ddot{K} = K(H^2 + \dot{H}) > 0$$

*E-mail: chervon@themp.univ.simbirsk.su

(см. [3]). При этом, когда $\dot{H} < 0$ говорят о субинфляции, когда $\dot{H} = 0$ используется термин стандартная или экспоненциальная инфляция, а в случае $\dot{H} > 0$ речь идет о суперинфляции.

Особо отметим те случаи, когда закон изменения масштабного фактора $K(t)$ имеет один из следующих видов:

$$K(t) = K_0 t^m, \quad m > 1, K_0 > 0, \tag{1}$$

$$K(t) = K_0 e^{H_0 t}, \quad H_0 > 0, \tag{2}$$

$$K(t) = K_0 (t_* - t)^n, \quad n < 0, \quad t_* > t_i, \tag{3}$$

обеспечивающих общее условие инфляции $\ddot{K} > 0$. Масштабный фактор (1) соответствует суб-инфляции и носит название степенной инфляции. Случай суперинфляции (3) в рамках теории самодействующего скалярного поля недостижим.

Существование инфляционного периода раздувания Вселенной необходимо для решения проблемы горизонта (однородности), плоскостности и реликтовых монополей, что подробно обсуждалось, например, в оригинальной работе Гуса [4] (см. также монографию Линде [1]). Конкретный механизм, обеспечивающий инфляцию в рамках теории со скалярным самодействующим полем (инфлантонное поле), связывают обычно с формой функциональной зависимости эффективного потенциала самодействия скалярного поля от самого поля: $V = V(\phi)$. При этом важную роль в обосновании существования такого механизма играет режим медленного скатывания, т. е. режим при котором изменение поля ϕ (и потенциала $\mathbf{V}(\phi)$) происходило относительно медленно, так что «кинетической» энергией скалярного поля можно пренебречь: $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ [5].

В стандартной модели (2) потенциал самодействия определяется в виде квадратичной функции ϕ:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + b.$$

Для этого случая поле меняется линейно со временем: $\phi \propto t$, в то время как масштабный фактор увеличивается экспоненциально: $K(t) \propto e^{Ht}$ [1, 6].

Новый подход к проблеме построения точных решений в инфляционной космологии (без обращения к режиму медленного скатывания) был развит в работах [2, 7, 10]. Суть метода заключается в следующем. Задается режим эволюции масштабного фактора $K = K(t)$ и определяется эволюция потенциала самодействия $V = V(t)$, обеспечивающая заданный режим $K = K(t)$. Затем определяется скорость изменения скалярного поля $\dot{\phi}(t)$. Далее, интегрируя по t, находим закон эволюции скалярного поля $\phi = \phi(t)$, который будет также согласован с выбранным режимом для масштабного фактора. В итоге получается параметрическая зависимость $V = V(\phi)$, которая и представляет собой потенциал самодействия, «подстроенный» на заданное точное решение.

В частности, в работе [2] были построены потенциалы самодействия скалярного поля в зависимости от типа эволюции масштабного фактора $K(t)$, соответствующего режимам инфляции (1) и (2). Для некоторых типов асимптотического поведения $K(t)$ при больших t, обеспечивающих режим (1) или (2), в [2] был получен общий вид $V(\phi)$ в параметрической форме.

Несколько иной подход при построении точных решений в моделях космологической инфляции представлен в работе Барроу [11]. В его подходе [11] в первую очередь задается эволюция скалярного поля $\phi = \phi(t)$. Затем определяется эволюция масштабного фактора $K = K(t)$ и потенциал, который явно зависит от скалярного поля ϕ.

Отметим также работу [12], в которой используется метод, аналогичный методу тонкой настройки потенциала, но отличающийся от него введением специального параметра, заменяющего время. Это, возможно, удобно при решении некоторых задач, но усложняет процесс получения решений и их анализа.

В настоящей работе, следуя общей идее метода тонкой настройки потенциала, мы предлагаем два новых способа построения классов точных инфляционных решений однородной и изотропной Вселенной. Один состоит в вариационной формулировке условий режима медленного скатывания, второй — в возможности задавать потенциал самодействия как функцию времени. Исследуются общие следствия такого подхода и представлены новые точные решения.

2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ И ПОТЕНЦИАЛ САМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ РЕЖИМА МЕДЛЕННОГО СКАТЫВАНИЯ

Уравнения Эйнштейна для однородной изотропной Вселенной при произвольной форме потенциала $V(\phi)$ самодействия скалярного поля $\phi(t)$ в классе метрик Фридмана можно представить в виде двух уравнений [2]:

$$V(t) = \frac{1}{\kappa}\left(\Lambda + \frac{\ddot{K}}{K} + 2\frac{\dot{K}^2}{K^2} + \frac{2\epsilon}{K^2}\right), \tag{4}$$

$$\phi(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\int\sqrt{-\frac{d^2\ln K}{dt^2} + \frac{2\epsilon}{K^2}}dt + \phi_0, \tag{5}$$

где κ — гравитационная постоянная, Λ — космологическая постоянная, а ϕ_0 — постоянная интегрирования. Эта система уравнений служит основой метода тонкой настройки потенциала. С его помощью, как это указывалось во Введении, задавая вид эволюции масштабного фактора, можно находить соответствующий вид потенциала самодействия, реализующего данный режим эволюции Вселенной.

В работах [2, 8] с помощью этого метода анализировались инфляционные режимы и было показано существование большого числа потенциалов самодействия, допускающих такой режим эволюции. Большое разнообразие потенциалов, приводящих к инфляции, заставляет искать дополнительный принцип, позволивший бы выделить потенциал, действительно реализовавшийся на ранних этапах эволюции Вселенной. Ввиду особой важности существования режима медленного скатывания для инфляционного сценария рассмотрим нестандартную формулировку режима медленного скатывания. Введем определение режима медленного скатывания, используя вариационный принцип минимального изменения скалярного поля ϕ при изменении масштабного фактора $K(t)$ и, как следствие, минимальное изменение значений потенциала $V(\phi)$. Это условие, используя (5), можно записать в форме следующего вариационного уравнения:

$$\delta\phi = \int\limits_{t_1}^{t_2}\delta\sqrt{-\frac{d^2\ln K}{dt^2} + \frac{2\epsilon}{K^2}}dt = 0, \tag{6}$$

где $t_i \le t_1 < t_2 \le t_f$. Буквально это условие означает, что эволюция масштабного фактора должна быть такой, чтобы разность значений поля ϕ на любом конечном интервале времени $[t_1, t_2]$ была наименьшей среди всех других возможных эволюций. При этом изменение значения потенциала $V(\phi)$ также наименьшее.

Если ввести обозначения

$$F(t) = \left(-\frac{d^2 \ln K}{dt^2} + \frac{2\epsilon}{K^2}\right)^{-1/2},$$

уравнения Эйлера–Лагранжа, соответствующие вариационной задаче (6), примут вид пары уравнений для $F(t)$ и $K(t)$:

$$-\frac{d^2 \ln K}{dt^2} + \frac{2\epsilon}{K^2} = \frac{1}{F^2}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{2\epsilon}{K^2} F = 0. \tag{8}$$

Точные решения этой системы наиболее просто найти для случая $\epsilon = 0$, соответствующего пространственно-плоской Вселенной Фридмана. В этом случае из (7), (8) имеем

$$-\frac{d^2 \ln K}{dt^2} = \frac{1}{F^2}, \quad \frac{d^2 F}{dt^2} = 0.$$

Решением этих уравнений являются функции

$$K(t) = k_0 (a_0 t + b_0)^{1/a_0^2} e^{c_0 t}, \quad F(t) = a_0 t + b_0, \tag{9}$$

где a_0, b_0, c_0, k_0 — произвольные постоянные. Подставляя решение (9) в уравнения (4), (5), находим результат для поля и потенциала:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{1}{a_0} \ln(a_0 t + b_0) + \phi_0, \tag{10}$$

$$V(\phi, c_0) = \frac{1}{\kappa} \left[\Lambda + 3c_0^2 + \left(\frac{3}{a_0^2} - 1\right) e^{-2\alpha(\phi - \phi_0)} + \frac{6c_0}{a_0} e^{-\alpha(\phi - \phi_0)}\right], \tag{11}$$

где $\alpha = a_0 \sqrt{\kappa/2}$. Интересно отметить, что решение (9)–(11) обобщает решение, полученное ранее в работе [13] методом генерирования новых решений с использованием инвариантных преобразований ϕ, K, V, не меняющих уравнения стандартной модели инфляции. Как и следовало ожидать, данное решение определяет инфляционный режим экспоненциального или степенного типа или их комбинации.

Решению (10), (11) можно поставить в соответствие уравнение состояния вещества, пользуясь аналогией, имеющейся между теорией самодействующего скалярного поля и идеальной жидкостью. Эта аналогия, в частности, выражается в том, что, сравнивая тензоры энергии-импульса этих двух моделей, формально можно вычислить давление p и плотность энергии ρ идеальной жидкости через параметры модели со скалярным полем по следующему правилу:

$$T_4^4 = \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{12}$$

$$-T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{13}$$

Подставляя сюда выражения для потенциала самодействия $V(\phi)$ из (11) и поля ϕ из (10), получаем следующие соотношения:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}\left[\Lambda + 3c_0^2 + \frac{3}{a_0^2}e^{-2\alpha(\phi-\phi_0)} + \frac{6c_0}{a_0}e^{-\alpha(\phi-\phi_0)}\right],$$
$$p = -\frac{1}{\kappa}\left[\Lambda + 3c_0^2 + (\frac{3}{a_0^2} - 2)e^{-2\alpha(\phi-\phi_0)} + \frac{6c_0}{a_0}e^{-\alpha(\phi-\phi_0)}\right].$$

Исключая поле ϕ из этих уравнений, получаем эффективное уравнение состояния материи в виде

$$p = -\rho + \frac{2a_0^2}{\kappa}\left(-c_0 + \sqrt{\frac{1}{3}(\kappa\rho - \Lambda)}\right)^2. \tag{14}$$

При экстраполяции класса решений (9)–(11) на малые и большие времена, т. е. за пределы инфляционной стадии $t_i \le t_1 < t_2 \le t_f$, легко установить следующие особенности. Данное решение начинается всегда из сингулярного состояния, т. е. при любых параметрах модели (Λ, a_0, c_0, b_0) в истории эволюции масштабного фактора имеется момент времени $t_0 = -b_0/a_0$, когда $K(t_0) = 0$, после которого масштабный фактор увеличивался какое-то время ускоренно. При больших временах отсутствует естественный выход на режим фридмановского расширения, что является недостатком анализируемых решений. Для выхода на фридмановский режим необходимо, чтобы $1/a_0^2 = 2/3$, $c_0 = 0$. Так что становится очевидным, что при отсутствии космологической константы Λ в (4) c_0 принимает на себя роль таковой, и условие $c_0 = 0$ соответствует стандартному выходу из режима инфляции [1].

Еще раз подчеркнем, что полученное аналитическое решение (9)–(11) соответствует точно настроенному потенциалу на режим медленного скатывания в вариационной формулировке.

Как известно, в пионерских работах по инфляции (см. обзоры [1, 5, 6]) рассматривалась усеченная система уравнений Эйнштейна и скалярного поля, где режим медленного скатывания определялся тем, что вторая производная по времени от скалярного поля $\ddot{\phi}$ вычеркивалась из уравнений, что оправдано условием $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. При таком подходе существенных ограничений на потенциал самодействия не возникает. В нашем случае получена точная форма потенциала в явном виде (11). Еще раз отметим, что решение аналогичное (11) было получено ранее в работе [13], но факт режима медленного скатывания не был замечен. Легко проверить, что условие $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ выполняется в некоторый период времени $t_i \le \Delta t < t_f$ для точного решения (9)–(11).

3. ГЕНЕРИРОВАНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ЗАДАННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ $V = V(t)$

Задача анализа взаимосвязи сценария эволюции Вселенной и формы потенциала самодействия может быть рассмотрена на временных масштабах, бóльших нежели этап инфляции. В данном параграфе в целях полноты исследования рассматривается эволюция Вселенной в целом.

При стандартном подходе в уравнениях Эйнштейна потенциал самодействия скалярного поля присутствует в виде функции $V = V(\phi)$. В нашем подходе функция $V(\phi)$

фактически заменена функцией $V(t)$, которую следует понимать как эффективный потенциал материальных полей. Заметим, что в рассматриваемом случае однородной и изотропной Вселенной представление потенциала самодействия в виде $V = V(t)$ не противоречит общей вариационной задаче вывода уравнений Эйнштейна, при котором существенно используется зависимость $V(\phi)$, так как каждой зависимости $V(t)$ и $\phi(t)$ однозначно соответствует некоторая зависимость $V(\phi)$. Назовем функцию $V(t)$ эволюцией потенциальной энергии или историей потенциала, что подчеркивает отличие данного подхода от стандартного, в котором фиксируется зависимость $V = V(\phi)$.

Рассмотрим задачу отыскания всех возможных типов эволюции Вселенной при фиксированной истории потенциала $V = V(t)$, описывающей изменение потенциальной энергии материальных полей во времени. Поставленная в указанной форме задача имеет точные решения, построение которых сводится к интегрированию линейных уравнений в случае $\epsilon = 0$. Представим уравнение (4) в виде уравнения для функции $Z(t) = K^3$:

$$-\ddot{Z} + 3(\kappa V(t) - \Lambda)Z - 6\epsilon Z^{1/3} = 0. \tag{15}$$

В случае пространственно-плоской Вселенной ($\epsilon = 0$) это уравнение приобретает вид обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$-\ddot{Z} + 3(\kappa V(t) - \Lambda)Z = 0, \tag{16}$$

совпадающего по форме с уравнением Шредингера движения квантовой частицы в одномерном пространстве с потенциальной энергией частицы $U(t) = 3\kappa V(t)$ и собственной энергией $E = 3\Lambda$. Функция $Z(t)$ при этом играет роль волновой функции частицы. Рассмотрим этот случай более подробно.

Предположим, что одно из решений этого уравнения при фиксированной зависимости $V = V(t)$ найдено. Обозначим его $Z_1(t)$, тогда второе линейно-независимое решение этого уравнения $Z_2(t)$ при фиксированной функции $U(t)$ может быть легко найдено, поскольку любые два линейно-независимых решения уравнения (16), связаны соотношением

$$Z_1\dot{Z}_2 - Z_2\dot{Z}_1 = W_0, \tag{17}$$

где W_0 — некоторая постоянная. Отсюда получаем

$$Z_2 = Z_1\left(Q_0 + W_0\int\frac{dt}{Z_1^2}\right), \tag{18}$$

где Q_0 — постоянная интегрирования. Меняя постоянные Q_0 и W_0, можно найти все решения уравнения (16), соответствующие заданному эффективному потенциалу $U(t)$.

Например, решение (9) для $K(t)$ в задаче с минимально изменяющимся полем приводит к следующим решениям:

$$K_2(t) = K_0(t)\left[Q_0 + W_0\int K^{-6}(t)dt\right]^{1/3} =$$
$$= k_0(a_0t + b_0)^{1/a_0^2}e^{c_0t}\left[Q_0 + k_0^6W_0\int dt(a_0t + b_0)^{-6/a_0^2}e^{-6c_0t}\right]^{1/3}. \tag{19}$$

В случае чисто степенной инфляции $c_0 = 0$ в решении (9) с минимально изменяющимся скалярным полем получаем общий класс решений для $V(t)$, фиксированного в (10):

$$K_2^{(p)}(t) = k_0(a_0t + b_0)^{1/a_0^2}\left[Q_0 + k_0^6W_0\int dt(a_0t+b_0)^{-6/a_0^2}\right]^{1/3} = \\ = k_0(a_0t + b_0)^{1/a_0^2}\left[Q_0 + k_0^6W_0A(a_0t+b_0)^{-6/a_0^2+1}\right]^{1/3}, \quad (20)$$

где $A = a_0^2/(a_0^2 - 6)$.

Отметим, что решения (19), (20) являются новыми точными решениями при параметрической зависимости $V = V(\phi)$, т. е. $V = V(t)$, $\phi = \phi(t)$, указанной в решении (10)–(11).

Предложенный метод, основанный на (17), несложно перенести на случай $\epsilon \neq 0$. При этом необходимо зафиксировать функцию

$$Q(t) = 3(\kappa V(t) - \Lambda) - 6\epsilon Z^{-2/3}$$

как функцию времени. Тогда потенциал $V(t)$ будет зависеть от вида решения. Случай $\epsilon \neq 0$ требует отдельного исследования.

Линейность уравнения (16) для функции $Z(t)$ допускает постановку задачи на собственные функции и собственные значения, роль которых выполняет здесь космологическая постоянная, если данное уравнение дополнить однородными начальными условиями. Например, можно исследовать все возможные эволюции при фиксированной функции $V(t)$, при которых эволюция начинается в некоторый момент времени t_0 из состояния $K(t) = Z(t) = 0$ и возвращается в такое же сингулярное состояние в другой момент времени $t_1 > t_0$. Такие сценарии эволюции Вселенной можно поставить в соответствие осциллирующим решениям [15]: Вселенная возникла и исчезла за период времени (t_0, t_1). Соответствующая задача будет выглядеть следующим образом:

$$-\ddot{Z} + 3(\kappa V(t) - \Lambda)Z = 0, \quad (21)$$

$$Z|_{t=t_0} = 0, \quad Z|_{t=t_1} = 0. \quad (22)$$

Эта задача по форме совпадает с задачами квантовой механики для дискретного спектра. В случае, если начальные условия ставятся в моменты $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$, а потенциальная энергия является гладкой функцией времени, Вселенная может эволюционировать не из сингулярного состояния и переходить опять в несингулярное состояние в смысле конечности плотностей энергии и других физических характеристик материи (поля). Возможны и другие типы начальных однородных условий. Тот факт, что для каждой такой задачи возникает лишь ограниченный или счетный набор допустимых значений космологической постоянной может внести ясность в вопрос о реальном значении космологической постоянной и физических причинах этого.

4. АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПОТЕНЦИАЛОВ

Выяснение особенностей возникновения и развития различных инфляционных режимов может быть проведено в рамках представления (16) на примере ряда простых с точки зрения построения решений, но интересных с точки зрения поведения потенциалов. В качестве таких модельных потенциалов в данной работе выбраны следующие:

$$3\kappa V(t) = 2t^2, \tag{a}$$

$$3\kappa V(t) = \frac{m}{t^2}, \quad m = \text{const}, \tag{b}$$

$$3\kappa V(t) = -\frac{2\lambda_0}{\text{ch}^2(\lambda_0 t)}. \tag{c}$$

Исследуем решения для потенциалов (a), (b), (c) с позиций возможности существования инфляционных режимов с их выходом на фридмановский этап эволюции.

(a). Нетрудно проверить, что потенциал (a) допускает осциллирующие решения, соответствующие постановке задачи в форме (21), т. е. такие законы эволюции масштабного фактора, при которых Вселенная из сингулярности при $t \to -\infty$ переходит в новую сингулярность при $t \to +\infty$. Действительно, решениями уравнения (16) с нулевыми граничными условиями при $t \to \pm\infty$ являются решения вида

$$Z(t) = H_i(t) e^{-t^2/2},$$

где $H_i(t)$ — полиномы Эрмита. Например, простейшее решение имеет вид $Z(t) = d_0^3 \exp\{-t^2/2\}$. В этом случае

$$K(t) = d_0 \exp\{-t^2/6\}, \quad \phi(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3\kappa}}\, t + \phi_0, \quad V(\phi) = (\phi(t) - \phi_0)^2.$$

Значение космологической постоянной, обеспечивающее такой режим эволюции, равно $\Lambda = 1/3$ (в соответствующих задаче единицах измерения). Для этого частного решения условие

$$\ddot{K} = (d_0/3) \exp\{-t^2/6\}\{t^2/3 - 1\} > 0$$

означает начало раздувания при $t > \sqrt{3}$ и отсутствие выхода из режима инфляции.

Другим полиномам Эрмита будут соответствовать бóльшие по модулю значения $\Lambda = 1, 5/3, \ldots$. Режимы эволюции в этом случае таковы, что Вселенная несколько раз проходит через сингулярное состояние. Нетрудно убедиться, что инфляционная стадия для этих осциллирующих решений начинается при $t \to -\infty$, где масштабный фактор имеет минимальное нулевое значение, и заканчивается в некоторый момент t_0, соответствующий точке перегиба функции $K = K(t)$.

(b). Потенциалы типа (b) для $m \geq -1/4$ интересны тем, что описывают в случае $\Lambda = 0$ все возможные типы степенной эволюции масштабного фактора, в том числе и степенную инфляцию. Действительно, общее решение уравнения (21) для произвольного $m > 0$ и $\Lambda = 0$ имеет вид

$$Z(t) = C_1 t^\alpha + C_2 t^\beta, \tag{23}$$

где α и β — несовпадающие решения алгебраического уравнения $x^2 - x - m = 0$, т. е.

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + m} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + m} < 0.$$

Отсюда видно, что в случае $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ решение (23) будет положительным при $t > 0$ и иметь один минимум в некоторой точке $t_0 > 0$, после прохождения которого в момент $t_1 > t_0$ начинается степенная инфляция, асимптотически выходящая на режим $t^{\alpha/3}$. Режим асимптотической степенной инфляции соответствует требованию $\alpha > 3$, откуда $m > 6$. Заметим, что до момента t_1 поле ϕ — мнимое и физически реализуемый в модели самодействующего скалярного поля режим эволюции начинается именно с момента t_1. Для того чтобы данная проблема не возникала, необходимо потребовать, чтобы выполнялись условия $C_1 > 0$, а $C_2 \le 0$. В этом случае эволюция начинается из сингулярного состояния в некоторый момент времени t_S и сразу выходит на режим степенной инфляции.

Замечательным является тот факт, что единственным режимом степенной эволюции масштабного фактора, не приводящим к потенциалу (b), является режим фридмановского расширения с предельно жестким состоянием вещества $p = \rho$, для которого $K(t) \propto t^{1/3}$ и, следовательно, $Z \propto t$ и $V(t) = 0$ при $\Lambda = 0$. Фридмановский режим расширения $K(t) \propto t^{1/3}$ реализуется при $t \to \infty$ при условии, что потенциал, убывая, стремится к нулю быстрее, чем $1/t^2$. Пример такого поведения демонстрирует одна из возможных зависимостей $K = K(t)$, основанная на эволюции вида

$$Z(t) = z_0 + \frac{t^2}{1+t}.$$

При $t > -1$ масштабный фактор проходит через минимальное значение равное $z_0^{1/3}$ в момент $t = 0$, после которого начинается инфляция. Инфляция заканчивается по достижении точки перегиба, и затем эволюция при $t \to +\infty$ асимптотически выходит на фридмановский режим $K(t) \propto t^{1/3}$. Потенциал самодействия в этом случае равен

$$V(t) = \frac{\Lambda}{\kappa} + \frac{2}{3\kappa(1+t)^2}\,\frac{1}{t^2 + z_0 t + z_0},$$

откуда следует, что

$$V(t) \to \frac{2}{3\kappa}\,\frac{1}{t^4} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Для выхода на фридмановский режим с пылевидной материей, т. е. когда $p = 0$, достаточно, чтобы $V(t) \to 2/t^2$ при $t \to \infty$. Для любого другого уравнения состояния типа $p = \gamma\rho$, $\gamma = \mathrm{const}$, достаточно, чтобы $V(t) \to m/t^2$, $m \ge -1/4$ при $t \to \infty$. Случаю $m = -1/4$ соответствует радиационно-доминированное состояние вещества.

Потенциал (b) также приводит к осциллирующим решениям для $m < 0$, которые соответствуют $\Lambda < 0$. Например, общее решение уравнения (16) для потенциала (b) в случае $m = -2$ и $\Lambda < 0$ имеет вид

$$Z(t) = A\left(k - \frac{1}{t}\right)e^{kt} + B\left(-k - \frac{1}{t}\right)e^{-kt}, \quad k = \sqrt{-3\Lambda}. \tag{24}$$

Среди решений (24) имеется одно решение, удовлетворяющее условию $Z(\pm\infty) = 0$. Им является решение, соответствующее $\Lambda = 0$ и имеющее вид $Z = A/|t|$, $A > 0$.

(c). Чтобы выявить некоторые особенности ограничений на скорость роста, вносимых условием выхода на режим фридмановского расширения, рассмотрим дополнительно историю потенциала (c). Как и потенциал (a), этот потенциал растет при $t \to \infty$, однако до ограниченного значения равного нулю. Решение для $Z(t)$ при $\Lambda < 0$ в этом случае будет иметь следующий вид:

$$Z(t) = A(\lambda - \lambda_0 \mathrm{th}(\lambda_0 t))e^{\lambda t} + B(\lambda + \lambda_0 \mathrm{th}(\lambda_0 t))e^{-\lambda t}.$$

Здесь $\lambda^2 = -3\Lambda > 0$. Этот потенциал при $\lambda = \lambda_0$ соответствует осциллирующей эволюции вида

$$Z(t) = \frac{C}{\mathrm{ch}(\lambda_0 t)}, \quad K(t) = C^{1/3}\,\mathrm{ch}^{-1/3}(\lambda_0 t),$$

где C — произвольная постоянная. Это единственное решение для данного потенциала при $\lambda = \lambda_0$, соответствующее единственному связному состоянию. Как и в случае с потенциалом (a), данное решение описывает инфляционный режим на интервале $(-\infty, t_0)$, где t_0 — точка перегиба функции $K(t)$.

В случае $\lambda = \Lambda = 0$ решением является функция

$$K(t) = C\,\mathrm{th}^{1/3}\,\lambda_0 t,$$

описывающая выход Вселенной из сингулярного состояния в момент $t = 0$ и ее асимптотический переход при $t \to +\infty$ в стационарное состояние $K = C = \mathrm{const}$.

В случае $\lambda > \lambda_0, A > 0, B = 0$ имеется решение,

$$Z(t) = A(\lambda - \lambda_0\,\mathrm{th}(\lambda_0 t))e^{\lambda t}, \quad K(t) = A^{1/3}e^{\lambda t/3}\,(\lambda - \lambda_0\,\mathrm{th}(\lambda_0 t))^{1/3},$$

которое описывает эволюцию без сингулярностей с появлением режима инфляции, начиная с некоторого $t_0 > 0$.

Решения, соответствующие $\Lambda > 0$, представляют собой осциллирующие решения, многократно проходящие через значение $Z = 0$. Как видно, режим асимптотического фридмановского расширения не осуществляется для данного потенциала.

Сравнивая полученные решения для трех типов потенциалов, можно прийти к следующим выводам. Во-первых, растущие при $t \to \infty$ потенциалы (потенциалы (a) и (c)) не допускают выхода на фридмановский режим, если скорость роста потенциальной энергии превышает скорость приближения к нулевому значению функции mt^{-2} с $m = -1/4$. Для выхода на фридмановский режим необходимо, чтобы потенциал убывал со временем по степенному закону типа mt^{-2} с $m > 0$ или нарастал по аналогичному закону с $-1/4 < m < 0$. Во-вторых, все три типа потенциалов демонстрируют существование режима инфляции. Это подтверждает вывод о том, что этот режим не является избирательным по отношению к форме потенциала. Все это указывает на то, что наиболее предпочтительными моделями являются модели типа (b), требующие небольших модификаций, обеспечивающих выход на требуемый фридмановский режим. Например, такой модификацией является введение слабой зависимости m в формуле для потенциала (b) от температуры T вещества

$$V(t, T) = \frac{m(T)}{t^2} \tag{25}$$

такой, что $m(T) > 0$ вблизи минимума $K(t)$ и $m(T) \to 2$ при $t \to \infty$. Такая зависимость $m(T)$ может быть, например, скачкообразной, характеризующей фазовые переходы в материи ранней Вселенной. Потенциал (11) относится к этому типу потенциалов в случае $c_0 = 0$. Таким образом, эти потенциалы (b) удовлетворяют принципу медленного скатывания в предложенной в разд. 2 вариационной формулировке.

Следует отметить также, что простота формулы (25) для потенциала сохраняется только в представлении его в форме $V = V(t)$. Если вычислять вид функции $V = V(\phi, T)$, исходя из полученных решений для $K(t)$ и $\phi(t)$, то оказывается, что эта функция имеет сложный вид и существенно зависит от постоянных интегрирования уравнения (16), которые, в свою очередь, определяются начальными условиями для $K(t)$ и $\phi(t)$. Последнее указывает на предпочтительность представления $V = V(t)$ перед $V = V(\phi)$ для анализа динамики модели.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдены новые классы точных решений для самосогласованной системы гравитирующих скалярных полей с самодействием в рамках космологии однородной и изотропной Вселенной. Дан анализ тем аспектам рассматриваемой модели, которые могут служить для определения физических условий, ограничивающих допустимую форму потенциала самодействия, и общей формы эволюции масштабного фактора с точки зрения существования инфляционного этапа развития Вселенной и некоторых других основных его характеристик.

1. В работе показано, что определение режима медленного скатывания, который активно используется в инфляции, допускает вариационную формулировку. В рамках этой формулировки получено точное решение для стандартной модели инфляции с самодействующим скалярным полем и приведено уравнение состояния вещества, соответствующее этому решению.

2. Предложен метод генерации точных решений с фиксированной историей потенциала $V = V(t)$. На его основе для плоской Вселенной Фридмана сформулирована задача на собственные функции и собственные значения, причем в роли последних выступает космологическая постоянная. Показано, что для анализа характера эволюции Вселенной более просто анализировать динамику модели, используя представление потенциала в форме его истории $V = V(t)$, чем его вид как функции поля $V = V(\phi)$.

3. Проанализированы несколько характерных типов истории потенциала и соответствующих им эволюций масштабного фактора. Проведенный анализ показывает, что формальный аналог уравнений Эйнштейна в форме уравнения Шредингера (15), (16), предложенный в данной работе, позволяет детально разобраться с поведением различных физических факторов в моделях самодействующего скалярного поля и выявить критерии отбора потенциалов, исходя из физических представлениях о характере эволюции Вселенной на больших временных масштабах, включающих как один из этапов инфляцию (субинфляцию), а также условия выхода Вселенной на фридмановский режим. Из проделанного анализа следует, что наиболее реалистичной моделью истории потенциальной энергии является модель вида (25).

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению работы. Один из нас (Ч. С. В.) выражает признательность участникам гравитационного семинара в ГАИШ и А. А. Старобинскому за плодотворное обсуждение некоторых вопросов, затрагиваемых

в данной работе.

Работа выполнена в рамках ГНТП «Астрономия. Фундаментальные исследования космоса» по разделу «Космомикрофизика», а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №98-02-18040) и НУЦ «Космион».

Литература

1. А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва (1990).
2. С. В. Червон, В. М. Журавлев, Изв. вузов. Физика, №8, 81 (1996).
3. P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure*, John Wiley & Sons, Chichester (1995).
4. A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
5. R. H. Brandenberger, in *Physics of the Early Universe, Proc.of the 36th Scottish Universities Summer Scool in Physics*, (1989), ed. by J. A. Peacock, A. F. Heavens, and A. T. Davies, p. 281.
6. V. N. Lukash and I. D. Novikov, in *Observational and Physical Cosmology*, ed. by F. Sunchez, M. Collados, and K. Rebolo, Cambridge university press (1990).
7. S. V. Chervon and V. M. Zhuravlev, in *Abstracts of the reports at the International School-Seminar «Foundations of gravitation and cosmology»*, Odessa (1995), RGS, Moscow, p. 67.
8. С. В. Червон, *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*, Изд. Средневолжского научного центра, Ульяновск (1997).
9. S. V. Chervon, V. M. Zhuravlev, and V. K. Shchigolev, Phys. Lett. B **398**, 269 (1997).
10. S. V. Chervon, Grav. and Cosmol. **3**, 151 (1997).
11. J. D. Barrow, Phys. Rev. D **49**, 3055 (1994).
12. R. Maartens, D. R. Taylor, and N. Roussos, Phys. Rev. D **52**, 3358 (1995).
13. P. Parsons and J. D. Barrow, Clas. Quantum Grav. **12**, 1715 (1995).
14. В. К. Щиголев, В. М. Журавлев, С. В. Червон, Письма в ЖЭТФ **64**, 65 (1996).
15. С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва (1975).