ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 1(7), стр. 46–62

СИММЕТРИИ И ПРИЧИНЫ СОВПАДЕНИЯ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕРКАЛ И ЗАРЯДОВ В 1 + 1- И 3 + 1-ПРОСТРАНСТВАХ

*В. И. Ритус**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 декабря 1997 г.

Рассматривается симметрия волнового поля, находящегося справа и слева от двухстороннего ускоренного зеркала в 1 + 1-пространстве и удовлетворяющего на нем единому условию. Симметрия аккумулирована в матричных коэффициентах Боголюбова α, β, связывающих два полных набора решений волнового уравнения. Амплитуды квантовых процессов в правом и левом полупространствах выражаются через α, β и связаны между собой преобразованием (12). Коэффициент $\beta^*_{\omega'\omega}$ играет роль амплитуды источника пары частиц, направленных в противоположные стороны с частотами ω и ω', но вследствие отражения одной из них оказывающихся либо в правом, либо в левом полупространстве. Такая интерпретация делает $\beta^*_{\omega'\omega}$ наблюдаемой и объясняет найденное ранее [1, 2] совпадение (1) спектров излучения зеркала в 1 + 1-пространстве и зарядов в 3 + 1-пространстве совпадением момента пары, излучаемой зеркалом, и спина частицы, излучаемой зарядом.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] было обнаружено, что спектры бозонов и фермионов, излученных ускоренным зеркалом в 1 + 1-пространстве, совпадают со спектрами фотонов и скалярных квантов, излученных электрическим и скалярным зарядами в 3 + 1-пространстве при движении последних по той же траектории, что и зеркало. А именно, коэффициенты Боголюбова $\beta^{B,F}_{\omega'\omega}$, описывающие спектры бозе- и ферми-излучений ускоренного зеркала, и фурье-образы плотности 4-тока $j_\alpha(k_+, k_-)$ и плотности скалярного заряда $\rho(k_+, k_-)$, описывающие спектры фотонов и скалярных квантов, излучаемых электрическим и скалярным зарядами, связаны соотношениями

$$|\beta^B_{\omega'\omega}|^2 = \frac{1}{e^2}\,|j_\alpha(k_+, k_-)|^2, \quad |\beta^F_{\omega'\omega}|^2 = \frac{1}{e^2}\,|\rho(k_+, k_-)|^2. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что компоненты $k_\pm = k^0 \pm k^1$ волнового 4-вектора k^α кванта, излученного зарядом, отождествлены с удвоенными частотами ω, ω' квантов, излученных зеркалом:

$$2\omega = k_+, \quad 2\omega' = k_-, \tag{2}$$

а e — электрический или скалярный заряд в хевисайдовых единицах.

Однако между правыми и левыми величинами в равенствах (1), т. е. между спектрами излучений зарядов и зеркала, имеется существенное физическое различие. В то

*E-mail: ritus@lpi.ac.ru

время как первые представляют собой распределения среднего числа излученных квантов по двум независимым компонентам k_+, k_- волнового вектора кванта (зависимость от третьей независимой переменной отсутствует вследствие азимутальной симметрии излучения), вторые имеют более сложную интерпретацию. Действительно, они будут спектрами среднего числа квантов, излученных зеркалом направо, только после интегрирования по частоте ω' [3]:

$$d\overline{n}_\omega = \frac{d\omega}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi}|\beta_{\omega'\omega}|^2. \tag{3}$$

Если зеркало является двусторонним и бесконечно тонким, то помимо излучаемых направо квантов со спектром (3) оно (как мы увидим) будет излучать еще кванты налево со спектром

$$d\overline{n}_{\omega'} = \frac{d\omega'}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}|\beta_{\omega'\omega}|^2. \tag{4}$$

Естественно, возникает мысль, нельзя ли рассматривать величину

$$|\beta_{\omega'\omega}|^2\frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} \tag{5}$$

как среднее число пар квантов, один из которых с частотой ω в интервале $d\omega$ излучен зеркалом направо, а другой с частотой ω' в интервале $d\omega'$ — налево. В этом случае две частоты ω, ω' были бы наблюдаемыми, характеризующими одно событие — излучение зеркалом пары квантов, подобно тому, как две компоненты k_+, k_- также характеризуют одно событие — излучение зарядом одного кванта. Как мы увидим, такая трактовка с некоторыми нетривиальными усложнениями действительно справедлива. Во всяком случае, зеркало излучает кванты парами.

Выясняется, что это обстоятельство помогает понять и другое различие между совпадающими спектрами заряда и зеркала. В то время как бозоны и фермионы, излучаемые зеркалом, имеют спин 0 и 1/2, фотоны и скалярные кванты, излучаемые электрическим и скалярным зарядами, имеют спин 1 и 0. Несмотря на другой спин квантов, спектры излучения зарядов совпадают с бозонным и фермионным спектрами зеркала.

Это совпадение объясняется тем, что в отличие от зарядов зеркало излучает частицы парами и пара бесспиновых бозонов может иметь суммарный момент 1, а пара фермионов — суммарный момент 0. Тогда момент пары, излучаемой зеркалом, совпадает со спином частицы, излучаемой зарядом. Косвенным подтверждением этого может служить то, что при отражении $\beta^B_{\omega'\omega}$ ведет себя как псевдоскаляр, а $\beta^F_{\omega'\omega}$ — как скаляр (см. разд. 2 и 4).

В разд. 2 показано, что система коэффициентов Боголюбова, полученная для правостороннего зеркала (т. е. для поля справа от зеркала с граничным условием на нем) благодаря свойствам зеркальной симметрии описывает и процессы в поле слева от зеркала с тем же граничным условием. Иными словами, одна и та же система коэффициентов Боголюбова характеризует поведение поля во всем пространстве — как справа, так и слева от двустороннего зеркала.

В разд. 3 рассмотрены связь между интегральными величинами, характеризующими излучение двустороннего зеркала, их поведение при некоторых пространственно-временных преобразованиях и симметрия (или асимметрия) пространственно-временных областей их формирования.

Симметрия коэффициентов Боголюбова отражает симметрию двух неэквивалентных полных систем решений волнового уравнения, определенных и гладких во всем $1+1$-пространстве, удовлетворяющих внутри него — на траектории зеркала — единому условию и характеризующихся у одной системы правым, а у другой левым направлением распространения монохроматической составляющей каждого решения. При квантовании поля и обычном сопоставлении монохроматических плоских волн частицам эти две системы решений образуют *in*- и *out*-системы для поля справа от траектории и *out*- и *in*-системы для поля слева от нее. Поэтому квантовые процессы в поле справа и слева от зеркала оказываются независимыми, хотя и описываются единой системой коэффициентов Боголюбова. В частности, амплитуды рождения частиц справа и слева от зеркала, амплитуды одночастичного рассеяния и т.д. связаны преобразованием (12). Вычисление таких амплитуд, некоторых частотных распределений, а также инвариантного относительно (12) распределения вероятностей рождения пар по их числу проведено в разд. 4. Показано, что $\beta^*_{\omega'\omega}$ играет роль амплитуды источника пары частиц, потенциально излучаемых направо и налево с частотами ω и ω', причем спин бозонной пары равен 1, а фермионной равен 0.

В последнем, пятом разделе аналогичным образом рассматривается излучение ускоренным зеркалом пар, частица и античастица которых нетождественны.

В статье используется система единиц, где $\hbar = c = 1$. В разд. 4, 5 для упрощения формул частоты считаются дискретными, интегрирование по $d\omega/2\pi$ заменяется суммированием по ω, а дельта-функция $2\pi\delta(\omega-\omega'')$ — символом Кронекера $\delta_{\omega\omega''}$.

2. СИММЕТРИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ БОГОЛЮБОВА И ИЗЛУЧЕНИЕ УСКОРЕННОГО ДВУСТОРОННЕГО ЗЕРКАЛА

Рассмотрим связь спектров излучения и других величин в двух задачах, в которых траектории зеркала $x=\xi_1(t)$ и $x=\xi_2(t)$ отличаются отражением: $\xi_1(t)=-\xi_2(t)$. Тогда если на плоскости переменных $u=t-x$, $v=t+x$ первая траектория описывается функцией $v=v_1=f(u)$, то вторая траектория будет описываться обратной ей функцией $v=v_2=g(u)$, $g(f(u))=u$.

Коэффициенты Боголюбова, определенные как в [1, 2] для поля справа от зеркала (см. также (33), (34)),

$$\alpha^B_{\omega'\omega}[f], \beta^{B*}_{\omega'\omega}[f] = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \exp\left(\mp i\omega u + i\omega' f(u)\right) = \tag{6}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\, \exp\left(i\omega' v \mp i\omega g(v)\right), \tag{7}$$

будучи функционалами траектории при замене $f(u)$ на $g(u)$ и, следовательно, $g(v)$ на $f(v)$ переходят в

$$\alpha^B_{\omega'\omega}[g] = \alpha^{B*}_{\omega\omega'}[f], \quad \beta^B_{\omega'\omega}[g] = -\beta^B_{\omega\omega'}[f]. \tag{8}$$

Аналогично, коэффициенты Боголюбова для фермионного поля

$$\alpha^F_{\omega'\omega}[f], \beta^{F*}_{\omega'\omega}[f] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\sqrt{f'(u)} \exp\left(\mp i\omega u + i\omega' f(u)\right) = \tag{9}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\sqrt{g'(v)} \exp\left(i\omega' v \mp i\omega g(v)\right) \tag{10}$$

при замене траектории на зеркально отраженную переходят в

$$\alpha^F_{\omega'\omega}[g] = \alpha^{F*}_{\omega\omega'}[f], \quad \beta^F_{\omega'\omega}[g] = \beta^F_{\omega\omega'}[f]. \tag{11}$$

Матричные обозначения для коэффициентов Боголюбова позволяют записать преобразования (8), (11), т.е. переход от траектории $f(u)$ к $g(u)$, в виде

$$\alpha \to \alpha^+, \quad \beta \to \mp\tilde{\beta}, \tag{12}$$

где верхний и нижний знаки здесь и в дальнейшем соответствуют бозе- и ферми-полям.

Вместе с тем, согласно разложениям (33), (34) $\alpha_{\omega'\omega}$ и $\beta_{\omega'\omega}$ — это амплитуды волн с частотами ω' и $-\omega'$, содержащихся в падающей части *out*-волны с частотой ω, а $\alpha^*_{\omega'\omega}$ и $\mp\beta_{\omega'\omega}$ — это амплитуды волн с частотами ω и $-\omega$, содержащихся в отраженной части *in*-волны с частотой ω'. Поэтому амплитуды $\alpha^*_{\omega'\omega}[g]$, $\mp\beta_{\omega'\omega}[g]$ описывают генерацию правосторонним зеркалом на траектории $g(u)$ уходящих направо волн с частотами ω, $-\omega$ при поглощении падающей справа налево волны с частотой ω'. Из чисто геометрических соображений они должны совпадать с амплитудами для зеркально-симметричного процесса — генерации левосторонним зеркалом на траектории $f(u)$ уходящих налево волн с частотами ω, $-\omega$ при поглощении падающей слева направо волны с частотой ω'. Тогда, согласно (8), (11), эти последние равны также $\alpha_{\omega\omega'}[f]$, $\beta_{\omega\omega'}[f]$ или равны $\alpha_{\omega'\omega}[f]$, $\beta_{\omega'\omega}[f]$, если частоты монохроматических волн, распространяющихся направо и налево, обозначить через ω и ω', как это было принято для поля справа от траектории.

Таким образом, для поля слева от зеркала, движущегося по траектории $f(u)$, $\alpha_{\omega'\omega}[f]$ и $\beta_{\omega'\omega}[f]$ — это амплитуды волн с частотами ω' и $-\omega'$, содержащихся в отраженной части *in*-волны с частотой ω, а $\alpha^*_{\omega'\omega}[f]$ и $\mp\beta_{\omega'\omega}[f]$ — это амплитуды волн с частотами ω и $-\omega$, содержащихся в падающейся части *out*-волны с частотой ω'. Поэтому матрица, связывающая *in*- и *out*-волны поля слева от зеркала отличается от аналогичной матрицы для поля справа от него преобразованием (12).

Итак, переход от траектории $f(u)$ к зеркально-симметричной $g(u)$ эквивалентен рассмотрению поля не в правой, а в левой от траектории $f(u)$ части плоскости Минковского с прежним граничным условием на зеркале.

Среднее число частиц, образованных двусторонним бесконечно тонким зеркалом в левой части плоскости Минковского, то же самое, что и в правой, так как интеграл

$$N = \iint\limits_0^{\infty} \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}|^2 \tag{13}$$

не меняется при замене $\beta_{\omega'\omega}$ на $\mp\beta_{\omega'\omega}$. В то же время энергия

$$\mathscr{E}' = \iint\limits_0^{\infty} \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} \omega' |\beta_{\omega'\omega}|^2, \tag{14}$$

излученная зеркалом налево, вообще говоря, не равна энергии

$$\mathscr{E} = \iint\limits_{0}^{\infty} \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} \omega |\beta_{\omega'\omega}|^2, \tag{15}$$

испущенной направо.

Равенство средних чисел частиц, излученных двусторонним ускоренным зеркалом направо и налево, наводит на мысль, что частицы рождаются парами и разлетаются в противоположных направлениях. Обычно величина (5) считается средним числом реальных квантов с частотой ω в интервале $d\omega$, излученных направо при поглощении из вакуума справа кванта с частотой ω' в интервале $d\omega'$. Возникает вопрос, нельзя ли рассматривать эту же величину как среднее число пар излученных направо и налево квантов с частотами ω и ω' в интервалах $d\omega$ и $d\omega'$ соответственно. Иными словами, не является ли $N^{-1}|\beta_{\omega'\omega}|^2$ двумерным распределением вероятности частот ω и ω' двух разлетающихся направо и налево квантов с импульсами ω и $-\omega'$?

Такое толкование частотного распределения бозонов (фермионов), излучаемых зеркалом в $1+1$-пространстве, сделало бы менее формальным обнаруженное в [1, 2] совпадение этого распределения со спектром излучения электрического (скалярного) заряда в $3+1$-пространстве. Хотя в случае излучения зеркала случайными величинами являются частоты ω, ω' разлетающихся в противоположные стороны бозонов (фермионов), а в случае излучения заряда — компоненты k_+, k_- волнового вектора одного векторного (скалярного) кванта, излученного направо или налево соответственно знаку $k_+ - k_- \gtrless 0$.

Приведем еще два свидетельства лево-правой симметрии волнового поля ускоренного зеркала, отражаемой коэффициентами Боголюбова.

Во-первых, полученные для поля справа от зеркала выражения (6), (7) или (9), (10) для коэффициентов Боголюбова представляют $|\beta_{\omega'\omega}|^2$ двукратным интегралом, распространенным по всей u, v-плоскости, см. [2]. Так,

$$|\beta^B_{\omega'\omega}|^2 = -\operatorname{Re} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\, dv\, \exp\left[i\omega u + i\omega' f(u) - i\omega' v - i\omega g(v)\right], \tag{16}$$

а $|\beta^F_{\omega'\omega}|^2$ отличается от (16) дополнительным множителем $-\sqrt{f'(u) g'(v)}$ под интегралом. Аналогично, в двукратном интеграле для среднего числа частиц, испущенных направо,

$$N^{B,F} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, K^{B,F}(u),$$

$$K^B(u) = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v - f(u)} \left[\frac{1}{g(v) - u} - \frac{f'(u)}{v - f(u)}\right], \tag{17}$$

$$K^F(u) = -\sqrt{f'(u)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v - f(u)} \left[\frac{\sqrt{g'(v)}}{g(v) - u} - \frac{\sqrt{f'(u)}}{v - f(u)}\right], \tag{18}$$

интегрирование проводится по всей u, v-плоскости, т. е. по всему пространству Минковского, а не по его части, лежащей справа от траектории. Волновые поля справа и слева от траектории, удовлетворяющие на ней одному и тому же условию, описываются единой аналитической функцией и поэтому не независимы. Поэтому не независимы и частоты квантов, испущенных направо и налево.

Во-вторых, средние энергии $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$, излученные направо и налево, согласно работе [2] могут быть представлены в виде интегралов по собственному времени τ зеркала:

$$\mathscr{E}^B = \frac{1}{12\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[d\tau\, a^2\sqrt{f'} - d\left(a\sqrt{f'}\right)\right], \tag{19}$$

$$\mathscr{E}'^B = \frac{1}{12\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[d\tau\frac{a^2}{\sqrt{f'}} + d\left(\frac{a}{\sqrt{f'}}\right)\right]. \tag{20}$$

Здесь a — ускорение зеркала в собственной системе.

Первые члены под интегралом в (19), (20) представляют энергию, необратимо испущенную зеркалом соответственно направо и налево с участка траектории $d\tau$. В собственной системе зеркала эти порции энергии одинаковы и равны $a^2 d\tau/12\pi$, в то время как порции необратимо излучаемого импульса равны $\pm a^2 d\tau/12\pi$. В лабораторной системе эти порции энергии из-за противоположных направлений своего движения по отношению к скорости β источника приобретают доплеровские факторы $\sqrt{f'}$ и $1/\sqrt{f'}$. Напомним, что $\sqrt{f'} = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$. Вторые, шоттовские члены под интегралами в (19), (20) «размазывают» область формирования излучения, в результате чего для формирования излучения энергии оказываются существенными такие интервалы $\Delta\tau$, на которых необратимо излучаемая энергия превышает изменение шоттовской энергии, т. е.

$$\Delta\tau a^2\sqrt{f'} > \left|a\sqrt{f'}\right|, \quad \Delta\tau a^2/\sqrt{f'} > \left|a/\sqrt{f'}\right|, \tag{21}$$

или $\Delta\tau > a^{-1}$: интервал собственного времени должен быть больше обратного собственного ускорения. Собственное ускорение определяет характерную частоту излучения в собственной системе и ее разброс: $\omega \sim \Delta\omega \sim a$. Поэтому условие $\Delta\tau a > 1$ эквивалентно соотношению неопределенностей $\Delta\tau\Delta\omega > 1$.

3. СИММЕТРИЯ И СВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Следующие представления для среднего числа излучаемых частиц N и средних излучаемых энергий $\mathscr{E} = \mathscr{E}_+$ и $\mathscr{E}' = \mathscr{E}_-$ удобны для выяснения их свойств по отношению к некоторым пространственно-временным преобразованиям:

$$N^B = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\, dv\, S(u,v), \quad N^F = -\iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\, dv\sqrt{f'(u)g'(v)}\, S(u,v), \tag{22}$$

$$\mathscr{E}^B_\pm = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\, dv\, A_\pm(u,v), \quad \mathscr{E}^F_\pm = -\iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\, dv\sqrt{f'(u)g'(v)}\, A_\pm(u,v), \tag{23}$$

где S и $A_\pm$ — сингулярные функции ($\varepsilon, \delta \to +0$):

$$S(u,v)=\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{(v-f(u)-i\varepsilon)(g(v)-u-i\delta)}+\text{c.c.}\right], \tag{24}$$

$$A_+(u,v)=\frac{1}{8\pi^2 i}\left[\frac{1}{(v-f(u)-i\varepsilon)(g(v)-u-i\delta)^2}-\text{c.c.}\right], \tag{25}$$

$$A_-(u,v)=\frac{1}{8\pi^2 i}\left[\frac{1}{(v-f(u)-i\varepsilon)^2(g(v)-u-i\delta)}-\text{c.c.}\right]. \tag{26}$$

1. Лоренцовы преобразования. Величины $S(u,v)$, $\sqrt{f'(u)g'(v)}$, $du\,dv$ — скаляры по отношению к лоренцовым преобразованиям, а $A_\pm(u,v)$ преобразуются как $\pm$-компоненты вектора. Поэтому $N^{B,F}$ — лоренц-инварианты, а $\mathscr{E}_\pm^{B,F}$ — $\pm$-компоненты вектора.

2. Зеркальная симметрия. При замене траектории на зеркально-симметричную, $f(u)\to g(u)$, $g(v)\to f(v)$, интегралы $N[f]$ и $\mathscr{E}_\pm[f]$ переходят соответственно в

$$N[g]=N[f],\quad \mathscr{E}_\pm[g]=\mathscr{E}_\mp[f], \tag{27}$$

так как при такой замене

$$S(u,v)\to S(v,u),\quad A_\pm(u,v)\to A_\mp(v,u),\quad \sqrt{f'(u)g'(v)}\to\sqrt{g'(u)f'(v)},$$

после чего преобразованные интегралы N, $\mathscr{E}_\pm$ отличаются от непреобразованных N, $\mathscr{E}_\mp$ только обозначением переменных интегрирования. Таким образом, средние числа частиц, испущенных с одной и той же траектории направо и налево, одинаковы и не меняются при замене траектории на зеркально-симметричную, а средние энергии, испущенные направо и налево, различны и переходят друг в друга при такой замене.

3. Синхрозеркальное преобразование. Это дискретное преобразование заключается в замене координат u, v координатами

$$\tilde{u}=g(v),\quad \tilde{v}=f(u),\quad \text{так что}\quad u=g(\tilde{v}),\quad v=f(\tilde{u}). \tag{28}$$

Точки (u,v) и $(\tilde{u},\tilde{v})$, связанные преобразованием (28), лежат на плоскости Минковского по разные стороны от траектории зеркала на пересечении световых «конусов», вершины которых находятся на траектории в точках A $(u,f(u))$ и B $(g(v),v)$. Точки любой компактной области, лежащей справа от траектории, взаимно однозначно отображаются в точки компактной области, лежащей слева от траектории.

Функции $S(u,v)$, $A_\pm(u,v)$ форминвариантны относительно преобразования (28), т. е. их функциональные зависимости от новых и старых переменных одинаковы:

$$S(u,v)\equiv S(g(\tilde{v}),f(\tilde{u}))=S(\tilde{u},\tilde{v}),\quad A_\pm(u,v)=A_\pm(\tilde{u},\tilde{v}). \tag{29}$$

Так как фигурирующий в ферми-интегралах N^F, $\mathscr{E}_\pm^F$ элемент площади $du\,dv\sqrt{f'(u)g'(v)}$ тоже форминвариантен относительно преобразования (28), т. е.

$$du\,dv\sqrt{f'(u)g'(v)}=d\tilde{u}\,d\tilde{v}\sqrt{f'(\tilde{u})g'(\tilde{v})}, \tag{30}$$

вклады в ферми-интегралы от любых двух областей на u,v-плоскости, связанных преобразованием симметрии (28), одинаковы. В частности, одинаковы вклады от всей правой и от всей левой по отношению к траектории областей.

В бозе-интегралах N^B, $\mathscr{E}^B_\pm$ вклады правой и левой областей, связанных преобразованием (28), вообще говоря, различны, так как фигурирующий в этих интегралах элемент площади $dudv$, в отличие от интегрируемых функций $S, A_\pm$, отображается преобразованием (28) в неравный ему элемент $d\tilde{u}d\tilde{v}$:

$$du\,dv = d\tilde{u}d\tilde{v}f'(\tilde{u})g'(\tilde{v}), \quad d\tilde{u}d\tilde{v} = du\,dv\,f'(u)g'(v). \tag{31}$$

Поэтому вклады в бозе-интегралы с этих двух элементарных площадок пропорциональны их площадям, т. е. их отношение равно якобиану преобразования.

Преобразование (28) переменных интегрирования не меняет, разумеется, значений интегралов N, $\mathscr{E}_\pm$. Его смысл заключается в определенной симметрии или асимметрии локальных вкладов в N, $\mathscr{E}_\pm$ от любой пары правой и левой областей, связанных преобразованием (28). А именно, для ферми-интегралов эта симметрия состоит в равенстве таких вкладов, а для бозе-интегралов — в лево-правой асимметрии вкладов, определяемой якобианом преобразования.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУСТОРОННЕГО ЗЕРКАЛА, КВАНТОВЫЙ ПОДХОД

Для последовательного описания квантованного волнового поля, находящегося как справа, так и слева от зеркала и удовлетворяющего на зеркале единому условию, удобно использовать два полных набора $\{\phi_{out\,\omega}, \phi^*_{out\,\omega}\}$ и $\{\phi_{in\,\omega'}, \phi^*_{in\,\omega'}\}$ решений волнового уравнения, приведенных в [1,2]. Обладая в правой полуплоскости Минковского физическим смыслом *out*- и *in*-наборов и удовлетворяя граничному условию на зеркале, эти решения без изменения своего функционального вида гладко продолжимы в левую полуплоскость. Однако в левой полуплоскости эти наборы приобретают физический смысл *in*- и *out*-наборов соответственно и их нужно обозначать здесь как $\{\phi_{in\,\omega}, \phi^*_{in\,\omega}\}$ и $\{\phi_{out\,\omega'}, \phi^*_{out\,\omega'}\}$.

В действительности каждое такое решение однозначно характеризуется частотой ω или ω' своей монохроматической составляющей, бегущей направо или налево, и условием на зеркале. При лоренцовом преобразовании со скоростью β вдоль оси x частоты ω и ω' преобразуются в $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ по взаимообратным законам:

$$\tilde{\omega} = D^{-1}(\beta)\omega, \quad \tilde{\omega}' = D(\beta)\omega', \quad D(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{32}$$

где $D(\beta)$ — доплеровский фактор. Таким образом, ω и ω' обладают противоположной ковариантностью. В дальнейшем частоты, преобразующиеся как ω, будут снабжаться четным числом штрихов, а преобразующиеся как ω' — нечетным. Тогда индекс «*in*» или «*out*» в дополнение к частотному просто указывает сторону плоскости Минковского, в которой рассматривается решение.

Разложение решений первого набора по решениям второго и обратное разложение записывалось нами (в правой полуплоскости) в виде

$$\phi_{out\,\omega} = \alpha_{\omega'\omega}\phi_{in\,\omega'} + \beta_{\omega'\omega}\phi^*_{in\,\omega'}, \tag{33}$$

$$\phi_{in\,\omega'} = \alpha^*_{\omega'\omega}\phi_{out\,\omega} \mp \beta_{\omega'\omega}\phi^*_{out\,\omega}, \tag{34}$$

или, если использовать матричную запись,

$$\begin{pmatrix} \phi_{out} \\ \phi^*_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \beta^+ & \alpha^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{in} \\ \phi^*_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_{in} \\ \phi^*_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \mp\beta \\ \mp\beta^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{out} \\ \phi^*_{out} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Вследствие ортогональности и нормировки решений в обоих наборах матрицы, фигурирующие в (35), взаимообратны. Это означает, что коэффициенты Боголюбова удовлетворяют четырем независимым матричным соотношениям:

$$\begin{gathered} \alpha^+\alpha \mp \beta^+\beta = 1, \quad \beta^+\alpha^* \mp \alpha^+\beta^* = 0, \\ \alpha\alpha^+ \mp \beta^*\tilde{\beta} = 1, \quad \alpha\beta^+ \mp \beta^*\tilde{\alpha} = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

В левой полуплоскости соотношения (33)–(35) сохраняются, но новый физический смысл требует перестановки индексов «*in*» $\rightleftarrows$ «*out*» у функций, что равносильно замене (12).

Для квантованного поля в правой полуплоскости связь *in*- и *out*-операторов рождения a^+ и поглощения a дается преобразованиями Боголюбова

$$\begin{pmatrix} a_{in} \\ a^+_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{out} \\ a^+_{out} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{out} \\ a^+_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^+ & \mp\beta^+ \\ \mp\tilde{\beta} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{in} \\ a^+_{in} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Для поля в левой полуплоскости в преобразованиях (37) у операторов a, a^+ следует переставить индексы «*in*» $\rightleftarrows$ «*out*». Это снова равносильно замене (12).

Следуя работе Де Витта [3] и его обозначениям, представим вектор вакуумного состояния поля в далеком прошлом в виде разложения по векторам n-частичных состояний поля в далеком будущем:

$$|in\rangle = e^{iW} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} V_{i_1 i_2 \ldots i_n} |i_1 i_2 \ldots i_n out\rangle. \tag{38}$$

В нашем случае под квантовыми числами $i_1 i_2 \ldots i_n$ *out*-состояний отдельных частиц следует понимать частоты, преобразующиеся как ω или как ω', если речь идет о поле соответственно справа или слева от зеркала.

Используя уравнение $a_{in}|in\rangle = 0$, преобразования (37) и разложение (38), нетрудно показать [3, 4], что относительные амплитуды $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ рождения n частиц для нечетного n равны нулю, а для четного n выражаются через амплитуду рождения пары частиц:

$$V_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_p \delta_p V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \ldots V_{i_{n-1} i_n}. \tag{39}$$

Здесь $\sum_p$ означает суммирование по $n!/2^{n/2}(n/2)!$ различным спариваниям индексов $i_1 i_2 \ldots i_n$, а $\delta_p = 1$ для бозонов и $\delta_p = \pm 1$ для фермионов — соответственно четности или нечетности перестановки, приводящей к данному спариванию. Амплитуды рождения пары частиц с частотами ω'', ω в правой области и частотами ω''', ω' в левой равны

$$V_{\omega''\omega} = i(\alpha^{-1}\beta^*)_{\omega''\omega}, \quad V_{\omega'''\omega'} = -i(\beta\alpha^{-1})^*_{\omega'''\omega'}. \tag{40}$$

Они связаны друг с другом преобразованием (12), симметричны для бозе-поля и антисимметричны для ферми-поля, как это следует из (36).

Указанное число членов в амплитуде (39) возникает в связи с ее симметризацией (антисиметризацией) и равно числу $n!$ перестановок ее индексов, уменьшенному в $2^{n/2}$ раз благодаря уже существующей симметрии (антисимметрии) двухчастичных амплитуд и в $(n/2)!$ раз из-за несущественности перестановок этих амплитуд.

Рождение частиц парами обязано линейности преобразований Боголюбова по операторам a, a^+. Оператор a_{in} при действии на n-частичное *out*-состояние превращает его в суперпозицию $n-1$-частичного и $n+1$-частичного *out*-состояний. Поэтому в разложении нулевого вектора $a_{in}|in\rangle$ по n-частичным *out*-состояниям равные нулю коэффициенты разложения представляют собой линейную связь между амплитудами $n+1$-частичного и $n-1$-частичного рождений. Так как $n \geq 0$, амплитуда одночастичного рождения V_{i_1} оказывается равной нулю, а вместе с ней и все амплитуды образования нечетного числа частиц.

Абсолютные амплитуды n-частичного рождения определены и связаны с относительными амплитудами соотношением

$$\langle out\, i_1 i_2 \ldots i_n | in\rangle \equiv \langle out| a_{out\, i_n} \ldots a_{out\, i_2} a_{out\, i_1} |in\rangle = e^{iW} i^{n/2} V_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{41}$$

Амплитуда сохранения вакуума $\langle out|in\rangle = e^{iW}$ с точностью до фазового множителя определяется равенством единице полной вероятности перехода из начального вакуумного состояния

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |\langle out\, i_1 i_2 \ldots i_n | in\rangle|^2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\, W} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |V_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2. \tag{42}$$

Сумму относительных вероятностей

$$q_n = \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |V_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2 \tag{43}$$

рождения n частиц (или $n/2$ пар), находящихся в правой части (42), будем называть статсуммой. Можно показать, что в рассматриваемом случае образования пар тождественных частиц и античастиц статсумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |V_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2 = \det(1 \mp M)^{\mp 1/2} = \exp\left(\mp \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(1 \mp M)\right), \tag{44}$$

где $M = VV^+$ — эрмитова, положительно полуопределенная матрица, образованная из матриц (40). В частности, первые три члена статсуммы, определяемые относительными амплитудами

$$1, \quad V_{i_1 i_2}, \quad V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \pm V_{i_1 i_3} V_{i_2 i_4} + V_{i_1 i_4} V_{i_2 i_3}, \tag{45}$$

и формулой (43), равны соответственно

$$q_0 = 1, \quad q_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M, \quad q_4 = \frac{1}{8} (\operatorname{tr} M)^2 \pm \frac{1}{4} \operatorname{tr} M^2. \tag{46}$$

Абсолютные вероятности образования n пар равны $p_{2n} = p_0 q_{2n}$, где p_0 — вероятность сохранения вакуума:

$$p_0 = e^{-2\,\mathrm{Im}\, W}, \quad 2\,\mathrm{Im}\, W = \mp \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(1 \mp M). \tag{47}$$

Поскольку относительные вероятности $q_{2n}(M)$ рождения n пар являются однородными функциями степени n, $q_{2n}(\lambda M) = \lambda^n q_{2n}(M)$, среднее число пар удобно вычислять по формуле

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{2n} = p_0 \lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n q_{2n}(M)\Bigg|_{\lambda=1} = \lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} 2\,\mathrm{Im}\,W(\lambda M)\Bigg|_{\lambda=1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\frac{M}{1 \mp M}. \tag{48}$$

Для правой и левой областей матрицы M различны:

$$M = VV^+ = \begin{cases} \beta^+\beta(1 \pm \beta^+\beta)^{-1}, & (49) \\ \beta^*\tilde{\beta}\left(1 \pm \beta^*\tilde{\beta}\right)^{-1}, & (50) \end{cases}$$

но связаны друг с другом преобразованием (12). Однако положительно определенные величины $\mathrm{tr}\,M^n$, $n = 1, 2...$, являются инвариантами этого преобразования. Поэтому приведенные выше полные вероятности сохранения вакуума p_0, рождения n пар p_{2n}, среднее число пар $\overline{n}$ одинаковы для правой и левой областей. В частности, величины

$$p_0 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W}, \quad 2\,\mathrm{Im}\,W = \pm\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ln(1 \pm \beta^+\beta), \tag{51}$$

$$p_2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\beta^+\beta(1 \pm \beta^+\beta)^{-1}, \tag{52}$$

$$\overline{n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\beta^+\beta \tag{53}$$

не меняются при замене (12) или $\beta^+\beta \to \beta\beta^+$.

Тем не менее частотные распределения вероятностей и среднего числа частиц не обладают лево-правой симметрией. Так, вероятность рождения одной пары, одна из частиц которой имеет определенную частоту, а другая — любую, для правой области равна

$$p_{2\omega} = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W}\left(\frac{\beta^+\beta}{1 \pm \beta^+\beta}\right)_{\omega\omega}, \tag{54}$$

а для левой равна

$$p_{2\omega'} = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W}\left(\frac{\beta\beta^+}{1 \pm \beta\beta^+}\right)_{\omega'\omega'}. \tag{55}$$

Функционально различаются между собой и частотные распределения среднего числа частиц, излученных зеркалом направо и налево:

$$N_\omega = (\beta^+\beta)_{\omega\omega}, \quad N_{\omega'} = (\beta\beta^+)_{\omega'\omega'}. \tag{56}$$

Наряду с амплитудами (41) рождения зеркалом частиц из вакуума необходимо рассмотреть амплитуды одночастичного рассеяния зеркалом

$$\langle out\,\omega|\omega'\,in\rangle = \langle out|a_{out\,\omega}a^+_{in\,\omega'}|in\rangle = e^{iW}\alpha^{-1}_{\omega\omega'}, \tag{57}$$

$$\langle out\,\omega'|\omega\,in\rangle = \langle out|a_{out\,\omega'}a^+_{in\,\omega}|in\rangle = e^{iW}\alpha^{-1*}_{\omega\omega'} \tag{58}$$

для правой и левой областей соответственно. Эти амплитуды различаются только своими фазами. Разумеется, они связаны между собой преобразованием (12), но нас будет интересовать их связь с соответствующими амплитудами рождения пары:

$$\langle out\,\omega''\omega|in\rangle = -e^{iW}(\alpha^{-1}\beta^*)_{\omega''\omega} = -\sum_{\omega'}\langle out\,\omega''|\omega' in\rangle\beta^*_{\omega'\omega}, \tag{59}$$

$$\langle out\,\omega'\omega'''|in\rangle = e^{iW}(\beta\alpha^{-1})^*_{\omega'\omega'''} = \sum_{\omega}\beta^*_{\omega'\omega}\langle out\,\omega'''|\omega\, in\rangle. \tag{60}$$

Поскольку амплитуды рождения пары и амплитуды одночастичного рассеяния являются величинами, экспериментально измеримыми, в принципе, по соответствующим вероятностям, то соотношения (59), (60) позволяют экспериментально измерить величину $\beta^*_{\omega'\omega}$. Более того, эти соотношения позволяют рассматривать $\beta^*_{\omega'\omega}$ как амплитуду источника пары частиц, потенциально излучаемых направо и налево с частотами ω и ω' соответственно. При этом если частица с частотой ω реально вылетела направо, то частица с частотой ω' не вылетает налево, а испытывает внутреннее отражение и реально излучается направо с измененной частотой ω''. И наоборот, если частица с частотой ω' реально вылетела налево, то частица с частотой ω не может вылететь направо, а после внутреннего отражения излучается реально налево с другой частотой ω'''.

Для фермионов амплитуда $\beta^F_{\omega'\omega}$ диагональна по проекции спина *in*- и *out*-волн (см. [2]). Но одна из волн, формирующих $\beta^F_{\omega'\omega}$, имеет отрицательную частоту и поэтому описывает античастицу с частотой и проекцией спина, противоположными по знаку частоте и проекции спина этой волны (см. § 26 в [5] или § 9 гл.2 в [6]). Таким образом, спин пары рождающихся фермионов равен нулю. Это подтверждается скалярностью тождественно равных друг другу интегралов в (9), (10), в которых $du\sqrt{f'(u)}$ и $dv\sqrt{g'(v)}$ суть элементы собственного времени $d\tau$, и их совпадением,

$$\beta^{F*}_{\omega'\omega} = \frac{1}{e}\rho(k_+, k_-), \tag{61}$$

с фурье-компонентой плотности скалярного заряда в 3 + 1-пространстве.

Амплитуда $\beta^{B*}_{\omega'\omega}$ источника бозонной пары, согласно (6), (7), линейно выражается через фурье-компоненты $j_\pm(k)$ плотности тока электрического заряда в 3 + 1-пространстве:

$$\beta^{B*}_{\omega'\omega} = -\sqrt{\frac{k_+}{k_-}}\,\frac{j_-}{e} = \sqrt{\frac{k_-}{k_+}}\,\frac{j_+}{e}, \tag{62}$$

$$j_- = e\int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \exp\left[\frac{i}{2}\left(k_+u + k_-f(u)\right)\right], \quad j_+ = e\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\, \exp\left[\frac{i}{2}\left(k_-v + k_+g(v)\right)\right] \tag{63}$$

(см. также (1), (2) и формулы (43), (44) в [1]). Последнее равенство в (62) есть не что иное как условие поперечности тока $k_+j_- + k_-j_+ = 0$. Из (62) видно также, что $\beta^B_{\omega'\omega}$ — псевдоскаляр, так как при отражении $k_\pm \to k_\mp$, $j_\pm \to j_\mp$ и β^B меняет знак. Вектор $j_\alpha(k)$ пространственноподобен и в системе, где $k_+ = k_-$ (или $\omega = \omega'$), имеет только пространственную компоненту, равную как раз $e\beta^B_{\omega'\omega}$. В ковариантной форме

$$e\beta^{B*}_{\omega'\omega} = \varepsilon_{\alpha\beta}k^\alpha j^\beta \big/ \sqrt{k_+k_-}\,.$$

Таким образом, источником бозонной пары является сохраняющийся вектор тока (63), а это означает, что ее спин равен 1 [7].

То, что спин бозонной пары равен 1, а фермионной — 0, существенно для понимания совпадения спектров зеркала и заряда.

Если $\beta^*_{\omega'\omega}$ мало, т. е. мало среднее число излучаемых квантов, то, как легко получить из формул (6), (9),

$$\alpha_{\omega'\omega} \approx 2\pi\delta\left(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right), \quad \alpha^{-1}_{\omega\omega'} \approx 2\pi\delta\left(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'\right), \tag{64}$$

где $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ связаны с ω, ω' преобразованием (32), в котором β — эффективная скорость зеркала на участке излучения. В этом приближении амплитуды (59), (60) излучения пары частиц с частотами ω, ω'' направо и пары частиц с частотами ω', ω''' налево равны соответственно

$$\langle out\,\omega''\omega|in\rangle \approx -e^{iW}D^{-1}(\beta)\beta^*_{\omega'\omega}, \quad \omega' = D^{-2}(\beta)\omega'', \tag{65}$$

$$\langle out\,\omega'\omega'''|in\rangle \approx e^{iW}D(\beta)\beta^*_{\omega'\omega}, \quad \omega = D^{2}(\beta)\omega'''. \tag{66}$$

Эти формулы, включая связь между частотами падающей на зеркало и отраженной от него волн, подтверждают данную выше интерпретацию $\beta^*_{\omega'\omega}$.

Обратим теперь внимание на интерференционные эффекты в рождении бозе- и ферми-частиц. Наиболее существенными они становятся тогда, когда матрицы M для бозонов и фермионов удовлетворяют условиям

$$\mp\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ln(1\mp M) = \mp\ln\left(1\mp\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M^n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M\right)^n, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{67}$$

Тогда статсумма (44) для бозе- и ферми-частиц сводится соответственно к выражениям

$$\frac{1}{1-(1/2)\,\mathrm{tr}\,M} \quad \text{и} \quad 1+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M. \tag{68}$$

Это означает, что вероятности рождения n пар бозонов образуют геометрическую прогрессию:

$$p^B_{2n} = p^B_0\,q^{Bn}_2, \quad p^B_0 = 1-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M, \quad q^B_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M, \tag{69}$$

а вероятности излучения двух и более пар фермионов исчезают, т. е. возможно рождение только одной фермионной пары:

$$p^F_0 = \left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M\right)^{-1}, \quad p^F_2 = p_0\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,M, \quad p^F_{2n} = 0, \quad n \geq 2. \tag{70}$$

Иными словами, условия (67) означают наиболее конструктивную интерференцию бозонов и наиболее деструктивную интерференцию фермионов. В этих случаях среднее число бозонных пар всегда больше 1, а фермионных пар меньше 1:

$$1 < \overline{n}^B = \frac{(1/2)\,\mathrm{tr}\,M}{1-(1/2)\,\mathrm{tr}\,M} < \infty, \quad 0 < \overline{n}^F = \frac{(1/2)\,\mathrm{tr}\,M}{1+(1/2)\,\mathrm{tr}\,M} < 1. \tag{71}$$

Менее интересен случай, когда интерференционными эффектами можно пренебречь. В этом случае

$$\operatorname{tr} M^k \ll \operatorname{tr} M, 1; \quad k \geq 2, \tag{72}$$

и распределение вероятностей по числу рожденных пар совпадает с пуассоновским:

$$p_{2n} = e^{-\overline{n}} \frac{(\overline{n})^n}{n!}, \quad \overline{n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \beta^+ \beta. \tag{73}$$

5. ИЗЛУЧЕНИЕ ПАР ИЗ НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

В случае рождения пар из нетождественных частицы и античастицы (ab-пары) прямое и обратное преобразования Боголюбова (37) заменяются такими:

$$\begin{pmatrix} a_{in} \\ b_{in}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{aa} & \beta_{ab}^* \\ \beta_{ba} & \alpha_{bb}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{out} \\ b_{out}^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{out} \\ b_{out}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{aa}^+ & \mp\beta_{ba}^+ \\ \mp\tilde{\beta}_{ab} & \tilde{\alpha}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{in} \\ b_{in}^+ \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Эти преобразования содержат не две, а четыре матрицы α_{aa}, α_{bb}, β_{ab}, β_{ba}, которые удовлетворяют не четырем соотношениям (36), а шести:

$$\begin{aligned} &\alpha_{aa}^+\alpha_{aa} \mp \beta_{ba}^+\beta_{ba} = 1, \quad \alpha_{bb}^+\alpha_{bb} \mp \beta_{ab}^+\beta_{ab} = 1, \quad \beta_{ba}^+\alpha_{bb}^* \mp \alpha_{aa}^+\beta_{ab}^* = 0, \\ &\alpha_{aa}\alpha_{aa}^+ \mp \beta_{ab}^*\tilde{\beta}_{ab} = 1, \quad \alpha_{bb}\alpha_{bb}^+ \mp \beta_{ba}^*\tilde{\beta}_{ba} = 1, \quad \alpha_{aa}\beta_{ba}^+ \mp \beta_{ab}^*\tilde{\alpha}_{bb} = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Впрочем, эти соотношения можно записать в форме (36), если под α и β понимать 2×2-матрицы, составленные из указанных четырех:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{aa} & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{ab} \\ \beta_{ba} & 0 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Как видно из (74), перестановка «*in*» $\rightleftarrows$ «*out*» эквивалентна теперь замене

$$\alpha_{aa} \to \alpha_{aa}^+, \quad \alpha_{bb} \to \alpha_{bb}^+, \quad \beta_{ab} \to \mp\tilde{\beta}_{ba}, \quad \beta_{ba} \to \mp\tilde{\beta}_{ab}, \tag{77}$$

которую можно представить в форме (12), если под α и β понимать матрицы (76).

Используя для *in*-состояния вакуума разложение типа (38) и уравнения $a_{in}|in\rangle = b_{in}|in\rangle = 0$, можно показать, что все амплитуды испускания нечетного числа частиц равны нулю, а амплитуды рождения четного числа частиц представляют собой произведения амплитуд рождения ab-пар:

$$V^{ab}_{\omega''\omega} = i\left(\alpha_{aa}^{-1}\beta_{ab}^*\right)_{\omega''\omega}, \quad V^{ab}_{\omega'''\omega'} = -i\left(\beta_{ab}\alpha_{bb}^{-1}\right)^*_{\omega'''\omega'}, \tag{78}$$

соответственно для правой и левой областей. Как следует из (75), амплитуды (78) обладают свойством бозе-симметрии или ферми-антисимметрии:

$$\begin{aligned} V^{ab}_{\omega''\omega} &= \pm V^{ba}_{\omega\omega''} \equiv \pm i\left(\alpha_{bb}^{-1}\beta_{ba}^*\right)_{\omega\omega''}, \\ V^{ab}_{\omega'''\omega'} &= \pm V^{ba}_{\omega'\omega'''} \equiv \mp i\left(\beta_{ba}\alpha_{aa}^{-1}\right)^*_{\omega'\omega'''}. \end{aligned} \tag{79}$$

Таким образом, амплитуду образования ab-пары можно обозначить через $V_{i_1 i_2}$, где индекс i_1 характеризует состояние частицы, а индекс i_2 — античастицы. Рождение двух ab-пар описывается амплитудой

$$V_{i_1 i_2 i_3 i_4} = V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \pm V_{i_3 i_2} V_{i_1 i_4}, \tag{80}$$

симметричной (антисимметричной) отдельно по состояниям i_1, i_3 частиц и отдельно — по состояниям i_2, i_4 античастиц. Приведем еще амплитуду рождения трех пар:

$$\begin{aligned} V_{i_1 i_2 \ldots i_6} = V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_5 i_6} \pm V_{i_3 i_2} V_{i_1 i_4} V_{i_5 i_6} + V_{i_3 i_2} V_{i_5 i_4} V_{i_1 i_6} \pm \\ \pm V_{i_1 i_2} V_{i_5 i_4} V_{i_3 i_6} + V_{i_5 i_2} V_{i_1 i_4} V_{i_3 i_6} \pm V_{i_5 i_2} V_{i_3 i_4} V_{i_1 i_6}. \end{aligned} \tag{81}$$

В общем случае амплитуда рождения $n/2$ пар имеет вид

$$V_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_p \delta_p V_{i_1 i_2} V_{i_3 i_4} \ldots V_{i_{n-1} i_n}, \tag{82}$$

где сумма берется по всем $(n/2)!$ членам, отличающимся перестановкой нечетных индексов (или, что то же самое, перестановкой четных индексов), причем в случае фермионов $\delta_p = \pm 1$ для четной или нечетной перестановки соответственно, а в случае бозонов $\delta_p = 1$. Тогда амплитуда $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ будет симметричной (антисимметричной) как по состояниям частиц $i_1 i_3 \ldots i_{n-1}$, так и по состояниям $i_2 i_4 \ldots i_n$ античастиц.

Относительная вероятность

$$q_n = \frac{1}{(n/2)!(n/2)!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |V_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2 \tag{83}$$

рождения $n/2$ пар, состоящих из нетождественных частицы и античастицы, содержит множитель $1/(n/2)!(n/2)!$, который вместе с симметрией (антисимметрией) амплитуды $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ отдельно по четным и отдельно по нечетным индексам позволяет провести суммирование по состояниям частиц и античастиц, считая диапазоны изменения квантовых чисел этих состояний независимыми. Без этого множителя в сумму по $i_1 i_2 \ldots i_n$ должны были бы входить только физически различные состояния. В нашем случае, например, это означало бы, что частоты частиц должны удовлетворять условию $\omega_1 \geq \omega_3 \geq \ldots \geq \omega_{n-1}$, а частоты античастиц — условию $\omega_2 \geq \omega_4 \geq \ldots \geq \omega_n$.

По приведенным выше относительным амплитудам нетрудно построить первые четыре члена статсуммы:

$$\begin{gathered} q_0 = 1, \quad q_2 = \operatorname{tr} M, \quad q_4 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M)^2 \pm \frac{1}{2} \operatorname{tr} M^2, \\ q_6 = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} M)^3 \pm \frac{1}{2} \operatorname{tr} M \cdot \operatorname{tr} M^2 + \frac{1}{3} \operatorname{tr} M^3. \end{gathered} \tag{84}$$

Для статсуммы в целом получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n/2)!(n/2)!} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} |V_{i_1 i_2 \ldots i_n}|^2 = \det(1 \mp M)^{\mp 1} = \exp\left(\mp \operatorname{tr} \ln(1 \mp M)\right). \tag{85}$$

Здесь, как и в (44), $M = VV^+$ — эрмитова, положительно полуопределенная матрица. Она дается формулами (49), (50), в которых под β понимается соответственно β_{ba} и β_{ab}.

Так же как и выше, абсолютные вероятности образования n пар из нетождественных частицы и античастицы равны $p_{2n} = p_0 q_{2n}$, где p_0 — вероятность сохранения вакуума:

$$p_0 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W}, \quad 2\,\mathrm{Im}\,W = \mp \mathrm{tr}\ln(1 \mp M). \tag{86}$$

Среднее число пар, вычисленное согласно правилу (48), равно

$$\overline{n} = \mathrm{tr}\,\frac{M}{1 \mp M}. \tag{87}$$

Видно, что эти формулы отличаются от соответствующих формул (47) и (48) для рождения пар тождественных частиц заменой в последних $(1/2)\,\mathrm{tr}$ на tr. В силу $a \rightleftarrows b$ симметрии в матрицах под знаком tr под β можно понимать как β_{ba}, так и β_{ab}.

Нетрудно видеть, что это правило связывает все формулы для интегральных характеристик рождения пар тождественных частиц с формулами соответствующих характеристик рождения ab-пар. Так, чтобы получить из формул (51)–(53), (67)–(73) аналогичные выражения для рождения ab-пар, достаточно заменить в этих формулах $(1/2)\,\mathrm{tr}$ на tr, а под β понимать β_{ba} или β_{ab}.

Что касается спектральных характеристик, приведенных например в формулах (54)–(56), то они не претерпевают изменений при переходе к рассматриваемому случаю, если под β понимать β_{ba} (β_{ab}) для спектра частиц (античастиц), испущенных направо, и β_{ab} (β_{ba}) для спектра частиц (античастиц), испущенных налево.

В самом деле, для дифференциальной вероятности $p_{2\omega}$, приведенной в (54), исходный интеграл

$$p_{2\omega} = \int_0^\infty \frac{d\omega''}{2\pi}\,|\langle out\,\omega\omega''|in\rangle|^2 \tag{88}$$

представляет ее как сумму вероятностей физически различных событий независимо от того, тождественны ли частицы или нет. Но полная вероятность образования пары p_2 как сумма вероятностей физически различных событий для тождественных частиц представляется интегралом

$$p_2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\int_0^\omega \frac{d\omega''}{2\pi}\,|\langle out\,\omega\omega''|in\rangle|^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}p_{2\omega}, \tag{89}$$

так как в этом случае состояния различаются лишь значениями большей ω и меньшей ω'' частот двух тождественных частиц. В то же время для ab-пары

$$p_2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega''}{2\pi}\,|\langle out\,\omega\omega''|in\rangle|^2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}p_{2\omega}, \tag{90}$$

так как состояния различаются несвязанными между собой значениями частот ω'' и ω частицы и античастицы, различающихся в свою очередь по разному взаимодействию со счетчиками.

Возвращаясь к амплитуде рождения ab-пары

$$\langle out|b_{out\,\omega''}a_{out\,\omega}|in\rangle \equiv \langle out\,\omega\omega''|in\rangle = -e^{iW}\left(\alpha_{aa}^{-1}\beta_{ab}^{*}\right)_{\omega\omega''} = \mp e^{iW}\left(\alpha_{bb}^{-1}\beta_{ba}^{*}\right)_{\omega''\omega}, \quad (91)$$

заметим, что она сводится к произведению амплитуды β_{ab}^* или β_{ba}^* источника противоположно направленных a, b-частиц и амплитуды α_{aa}^{-1} или α_{bb}^{-1} обратного рассеяния одной из них, в результате чего обе частицы пары движутся в одном направлении. Симметрия (79) не позволяет установить, какая из частиц ab-пары испытывает обратное рассеяние.

Автор благодарен А. И. Никишову за стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-04219а).

Литература

1. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **108**, 1121 (1995).
2. В. И. Ритус, ЖЭТФ **110**, 526 (1996).
3. B. S. DeWitt, Phys. Rep. C **19**, 295 (1975).
4. R. M. Wald, Comm. Math. Phys. **45**, 9 (1975).
5. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
6. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
7. Ю. Швингер, *Частицы, источники, поля*, Мир, Москва (1973).