ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 6, стр. 2174–2192

ЭФФЕКТ ДЕ ГААЗА–ВАН АЛЬФЕНА В НЕОБЫЧНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

*М. Г. Вавилов, В. П. Минеев**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 1997 г.

В работе развита теория эффекта де Гааза–ван Альфена в сверхпроводниках второго рода с p-типом спаривания и D-типом спаривания, соответствующим одномерному представлению B_{1g} группы D_{4h}. Вблизи верхнего критического поля найдены решения для параметра порядка и вычислена плотность квазичастичных состояний. Показано, что если линия, охватывающая экстремальное сечение ферми-поверхности плоскостью, перпендикулярной магнитному полю, совпадает с линией нулей параметра порядка сверхпроводника, то амплитуда осцилляций намагниченности при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее практически не изменяется. При ином расположением нулей подавление осцилляций де Гааза–ван Альфена качественно соответствует случаю обычной сверхпроводимости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется обширный экспериментальный материал по наблюдению эффекта де Гааза–ван Альфена в сверхпроводниках второго рода (см. обзор [1]). Установлено, что если область весьма больших полей, где возможно наблюдение эффекта в нормальном состоянии[1)], перекрывается с областью существования сверхпроводящего смешанного состояния, то осцилляции намагниченности сохраняются и при переходе в смешанное состояние в полях $H < H_{c2}$, в котором частота осцилляций как функция магнитного поля не претерпевает изменений, а амплитуда убывает с уменьшением поля быстрее, чем в нормальном металле. Тем не менее эффект заметен вплоть до полей $H \approx 0.5H_{c2}$. Эти наблюдения указывают на то, что в смешанном состоянии даже в полях значительно меньших верхнего критического поля H_{c2} сохраняется квантование Ландау.

Попытки объяснить это явление предпринимались в целом ряде теоретических работ [2–4]. Самосогласованная теория эффекта де Гааза–ван Альфена была развита в работе авторов [5]. Показано, что при конечной концентрации примесей, несмотря на требование высокой чистоты, $\pi\Gamma < \omega_c$, необходимое для наблюдения эффекта де Гааза–ван Альфена, в смешанном состоянии вблизи верхнего критического поля H_{c2} имеется

---

* E-mail: mineev@landau.ac.ru

1) Напомним, что в нормальном состоянии эффект де Гааза–ван Альфена наблюдается при выполнении следующих условий для температуры T и чистоты образца: $\omega_c > 2\pi^2 T$, $\omega_c > 2\pi^2 T_D$. Здесь $\omega_c = eH/m^*c$ — циклотронная частота. Величину $T_D = 1/2\pi\tau = \Gamma/2\pi$ принято называть температурой Дингла, где τ — время свободного пробега, Γ — соответствующая ширина уровня. Постоянная Планка $\hbar$ всюду положена равной единице.

область бесщелевой сверхпроводимости, в которой плотность состояний на поверхности Ферми остается конечной:

$$N(E=0) \approx N_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\pi^3 n_F}}{\ln n_F} \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}\right). \tag{1}$$

Здесь N_0 — плотность состояний в нормальном металле, $n_F = \mu/\omega_c$, μ — химический потенциал. Осциллирующая часть намагниченности в смешанном состоянии, M^s_{osc}, оказывается подавлена по сравнению с ее значением в нормальном состоянии, M^n_{osc}:

$$\frac{M^s_{osc}}{M^n_{osc}} \approx 1 - \frac{\sqrt{\pi n_F}}{\ln n_F} \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}. \tag{2}$$

Результаты (1) и (2) получены в [5] в линейном приближении по квадрату параметра порядка $\Delta^2 \sim (H_{c2} - H)/H_{c2}$ в предположении, что $T < \Gamma \ll \omega_c$.

В недавно открытых высокотемпературных сверхпроводниках и сверхпроводящих соединениях с тяжелыми фермионами, возможно, реализуются сверхпроводящие состояния с анизотропными типами спаривания. В связи с этим появилась потребность в развитии теории эффекта де Гааза–ван Альфена для сверхпроводников, обладающих симметрийными нулями параметра порядка. Распространение теории [2] на сверхпроводящие фазы с нулями параметра порядка на экваторе и полюсах фермиевской сферы было выполнено Маки [6]. Им использовались спектр возбуждений, полученный в работе [7] в пренебрежении квантованием Ландау, и импульсное представление для параметра порядка.

В настоящей работе развита квантовая теория эффекта де Гааза–ван Альфена для фаз с p-спариванием, для которых известны точные решения для параметра порядка в полях $H \approx H_{c2}$ при произвольных температурах [8]. Также рассматривается фаза, симметрия которой отвечает одномерному представлению B_{1g} группы D_{4h}. Далее для краткости мы ее называем D-фазой. Теория магнитных осцилляций в D-фазе представляет особый интерес в связи с недавними экспериментальными наблюдениями, указывающими на возможную реализацию состояния B_{1g} в высокотемпературном сверхпроводнике $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ [9]. В работе показано, что если линия, ограничивающая экстремальное сечение Ферми поверхности плоскостью, перпендикулярной направлению поля, не совпадает с линией нулей параметра порядка сверхпроводника, то подавление амплитуды осцилляций качественно соответствует случаю обычной сверхпроводимости. Напротив, при обращении параметра порядка в нуль на линии, совпадающей с линией, ограничивающей сечение экстремальной площади, амплитуда осцилляций при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние практически не изменяется. Таким образом, наблюдение эффекта де Гааза–ван Альфена в смешанном состоянии может служить методом идентификации необычных сверхпроводящих фаз.

Изложение построено следующим образом. В следующем разделе приведены уравнения, определяющие функцию Грина в сверхпроводнике с p- и D-типами спаривания. Вид параметра порядка вблизи верхнего критического поля для различных сверхпроводящих фаз найден в третьем разделе, затем вычислены соответствующие матричные элементы параметра порядка. Далее решено уравнения самосогласования для амплитуды параметра порядка. В шестом разделе найдены плотность состояний на фермиевской поверхности и амплитуда осцилляций де Гааза–ван Альфена.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЭЛЕКТРОНОВ В СВЕРХПРОВОДНИКЕ С ПРИМЕСЯМИ

В анизотропных сверхпроводниках система уравнений Горькова выглядит следующим образом:

$$\left[i\omega - \hat{H}_0(\mathbf{R}) - \hat{u}(\mathbf{R})\right]\hat{G}(\mathbf{R},\mathbf{R}',\omega) - \int d\mathbf{r}\hat{\Delta}(\mathbf{R},\mathbf{r})\hat{G}(\mathbf{R}-\mathbf{r},\mathbf{R}',\omega) = \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}'). \tag{3}$$

Здесь

$$\hat{H}_0(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} H_0(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & -H_0^*(\mathbf{R}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{u}(\mathbf{R}) = \hat{\tau}_3 u(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & -u(\mathbf{R}) \end{pmatrix},$$

$u(\mathbf{R})$ — потенциал рассеяния на примесях,

$$H_0(\mathbf{R}) = \frac{1}{2m}\left(-i\frac{\partial}{R} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(R)\right)^2 - \mu \tag{4}$$

— одночастичный гамильтониан электронов в магнитном поле. Магнитное поле считается однородным и совпадающим с внешним полем, что заведомо оправдано при $H \sim H_{c2}$ в сверхпроводниках с большим значением параметра Гинзбурга–Ландау. Мы воспользуемся собственными функциями $\phi_l(\mathbf{R})$ оператора $H_0(\mathbf{R})$, образующими представление магнитных подрешеток [10]. В калибровке Ландау $\mathbf{A}(\mathbf{R}) = (0, Hx, 0)$ функции $\phi_l(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\phi_l(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{a}{\lambda}}\exp(ik_z z)\sum_m \exp(-iq_x am)\exp\left[i\left(q_y+\frac{\pi m}{a}\right)y\right]\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}+\left(q_y+\frac{\pi m}{a}\right)\lambda\right), \tag{5}$$

где

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)H_n(s), \tag{6}$$

$$H_n(s) = (-1)^n \exp(s^2)\frac{d^n}{ds^n}\exp(-s^2) \tag{7}$$

— полиномы Эрмита. Элементарная ячейка в решетке магнитных трансляций представляет собой прямоугольник со сторонами $a_x = a$ и $a_y = 2a$. При этом квантовое число $l = \{n, k_z, \vec{q}\}$, и $\vec{q}$ — двумерный вектор из первой зоны Бриллюэна: $-\pi/a < q_x < \pi/a$ и $-\pi/2a < q_y < \pi/2a$.

Матрица $\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ содержит нормальную $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$, и аномальную $F(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ функции Грина, которые могут быть записаны как в координатном представлении, так и в представлении состояний $\phi_l(\mathbf{r})$:

$$\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \begin{pmatrix} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) & F(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) \\ F^+(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) & -G(\mathbf{r}',\mathbf{r},-\omega) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{ll'}\begin{pmatrix} \phi_l(\mathbf{r})G_{ll'}(\omega)\phi_{l'}^*(\mathbf{r}') & \phi_l(\mathbf{r})F_{ll'}(\omega)\phi_{l'}(\mathbf{r}') \\ \phi_l^*(\mathbf{r})F_{ll'}^+(\omega)\phi_{l'}^*(\mathbf{r}') & -\phi_{l'}(\mathbf{r}')G_{l'l}(-\omega)\phi_l^*(\mathbf{r}). \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Суммирование по квантовым числам следует понимать как

$$\sum_l = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dq_x}{2\pi} \int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \frac{dq_y}{2\pi}. \tag{9}$$

Параметр порядка

$$\hat{\Delta}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{R}, \mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

является функцией двух переменных: координаты $\mathbf{R}$ центра масс куперовской пары и относительного положения $\mathbf{r}$ электронов в паре, и определяется из уравнения самосогласования

$$\Delta^*(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) T \sum_\omega F^+ \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \omega \right), \tag{11}$$

$V(\mathbf{r})$ — потенциал притяжения электронов.

Сохраняя для усредненной по положениям примесей функции Грина обозначение (8), получаем для нее следующее уравнение [11]:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \omega) = \hat{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \omega) + \int d\mathbf{R}_1 \; \hat{g}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \omega) \hat{\Sigma}(\mathbf{R}_1, \omega) \hat{G}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}', \omega) + \\ + \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{r} \; \hat{g}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) \hat{\Delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}) \hat{G}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}, \mathbf{R}', \omega). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ — функция Грина нормального металла в магнитном поле в отсутствие примесей:

$$\hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) & 0 \\ 0 & -g(\mathbf{r}', \mathbf{r}, -\omega) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Функция Грина $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ выражается через собственные функции оператора H_0 следующим образом:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_l \phi_l(\mathbf{r}) g_l(\omega) \phi_l^*(\mathbf{r}'), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} & g_l(\omega) = (i\omega - \xi_l)^{-1}, \\ & \xi_l = \xi_n(k_z) = \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_z^2}{2m^*} - \mu. \end{aligned} \tag{15}$$

Выражение для примесной собственно-энергетической части при анизотропном спаривании имеет вид

$$\Sigma_{imp}(\mathbf{R}, \omega) = \begin{pmatrix} \bar{G}(\mathbf{R}, \omega) & 0 \\ 0 & -\bar{G}(\mathbf{R}, -\omega) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\bar{G}(\mathbf{R},\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{G}(\mathbf{R},\omega) = n_{imp}u^2 G(\mathbf{R},\mathbf{R},\omega), \tag{17}$$

n_{imp} — концентрация примесей, u — характерная величина потенциала рассеяния на примеси.

В отличие от обычной сверхпроводимости, в фазах с анизотропным спариванием

$$\int d\Omega_{\hat{r}} F\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2},\omega\right) = 0,$$

где $d\Omega_{\hat{r}}$ обозначает элемент телесного угла в пространстве единичных векторов $\hat{r} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Поэтому недиагональные элементы собственно-энергетической части равны нулю.

С точностью до третьего порядка по Δ нормальная и аномальная функции Грина имеют вид

$$G_{ll'}(\omega) = G^{(0)}_{ll'}(\omega) + G^{(2)}_{ll'}(\omega), \tag{18}$$

$$F_{ll'}(\omega) = F^{(1)}_{ll'}(\omega) + F^{(3)}_{ll'}(\omega). \tag{19}$$

Из уравнения (12) непосредственно находим

$$G^{(0)}_{ll'}(\omega) = \delta_{ll'}G^{(0)}_l(\omega) = \frac{\delta_{ll'}}{g_l^{-1}(\omega) - \bar{G}^{(0)}_l}, \tag{20}$$

$$G^{(2)}_{ll'}(\omega) = G^{(0)}_l(\omega)\bar{G}^{(2)}_{l'l}(\omega)G^{(0)}_{l'}(\omega) + \sum_{l_1} G^{(0)}_l(\omega)\Delta_{ll_1}(\omega)F^{+(1)}_{l_1l'}(\omega) \tag{21}$$

и для аномальной функции Грина

$$F^{+(1)}_{ll'}(\omega) = -G^{(0)}_l(-\omega)\Delta^*_{ll'}(\omega)G^{(0)}_{l'}(\omega), \tag{22}$$

$$F^{+(3)}_{ll'}(\omega) = -\sum_{l_1} G^{(0)}_l(-\omega)\Delta^*_{ll_1}(\omega)G^{(2)}_{l_1l'}(\omega) + \sum_{l_1} G^{(0)}_l(-\omega)\bar{G}^{(2)}_{ll_1}(\omega)F^{+(1)}_{l_1l'}(\omega). \tag{23}$$

В нулевом приближении по Δ^2 решение уравнения самосогласования для примесной собственно-энергетической части диагонально по l и l' и имеет вид $\bar{G}^{(0)}_l(\omega) = -i\Gamma_{imp}\,\mathrm{sign}\,\omega$, где $\Gamma_{imp} = \pi n_{imp}u^2 N_0$. Поправка второго порядка по Δ определяется из уравнения

$$\bar{G}^{(2)}_{ll'}(\omega) = n_{imp}u^2 \sum_{pp'} \int d\mathbf{r}\phi_l(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})\phi^*_{p'}(\mathbf{r})\phi^*_{l'}(\mathbf{r})G^{(2)}_{pp'}(\omega). \tag{24}$$

Система уравнений (20)–(24) фактически совпадает с системой уравнений, определяющих функцию Грина в изотропном сверхпроводнике [5], с тем отличием, что матричный элемент параметра порядка определяется выражением

$$\Delta_{ll'} = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{r}\phi^*_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi^*_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\Delta(\mathbf{R},\mathbf{r}), \tag{25}$$

явный вид которого необходимо найти для рассматриваемых фаз с анизотропными типами спаривания. В (25) мы провели сдвиг переменной $\mathbf{R}$ на $\mathbf{r}/2$.

3. СТРУКТУРА ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА ВБЛИЗИ ВЕРХНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы приведем вид решений линеаризованного уравнения самосогласования (11) для фаз с анизотропным спариванием. Будем рассматривать сверхпроводящие фазы, для которых параметр порядка в смешанном представлении $(\mathbf{R},\ \hat{k})$ имеет вид

$$\Delta(\mathbf{R},\hat{k}) = \sum \psi_i(\hat{k})\Delta_i(\mathbf{R}). \tag{26}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — координата центра тяжести пары, а $\hat{k} \approx \mathbf{k}/k_F$ — направление импульса относительного движения электронов. Выражение (26) является преобразованием Фурье (по относительной координате $\mathbf{r}$) параметра порядка, определенного в (11); $\psi_i(\hat{k})$ — функции базиса неприводимого представления группы точечной симметрии кристалла, по которым происходит разложение потенциала спаривающего взаимодействия, действующего в слое толщиной ϵ_0 вблизи поверхности Ферми:

$$V(\hat{k},\hat{k}') = -|g|\sum_i \psi_i(\hat{k})\psi_i^*(\hat{k}'). \tag{27}$$

Мы рассмотрим фазы с p-спариванием и параметром порядка $\psi_i(\hat{k}) = \sqrt{3}\hat{k}_i$, в которых куперовские пары с равной вероятностью находятся в состояниях с проекцией спина $S_z = \pm 1$ и нулевой вероятностью в состоянии с $S_z = 0$, а также фазу, соответствующую одномерному представлению B_{1g} в кристалле с тетрагональной симметрией D_{4h} с функцией

$$\psi(\hat{k}) = \sqrt{\frac{15}{4}}\left(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2\right).$$

В однородном магнитном поле линеаризованное уравнение для параметра порядка записывается в виде [8]

$$\Delta_i(\mathbf{R}) = gT\sum_\omega\sum_j \int d\mathbf{r}\psi_i^*(\hat{r})\psi_j(\hat{r})\tilde{g}(\mathbf{r},-\omega)\tilde{g}\,(\mathbf{r},\omega)\exp\left[i\mathbf{r}\mathbf{D}(\mathbf{R})\right]\Delta_j(\mathbf{R}). \tag{28}$$

Здесь

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}) = -i\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} + \frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R}),$$

e — модуль заряда электрона, $\hat{r}$ — направление вектора $\mathbf{r}$, $\tilde{g}(\mathbf{r},\omega)$ — функция Грина электрона в нормальном состоянии, определенная так, что она зависит только от разности пространственных координат:

$$\tilde{g}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega) = \exp\left(i\frac{e}{c}\int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{s})ds\right)g(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega). \tag{29}$$

Для простоты изложения мы отвлекаемся от действия магнитного поля на спины электронов.

Решение уравнения (28) имеет вид конечной или бесконечной линейной комбинации функций $f_N(\mathbf{r})$:

$$\Delta_i(\mathbf{R}) = \sum_N A_N^i f_N(\mathbf{R}). \tag{30}$$

Для квадратной решетки Абрикосова (для простоты мы рассматриваем только этот случай) функции $f_N(\mathbf{R})$ имеют вид

$$f_N(\mathbf{R}) = \sqrt[4]{2\pi} \sum_\nu \exp\left(\frac{2\pi i\nu Y}{a}\right) \varphi_N\left(\sqrt{2}\left(\frac{X}{\lambda} + \frac{\pi\nu\lambda}{a}\right)\right), \tag{31}$$

где $\varphi_N(s)$ определены формулой (6).

Имеются три класса решений для фаз с p-спариванием [8], в которых максимальные значения H_{c2} достигаются в сверхпроводящих состояниях в виде полярной фазы,

$$\Delta^{pol}(\mathbf{R}, \hat{k}) = \sqrt{3}\Delta^{pol}\hat{k}_z f_0(\mathbf{R}), \tag{32}$$

A-фазы,

$$\Delta^A(\mathbf{R}, \hat{k}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta^A(\hat{k}_x - i\hat{k}_y) f_0(\mathbf{R}), \tag{33}$$

и фазы Шарнберга–Клемма (SK)

$$\Delta^{SK}(\mathbf{R}, \hat{k}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta^{SK}\left[(\hat{k}_x + i\hat{k}_y) f_0(\mathbf{R}) + \frac{1-\beta_0}{\gamma_0}(\hat{k}_x - i\hat{k}_y) f_2(\mathbf{R})\right]. \tag{34}$$

Соответствующие уравнения для H_{c2} имеют вид

$$\alpha_0(H,T) = 1, \tag{35}$$

$$\beta_0(H,T) = 1, \tag{36}$$

$$[1-\beta_0(H,T)]\,[1-\beta_2(H,T)] = \gamma_0^2(H,T), \tag{37}$$

где

$$\alpha_0(H,T) = 6\pi|g|T\sum_\omega \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos^2\theta \exp\left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\lambda^2}\right)\tilde{g}(r,-\omega)\tilde{g}(r,\omega),$$

$$\beta_N(H,T) = 3\pi|g|T\sum_\omega \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \exp\left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\lambda^2}\right)\tilde{g}(r,-\omega)\tilde{g}(r,\omega) L_N\left(\frac{r^2\sin^2\theta}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_0(H,T) = -3\pi|g|T\sum_\omega \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \exp\left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\lambda^2}\right)\tilde{g}(r,-\omega)\tilde{g}(r,\omega)\frac{r^2\sin^2\theta}{\sqrt{2}\,\lambda^2}.$$

Здесь $L_N(s)$ — полиномы Лагерра. Структура решений не зависит от того, какое выражение для функций Грина $\tilde{g}(r,\omega)$, точное или квазиклассическое:

$$\tilde{g}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{m}{2\pi r}\exp\left(ip_F r\,\mathrm{sign}\,\omega - \frac{|\omega|r}{v_F}\right), \tag{38}$$

мы выбираем. Последнее будет использоваться во всех дальнейших вычислениях линейной части уравнений самосогласования.

Наконец, для фазы в тетрагональном кристалле в магнитном поле, направленном вдоль оси четвертого порядка, линейная комбинация в (30), соответствующая максимальному H_{c2} содержит бесконечное число членов. Оставляя только первые три (учет остальных дает исчезающе малые поправки к значению H_{c2} и коэффициентам A_N с $N = 0,\ 1,\ 2$), получаем в пределе $T \to 0$

$$\Delta^D(\mathbf{R},\hat{k}) = \sqrt{\frac{15}{4}}\Delta^D(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2)\,[f_0(\mathbf{R}) + 0.15 f_4(\mathbf{R}) + 0.013 f_8(\mathbf{R}) + \ldots]. \tag{39}$$

Поле H_{c2} определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} \beta_0 - 1 & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_0 & \beta_4 - 1 & \gamma_4 \\ 0 & \gamma_4 & \beta_8 - 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{40}$$

где

$$\beta_N(H,T) = \frac{15}{4}\pi g \sum_\omega \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin^5\theta \exp\left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\lambda^2}\right)\tilde{g}(r,-\omega)\tilde{g}(r,\omega) L_N\left(\frac{r^2\sin^2\theta}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_N(H,T) = \frac{15}{8}\pi g \sum_\omega \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin^5\theta \exp\left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\lambda^2}\right)\tilde{g}(r,-\omega)\tilde{g}(r,\omega) \times$$
$$\times \sum_{l=0}^N \left(-\frac{r^2\sin^2\theta}{\lambda^2}\right)^{l+1} \frac{\sqrt{N!(N+4)!}}{l!(l+4)!(N-l)!}.$$

Приведенными в этом разделе выражениями для параметра порядка в анизотропных фазах мы воспользуемся в следующих разделах для вычисления матричных элементов $\Delta_{ll'}$.

4. МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

В этом разделе мы проведем вычисление матричного элемента (25) для различных фаз с анизотропным спариванием.

Наиболее простым для рассмотрения является вычисление $\Delta_{ll'}$ для полярной фазы. В этой фазе параметр порядка как функция $\mathbf{r}$ определяется следующим образом:

$$\Delta^{pol}(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \sqrt{3}\Delta^{pol}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_0(\mathbf{R})\hat{k}_z e^{i\mathbf{kr}}. \tag{41}$$

Интегрирование по $\mathbf{k}$ предполагается вблизи поверхности Ферми в слое толщиной $\delta k = \epsilon_c/v_F$, где действует спаривающий потенциал. Поэтому можно считать $\hat{k}_z \approx \approx k_z/k_F$, а функцию $\Delta^{pol}(\mathbf{R},\mathbf{r})$ быстроубывающей функцией $\mathbf{r}$. Переписав $k_z \exp(i\mathbf{kr}) = = -i\partial_z \exp(i\mathbf{kr})$, где введено обозначение $\partial_z = \partial/\partial z$, имеем (далее $l = \{n, k_z, q\}$ и $l' = \{n', k_z', q'\}$)

$$\Delta_{ll'}^{pol} = -i\sqrt{3}\frac{\Delta^{pol}}{k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\int d\mathbf{r}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right]^*\partial_z e^{i\mathbf{kr}} =$$
$$= i\sqrt{3}\frac{\Delta^{pol}}{k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\int d\mathbf{r}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kr}}\partial_z\left[\phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right]^* =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k_z - k_z'}{k_F}\Delta^{pol}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\phi_l^*(\mathbf{R})\phi_{l'}^*(\mathbf{R}).$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что интеграл по импульсам $\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{kr}}$ дает сферически-симметричную, быстроубывающую функцию $\mathbf{r}$, которую можно аппроксимировать $\delta(\mathbf{r})$-функцией, и интегрирование по $\mathbf{r}$ оказывается тривиальным (см. [11]).

Оставшийся интеграл совпадает с матричным элементом параметра порядка в сверхпроводнике с изотропным спариванием. Он вычислен в Приложении (см. (86) при $N = 0$). Таким образом, величина матричного элемента параметра порядка в случае полярной фазы отличается от его значения в случае изотропной сверхпроводимости лишь тем, что имеется дополнительный множитель $i\sqrt{3}\,k_z/k_F$:

$$\Delta_{ll'}^{pol} = (2\pi)^3\delta(\vec{q}+\vec{q}\,')\delta(k_z+k_z')\Delta_{nn'}^{pol}(\vec{q},k_z), \tag{42}$$

где

$$\Delta_{nn'}^{pol}(\vec{q}) = i(-1)^{n'}\sqrt{3}\frac{k_z}{k_F}\Delta^{pol}\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}}\times$$
$$\times\sum_\nu \exp(2i\nu q_x a)\varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda+\frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right). \tag{43}$$

Рассмотрим теперь A-фазу. Параметр порядка имеет вид

$$\Delta^A(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta^A\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}f_0(\mathbf{R})(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)e^{i\mathbf{kr}}. \tag{44}$$

Представим $(k_x - ik_y)\exp(i\mathbf{kr}) = -i(\partial_x - i\partial_y)\exp(i\mathbf{kr})$ и проделаем вычисления, аналогичные вычислениям для полярной фазы:

$$\Delta_{ll'}^A = -i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\int d\mathbf{r}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right]^*(\partial_x - i\partial_y)e^{i\mathbf{kr}} =$$
$$= i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\int d\mathbf{r}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kr}}\left[(\partial_x + i\partial_y)\left(\phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right)\right]^* =$$
$$= i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{2k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\int d\mathbf{r}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kr}}\times$$
$$\times\left[\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)(\partial_X + i\partial_Y)\phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right) - \phi_l\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)(\partial_X + i\partial_Y)\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right]^* =$$
$$= -i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{2k_F}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\left[\phi_{l'}(\mathbf{R})\Pi_+\phi_l(\mathbf{R}) - \phi_l(\mathbf{R})\Pi_+\phi_{l'}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right]^*.$$

Здесь производные по компонентам вектора **r** заменены на производные по компонентам вектора **R**, после чего выполнены интегрирования по **k** и **r**. Выражения в квадратных скобках преобразованы таким образом, что обычные дифференциальные операторы заменены на повышающие операторы[2)] для состояний $\phi_{nk_z\vec{q}}$. Получаем

$$\Delta^A_{ll'} = -i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{\sqrt{2}\,k_F\lambda}\left(\sqrt{n+1}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\phi^*_{n'k'_zq'}(\mathbf{R})\phi^*_{n+1,k_z,\vec{q}}(\mathbf{R}) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{n'+1}\int d\mathbf{R} f_0(\mathbf{R})\phi^*_{n'+1,k'_z,q'}(\mathbf{R})\phi^*_{nk_zq}(\mathbf{R})\right). \tag{45}$$

Интегрирование по координате **R** выполнено в Приложении А ($N = 0$ в формуле (86)). Итак, находим

$$\Delta^A_{nn'}(\vec{q}) = i(-1)^{n'+1}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta^A}{k_F\lambda}\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n'+1)!}{2^{n+n'+1}n!n'!}} \times$$
$$\times\sum_\nu \exp(2i\nu q_x a)\varphi_{n+n'+1}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right). \tag{46}$$

Матричный элемент параметра порядка для фазы Шарнберга–Клемма вычисляется аналогично матричному элементу для фазы A. В этом случае параметр порядка представляется в виде линейной комбинации функций $(\hat{k}_x + i\hat{k}_y)f_0(\mathbf{R})$ и $(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)f_2(\mathbf{R})$:

$$\Delta^{SK}(\mathbf{R},\hat{k}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta^{SK}\left[(\hat{k}_x + i\hat{k}_y)f_0(\mathbf{R}) + A(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)f_2(\mathbf{R})\right].$$

Величины Δ и A будут определены из уравнений самосогласования. Выполняя преобразования подобные тем, что проделаны для фазы A, заметим, что в той части выражения для матричного элемента параметра порядка, которая содержит функцию $f_0(\mathbf{R})$, на волновые функции электрона будет действовать понижающий оператор Π_- (см. сноску 2), в то время как в части, содержащей функцию $f_2(\mathbf{R})$, — повышающий оператор Π_+. Воспользовавшись свойствами повышающего и понижающего операторов, приходим к выражению, аналогичному (45). Интегрирование по **R** в слагаемом, содержащем функцию $f_2(\mathbf{R})$, выполняется с помощью формулы (86) Приложения с $N = 2$. Таким образом, оказывается, что матричный элемент параметра порядка для фазы Шарнберга–Клемма равен

$$\Delta^{SK}_{nn'}(\vec{q}) = i(-1)^{n'-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{n+n'}}{k_F\lambda}\Delta^{SK}\left(1 + \frac{A}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}} \times$$
$$\times\sum_\nu \exp(2i\nu q_x a)\varphi_{n+n'-1}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right). \tag{47}$$

Здесь мы считаем, что $n' \approx n$.

[2)] Повышающий и понижающий операторы определяются как $\Pi_\pm = (\Pi_y \mp i\Pi_x)$, где $\mathbf{\Pi} = (-i\partial_x, -i\partial_y + (e/c)A_y, -i\partial_z)$, и обладают следующим свойством: $\Pi_+\,\phi_{nk\vec{q}}(\mathbf{R}) = \lambda^{-1}\sqrt{2(n+1)}\phi_{n+1,k,\vec{q}}(\mathbf{R})$, $\Pi_-\,\phi_{nk\vec{q}}(\mathbf{R}) = \lambda^{-1}\sqrt{2n}\phi_{n-1,k,\vec{q}}(\mathbf{R})$.

Согласно предыдущему разделу, параметр порядка в D-фазе можно представить в виде

$$\Delta^D(\mathbf{R},\hat{k}) = \sqrt{\frac{15}{4}}\Delta^D(\hat{k}_x^2-\hat{k}_y^2)\,[f_0(\mathbf{R})+A_4f_4(\mathbf{R})+A_8f_8(\mathbf{R})+\ldots] =$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{4}\Delta^D\Big[(\hat{k}_x-i\hat{k}_y)^2f_0(\mathbf{R})+(\hat{k}_x+i\hat{k}_y)^2f_0(\mathbf{R})+(\hat{k}_x-i\hat{k}_y)^2A_4f_4(\mathbf{R})+$$
$$+(\hat{k}_x+i\hat{k}_y)^2A_4f_4(\mathbf{R})+(\hat{k}_x-i\hat{k}_y)^2A_8f_8(\mathbf{R})+\ldots\Big]. \tag{48}$$

В дальнейших вычислениях мы будем учитывать лишь первые два слагаемых в правой части (48). Учет остальных членов дает малые поправки к вычисляемым ниже физическим величинам.

Приведем выражение для матричного элемента параметра порядка фазы с D-типом спаривания при $n'\approx n$:

$$\Delta^D_{nn'}(\vec{q}) = \sqrt{\frac{15}{4}}\Delta^D\frac{n+n'}{2k_F^2\lambda^2}(-1)^{n'}\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}}\times$$
$$\times\sum_\nu e^{2i\nu q_xa}\left[\varphi_{n+n'+2}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda+\frac{\pi\nu\lambda}{a}\right)\right)+\varphi_{n+n'-2}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda+\frac{\pi\nu\lambda}{a}\right)\right)\right]. \tag{49}$$

Ниже будет показано, что для всех перечисленных фаз плотность электронных состояний выражается через

$$\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\Delta_{nn'}(\vec{q})\Delta^*_{nn'}(\vec{q}) = \Delta^2I_{nn'}(k_z)\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}. \tag{50}$$

Соответствующий каждой фазе множитель $I_{nn'}(k_z)$ указан в таблице.

Фаза	$I_{nn'}(k_z)$	$I(\theta)$
s-тип	1	1
Полярная	$3k_z^2/k_F^2$	$3\cos^2\theta$
A	$\frac{3}{2}\frac{n+n'+1}{k_F^2\lambda^2}$	$\frac{3}{2}\sin^2\theta$
SK	$\frac{3}{2}\frac{n+n'}{k_F^2\lambda^2}\left(1+\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2$	$\frac{3}{2}\sin^2\theta\left(1+\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2$
D	$\frac{15}{8}\frac{(n+n')^2}{k_F^4\lambda^4}$	$\frac{15}{8}\sin^4\theta$

Мы интересуемся электронными состояниями вблизи фермиевской поверхности, поэтому можно считать, что n определяется из приближенных равенств $\omega_c(n+1/2)+$ $+k_z^2/2m^*\approx\mu$ и $n'\approx n$. Тогда $I_{nn'}(k_z)\approx I(\theta)$, где $\sin^2\theta = n/(k_F\lambda)^2$ и $\cos^2\theta = k_z^2/k_F^2$. Отметим, что квазиклассические выражения для $I(\theta)$ представляют не что иное, как среднее от квадрата модуля параметра порядка по азимутальному углу на фермиевской сфере. Так, для A-фазы $|\hat{k}_x-i\hat{k}_y|^2 = \sin^2\theta$. Если отбросить в выражении для $I(\theta)$ в фазе с D-типом спаривания вклад от функций $f_N(\mathbf{R})$ с $N\neq 0$, то $I(\theta)$ приобретет вид $I(\theta)=\sin^4(\theta/2)$, что также соответствует усредненному по азимутальному углу выражению $(\hat{k}_x^2-\hat{k}_y^2)^2$.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Параметры порядка сверхпроводящих фаз в полях, меньших верхнего критического, должны быть найдены из уравнения самосогласования (11). В фазах A и полярной, где при $H = H_{c2}$ параметр порядка пропорционален $f_0(\mathbf{R})$, задача его нахождения вблизи H_{c2} решается так же, как и в случае обычной сверхпроводимости [5], то есть ищется решение, пропорциональное решению линеаризованного уравнения (11). Найдем коэффициент пропорциональности — амплитуду параметра порядка Δ для полярной и A фаз. Уравнение для амплитуды параметра порядка имеет вид

$$\Delta^2 = |g|T\sum_{\omega}\sum_{nn'}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\int\frac{dk_z}{2\pi}\Delta_{nn'}(\vec{q})\left[F^{(1)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)+F^{(3)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)\right]. \qquad (51)$$

Первый член в выражении (51), содержащий $F^{(1)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)$, при значениях поля H, меньших верхнего критического поля H_{c2}, вычисляется в квазиклассическом приближении (см. [5]) и совпадает с приведенным в работе [8]. Таким образом, уравнение самосогласования имеет вид

$$N_0\ln\sqrt{\frac{H_{c2}}{H}} = \Delta^2T\sum_{\omega}\sum_{nn'mm'}\int\frac{dk_z}{2\pi}I_{nm}(k_z)I_{n'm'}(k_z)G^{(0)}_n(k_z,-\omega)G^{(0)}_m(k_z,\omega)\times$$
$$\times G^{(0)}_{n'}(k_z,-\omega)G^{(0)}_{m'}(k_z,\omega)Y^{nn'}_{mm'}. \qquad (52)$$

Здесь $I_{nm}(k_z)$ — множитель, определяющий зависимость параметра порядка от квантовых чисел n, n' и k_z (см. таблицу),

$$Y^{nn'}_{mm'} = 2\pi\lambda^2\int D_{nm}(\vec{q})D^*_{n'm}(\vec{q})D^*_{n'm'}(\vec{q})D_{nm'}(\vec{q})\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}, \qquad (53)$$

где $D_{nm}(\vec{q})$ определены как

$$D_{nm}(\vec{q}) = \Delta_{nm}(\vec{q})/\Delta.$$

Значения верхнего критического поля H_{c2} для фаз с p-спариванием найдены в работе [8].

При выполнении условий $T < \Gamma_{imp} \ll \omega_c$ оставим в выражении (52) только слагаемые, соответствующие $n = n' = m = m'$. Дальнейшие вычисления в целом аналогичны вычислениям в случае обычной сверхпроводимости [5]. Полагаем, что $Y^{nn}_{nn} \approx L$, и выполняем интегрирование по k_z и по квантовому числу n, пренебрегая малыми осциллирующими слагаемыми в ряде Пуассона. Такое интегрирование сводится к интегралу по полярному углу θ и энергиям квазичастиц $\xi_n(k_z)$, отсчитанным от уровня Ферми.

В A-фазе интеграл по полярному углу θ имеет вид

$$\int\frac{I^2(\theta)}{\sin\theta}d\theta = \frac{2}{3}. \qquad (54)$$

Следовательно, амплитуда параметра порядка A-фазы равна

$$\left[\Delta^A(H)\right]^2 \approx \frac{16\pi}{3L_A}n_F\Gamma^2_{imp}\frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}. \qquad (55)$$

Интеграл по углу θ в случае полярной фазы расходится вблизи полюсов. С такой расходимостью мы уже сталкивались при вычислениях зависимости амплитуды параметра порядка от магнитного поля в фазе с s-спариванием [5]. Выполняя обрезание при $\theta_c \approx 1/k_F\lambda$, получаем

$$\left[\Delta^{pol}(H)\right]^2 \approx \frac{16\pi}{9L_{pol}} \frac{n_F\Gamma^2_{imp}}{\ln n_F} \frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}. \tag{56}$$

Параметр порядка фазы Шарнберга–Клемма представляет собой линейную комбинацию функций $(\hat{k}_x + i\hat{k}_y)f_0(\mathbf{R})$ и $(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)f_2(\mathbf{R})$. Поэтому уравнение самосогласования при $T < \Gamma_{imp} \ll \omega_c$ принимает вид системы уравнений:

$$\Delta^2\left[1-\beta_0(H)-\gamma_0(H)A\right] = |g|T\sum_\omega\sum_n\int\frac{dk_z}{2\pi}\frac{1}{\left[(\omega+\Gamma_{imp})^2+\xi_n^2(k_z)\right]^2}\times$$
$$\times\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\Delta^{(1)}_{nn}(\vec{q})\Delta^*_{nn}(\vec{q})\Delta_{nn}(\vec{q})\Delta^*_{nn}(\vec{q}), \tag{57}$$

$$\Delta^2\left\{-\gamma_0(H)+\left[1-\beta_2(H)\right]A\right\} = |g|T\sum_\omega\sum_n\int\frac{dk_z}{2\pi}\frac{1}{\left[(\omega+\Gamma_{imp})^2+\xi_n^2(k_z)\right]^2}\times$$
$$\times\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\Delta^{(2)}_{nn}(\vec{q})\Delta^*_{nn}(\vec{q})\Delta_{nn}(\vec{q})\Delta^*_{nn}(\vec{q}). \tag{58}$$

Здесь для линейного по Δ^2 члена мы воспользовались квазиклассическими выражениями работы [8]. Матричный элемент

$$\Delta_{nn}(\vec{q}) \sim \Delta(1+A/\sqrt{2})$$

(см. (47)), $\Delta^{(1)}_{nn}(\vec{q})$ есть матричный элемент от $\Delta(\hat{k}_x + i\hat{k}_y)f_0(\mathbf{R})$ и $\Delta^{(2)}_{nn}(\vec{q})$ — матричный элемент от $\Delta(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)f_2(\mathbf{R})$.

Оценивая интеграл по компонентам волнового вектора $\vec{q}$ так же, как в случае обычной сверхпроводимости (см. [5]), из уравнений (57) и (58) получаем систему алгебраических уравнений для Δ и A:

$$1-\beta_0(H)-\gamma_0(H)A = \frac{3L_{SK}(1+A/\sqrt{2})^3}{32\pi}\frac{|g|N_0\Delta^2}{n_F\Gamma^2_{imp}}, \tag{59}$$

$$-\gamma_0(H)+(1-\beta_2(H))A = \frac{3L_{SK}(1+A/\sqrt{2})^3}{32\sqrt{2}\pi}\frac{|g|N_0\Delta^2}{n_F\Gamma^2_{imp}}. \tag{60}$$

Из этих двух уравнений находим A:

$$A = \frac{\sqrt{2}\gamma_0 + 1 - \beta_0 + |g|N_0\ln\sqrt{H_{c2}/H}}{\gamma_0+\sqrt{2}\left(1-\beta_2+|g|N_0\ln\sqrt{H_{c2}/H}\right)}. \tag{61}$$

Здесь $\gamma_0 = \gamma_0(H_{c2}) = 1/\sqrt{2}$, $\beta_0 = \beta_0(H_{c2})$, $\beta_2 = \beta_2(H_{c2})$, $1-\beta_0(H_{c2}) = (\sqrt{3}-1)/2$ и использовано соотношение

$$\beta_0(H)-\beta_0(H_{c2}) = \beta_2(H)-\beta_2(H_{c2}) = |g|N_0\ln\sqrt{H/H_{c2}}.$$

Подставляя найденное значение A в (59) и оставляя линейные по $\ln(H_{c2}/H)$ члены, имеем

$$\alpha \ln \sqrt{\frac{H_{c2}}{H}} = \frac{3L_{SK}(1 + A/\sqrt{2})^3}{32\pi} \frac{\Delta^2}{n_F \Gamma_{imp}^2}, \tag{62}$$

где $\alpha \approx 1.007$.

Для фазы Шарнберга–Клемма окончательно находим

$$\left[\Delta^{SK}(H)\right]^2 \approx \frac{16\pi}{3L_{SK}} \left(1 + \frac{A}{\sqrt{2}}\right)^{-3} n_F \Gamma_{imp}^2 \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}. \tag{63}$$

При дальнейших вычислениях будем считать, что $A = (1 - \beta_0)/\gamma_0$, поскольку учет зависимости коэффициента A от поля H был бы превышением точности.

Так же как для фазы Шарнберга–Клемма, для сверхпроводника с D-типом спаривания, амплитуда параметра порядка и его вид определяются из системы алгебраических уравнений. Положим, что параметр порядка имеет вид

$$\Delta^D(\mathbf{R}, \hat{k}) = \sqrt{\frac{15}{4}} \Delta^D(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2) \left[f_0(\mathbf{R}) + \ldots\right], \tag{64}$$

где величина Δ^D определяется из уравнения

$$\begin{aligned} 1 - \beta_0(H) = \left(\frac{15}{8}\right)^2 (\Delta^D)^2 |g| T \times \\ \times \sum_{\omega} \sum_{n} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{n^4}{k_F^4 \lambda^4} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!^2}\right]^2 \frac{1}{\left[(\omega + \Gamma_{imp})^2 + \xi_n^2(k_z)\right]^2} L_D(n), \end{aligned} \tag{65}$$

получающегося из уравнения (11) домножением на функцию $\Delta^D(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2) f_0(\mathbf{R})$ и последующим интегрированием по переменным $\mathbf{R}$ и $\hat{k}$. Величина $L_D(n)$ определяется выражением типа (53) и является функцией целочисленного параметра n. Мы пренебрежем зависимостью от числа n и в дальнейших вычислениях будем считать L_D численной константой равной усредненному по n значению соответствующей функции. Из уравнения (65), сохраняя члены не выше первой степени по $H_{c2} - H$, получаем величину амплитуды параметра порядка для фазы с D-типом спаривания:

$$\left(\Delta^D\right)^2 = \frac{7\pi \cdot 2^9}{45 L_D} n_F \Gamma_{imp}^2 \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}. \tag{66}$$

6. ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ И АМПЛИТУДА ОСЦИЛЛЯЦИЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Получим теперь значения плотности состояний и амплитуды осцилляций намагниченности в фазах с p- и D-типами спаривания. Отметим, что вычисления этих величин полностью аналогичны проделанным для фазы с s-спариванием. Различие заключается только в интегралах по полярному углу θ.

Плотность состояний $N(E)$ выражается через функцию Грина электронов:

$$N(E) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_l G_{ll}(E),$$
$$G_{ll'}(E) = G_l^{(0)}\delta_{ll'} + G_{ll'}^{(2)}. \tag{67}$$

Суммирование по номерам уровней Ландау проведем с помощью формулы Пуассона:

$$\sum_n \ldots = \sum_r \int dne^{2\pi irn}\ldots \tag{68}$$

Неосциллирующая часть плотности состояний в необычных сверхпроводниках определяется слагаемым с $r = 0$ и имеет вид, аналогичный выражению для соответствующей величины в изотропном сверхпроводнике с s-спариванием (1):

$$N^{pol}(E=0) = N_0\left(1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{16}\frac{\left(\Delta^{pol}\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2}\right) \tag{69}$$

в полярной фазе,

$$N^{A}(E=0) = N_0\left(1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{32}\frac{\left(\Delta^{A}\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2}\right) \tag{70}$$

в A-фазе,

$$N^{SK}(E=0) = N_0\left(1 - \frac{\sqrt{3\pi}}{32}\left(1 + \frac{1-\beta_0}{\sqrt{2}\gamma_0}\right)^2\frac{\left(\Delta^{SK}\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2}\right) \tag{71}$$

в фазе Шарнберга–Клемма,

$$N^{D}(E=0) = N_0\left(1 - \frac{45\sqrt{\pi}}{2^9}\frac{\left(\Delta^{D}\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2}\right) \tag{72}$$

в фазе с D-типом спаривания.

Воспользуемся значениями величины Δ^2 для каждой из фаз (55), (56), (63) и (66) и укажем пределы применимости первого порядка разложения по Δ^2, определяемые из условия $N(E=0) > 0$. Имеем для полярной фазы

$$\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} < \frac{3L_{pol}\ln n_F}{\pi^{3/2}\sqrt{n_F}}, \tag{73}$$

для A-фазы

$$\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} < \frac{2L_A}{3\pi^{3/2}\sqrt{n_F}}, \tag{74}$$

для фазы Шарнберга–Клемма

$$\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} < \frac{2L_{SK}}{\pi^{3/2}\sqrt{n_F}}\left(1 + \frac{1-\beta_0}{\sqrt{2}\gamma_0}\right) \tag{75}$$

и для D-фазы:

$$\frac{H_{c2}-H}{H_{c2}} < \frac{4L_D}{7\pi^{3/2}\sqrt{n_F}}. \tag{76}$$

Рассмотрим теперь осциллирующие добавки к плотности состояний. Перейдем от интегрирования по n к интегрированию по $\xi_n(k_z) = \xi$. Интегрирование по ξ и k_z выполняется независимо. При этом

$$\int \frac{dk_z}{2\pi} \exp\left(-2\pi i \frac{k_z^2}{2m\omega_c} r\right) = \frac{1}{2\pi\lambda\sqrt{r}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Главный вклад в этот интеграл дает полоса вблизи экватора фермиевской сферы шириной порядка $\lambda^{-1} \ll k_F$. Поскольку в этой области величина параметра порядка изменяется незначительно, мы считаем, что при интегрировании по k_z можно пренебречь зависимостью матричного элемента от импульса k_z и воспользоваться его значением в экваториальной плоскости фермиевской сферы ($k_z = 0$). Для r-го члена ряда Пуассона ($r \neq 0$) получаем выражение

$$N^{(r)}(E) = \frac{\sqrt{m^3\omega_c}}{2\pi^2} \frac{(-1)^r}{\sqrt{r}} A_r(\Delta) \operatorname{Im} \exp\left[i\frac{2\pi r}{\omega_c}(E+\mu) - i\frac{\pi}{4}\right] \exp\left(-\frac{2\pi r \Gamma_{imp}}{\omega_c}\right), \tag{77}$$

определяющее осциллирующие добавки к плотности состояний, различающиеся величиной множителя $A_r(\Delta)$ в разных сверхпроводящих фазах.

В полярной фазе матричный элемент параметра порядка равен нулю в плоскости экватора, поэтому в приближении $\Gamma_{imp} \ll \omega_c$ значение $A_r(\Delta)$ практически не отличается от единицы во всей области применимости разложения по Δ^2 до первого порядка (т. е. в полях H, удовлетворяющих неравенству (73)). Таким образом, в полярной фазе осциллирующий вклад в плотность состояний совпадает с соответствующим вкладом для нормального металла.

Для аксиальных фаз множитель $A_r(\Delta)$, вообще говоря, качественно совпадает с $A_r(\Delta)$ в обычных сверхпроводниках:

$$A_r^A(\Delta^A) = 1 - \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \frac{\left(\Delta^A\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2} \tag{78}$$

для A-фазы,

$$A_r^{SK}(\Delta^{SK}) = 1 - \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1-\beta_0}{\sqrt{2}\gamma_0}\right)^2 \frac{\left(\Delta^{SK}\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2}, \tag{79}$$

$$A_r^D(\Delta^D) = 1 - \frac{15}{2^6\sqrt{\pi}} \frac{\left(\Delta^D\right)^2}{\sqrt{n_F}\,\Gamma_{imp}^2} \tag{80}$$

для фазы Шарнберга–Клемма и для D-фазы.

Воспользовавшись соотношениями (55), (63) и (66), перепишем выражения $A_r(\Delta)$ как функции магнитного поля:

$$A_r^A(H) = 1 - \frac{\sqrt{\pi n_F}}{L_A} \frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}, \tag{81}$$

$$A_r^{SK}(H) = 1 - \frac{\sqrt{\pi n_F}}{L_{SK}} \left(1 + \frac{1-\beta_0}{\sqrt{2}\gamma_0}\right)^{-1} \frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}, \tag{82}$$

$$A_r^{D}(H) = 1 - \frac{14\sqrt{\pi n_F}}{3L_D} \frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}. \tag{83}$$

Осциллирующая часть намагниченности определяется выражением

$$M^{(r)} = -\frac{\partial \Omega^{(r)}}{\partial H} = \frac{1}{2\pi^3}\left(\frac{e}{c}\right)^{3/2} \sqrt{H}\mu \frac{(-1)^r}{r^{1/2}} A_r(H) \times$$
$$\times \sin\left(\frac{2\pi r\mu}{\omega_c} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{2\pi^2 T/\omega_c}{\operatorname{sh}\left(2\pi^2 Tr/\omega_c\right)} \exp\left(-\frac{2\pi r \Gamma_{imp}}{\omega_c}\right). \tag{84}$$

Множитель $A_r(H)$ дается формулами (81)–(83) для A-, SK- и D-фаз и равен единице для полярной фазы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В сверхпроводниках с p-спариванием рассмотрены три типа сверхпроводящих состояний: одно с параметром порядка, обращающимся в нуль на экваторе фермиевской сферы, и два аксиальных, параметр которых имеет нули на полюсах фермиевской сферы. Амплитуда осцилляций в полярной фазе совпадает со значением амплитуды в нормальном металле, что связано с тем, что электроны вблизи экватора, дающие основной вклад в осцилляции намагниченности, не испытывают влияния куперовского конденсата. Этот результат, разумеется, сохраняется для любой сверхпроводящей фазы, где линия нулей параметра порядка совпадает с линией, ограничивающей экстремальное сечение ферми-поверхности. Таким образом, наблюдение эффекта де Гааза–ван Альфена в смешанном состоянии может служить методом идентификации необычных сверхпроводящих фаз.

В аксиальных фазах эффект де Гааза–ван Альфена подавляется несколько сильнее, чем в фазе с s-спариванием. Более резкий рост амплитуды параметра порядка в аксиальных фазах как функции $1-H/H_{c2}$ связан с отсутствием расходимости по полярному углу при решении уравнения самосогласования. Фаза с D-типом спаривания в целом обладает теми же свойствами, что и аксиальные фазы с p-типом спаривания.

В заключение еще раз подчеркнем, что все результаты настоящей работы получены при выполнении условий $T < \Gamma \ll \omega_c$ в линейном приближении по $(H_{c2}-H)/H_{c2}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки Российской Федерации (Программа «Статфизика»), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96632 по программе поддержки ведущих научных школ).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы выполним интегрирование по компонентам вектора $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ в выражении

$$D_{ll'}^{N}=\int f_N(\mathbf{R})\phi_l^*(\mathbf{R})\phi_{l'}^*(\mathbf{R})d\mathbf{R}. \tag{85}$$

Нетрудно видеть, что интеграл распадается на интегралы по каждой координате. Имеем:

$$\int dZ\exp\left[-i(k_z+k_z')Z\right]=2\pi\delta(k_z+k_z'),$$

$$\int dY\exp\left(\frac{2\pi ilY}{a}\right)\exp\left[-i\left(q_y+\frac{\pi m}{a}\right)Y\right]\exp\left[-i\left(q_y'+\frac{\pi m'}{a}\right)Y\right]=2\pi\delta_{2l,m+m'}\delta(q_y+q_y').$$

Здесь использован тот факт, что $\vec{q}$ — двумерный вектор первой зоны Бриллюэна: $-\pi/2a<q_y,\ q_y'<\pi/2a$, a — ребро решетки Абрикосова. При интегрировании по координате X сделаем замену переменной $\xi=(X-\pi l\lambda^2/a)/\lambda$. Вводя обозначение $\eta=[q_y+\pi(m-m')\lambda/2a]\lambda$ и замечая, что $q_y'=-q_y$, представим интеграл по координате X в виде

$$I_{nn'}^{N}=\int d\xi\varphi_N(\sqrt{2}\xi)\varphi_n(\xi+\eta)\varphi_{n'}(\xi-\eta).$$

Для его вычисления воспользуемся производящей функцией полиномов Эрмита и проведем интегрирование по переменной ξ. Получим

$$\sum_{n,n',N}^{\infty}I_{nn'}^{N}(\eta)\frac{u^n}{n!}\frac{v^{n'}}{n'!}\frac{w^N}{N!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left[-\frac{(u-v)^2}{2}+2\sqrt{2}\eta\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right]\exp(-\eta^2)\exp\left[\sqrt{2}w(u+v)\right].$$

Расписывая первую экспоненту в правой части этого равенства как производящую функцию полиномов Эрмита от аргумента $\sqrt{2}\eta$, приходим к равенству

$$\sum_{n,n',N}^{\infty}I_{nn'}^{N}(\eta)\frac{u^n}{n!}\frac{v^{n'}}{n'!}\frac{w^N}{N!}=\sum_{l=0}^{\infty}e^{-\eta^2}H_l(\sqrt{2}\eta)\frac{(u-v)^l}{\sqrt{2}^l l!}\exp\left[\sqrt{2}w(u+v)\right].$$

Разлагая $\exp[\sqrt{2}w(u+v)]$ в ряд и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, u и v, находим

$$I_{nn'}^{N}(\eta)=\sqrt{\pi}e^{-\eta^2}H_{n+n'-N}\left(\sqrt{2}\eta\right)\frac{2^N n!n'!}{\sqrt{2}^{n+n'+1}(n+n'-N)!}\sum_{j=0}^{N}(-1)^{n'+j-N}C_N^jC_{n+n'-N}^{n-j},$$

где C_n^k — биноминальные коэффициенты.

Заметим, что $\exp[ia(mq_x+m'q_x')]=\exp[i(m+m')(q_x+q_x')/2]\exp[i(m-m')\times\times(q_x-q_x')/2]$, и от суммирования по m и m' перейдем к суммированию по $m+m'$ и $m-m'$. Суммирование по $m+m'$ пропадает из-за наличия символа Кронекера $\delta_{2l,m+m'}$, и в силу того что $\eta=\eta(m-m',q_y)$, суммирование по l сводится к

$$\sum_l\exp\left[ila(q_x+q_x')\right]=\frac{2\pi}{a}\delta(q_x+q_x')$$

при условии, что $-\pi/a<q_x,\ q_x'<\pi/a$. Окончательно получаем

$$D_{ll'} = (2\pi)^3\delta(k_z + k_z')\delta(\vec{q} + \vec{q}\,')\sqrt{\sqrt{2\pi}\,\frac{(n+n'-N)!}{2^{n+n'+1}n!n'!N!}\,\frac{n!n'!}{(n+n'-N)!}} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{N}(-1)^{n'+j-N}C_N^j C_{n+n'-N}^{n-j}\sum_{\nu} e^{2i\nu q_x a}\varphi_{n+n'-N}\left(\sqrt{2}(q_y + \pi\nu/a)\lambda\right). \qquad (86)$$

Литература

1. R. Corcoran, N. Harrison, C. J. Haworth et al., Physica B **206–207**, 534 (1995).
2. K. Maki, Phys. Rev. B **44**, 2861 (1991).
3. M. J. Stephen, Phys. Rev. B **45**, 5481 (1992).
4. S. Dukan and Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. **74**, 2311 (1995).
5. М. Г. Вавилов, В. П. Минеев, ЖЭТФ **112**, 1873 (1997).
6. K. Maki, Int. J. Mod. Phys. B **7**, 82 (1993).
7. U. Brandt, W. Pesch, and L. Tewordt, Z. Phys. **201**, 209 (1967).
8. K. Scharnberg and R. A. Klemm, Phys. Rev. B **22**, 5233 (1980).
9. D. J. van Harlingen, Rev. Mod. Phys. **67**, 515 (1995).
10. Ю. А. Бычков, Е. И. Рашба, ЖЭТФ **85**, 1826 (1983).
11. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1960).