ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 6, стр. 2034–2046

ГЕНЕРАЦИЯ КОНТИНУУМА И ГАРМОНИК ВКР ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. В. Боровский[*a], *А. Л. Галкин*[b], *В. В. Коробкин*[a], *О. Б. Ширяев*[a]

[a] *Институт общей физики Российской академии наук*
117942, Москва, Россия
[b] *Институт прикладной математики Российской академии наук*
125047, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 ноября 1997 г.

Разработана теория неустойчивости распространения плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны релятивистской интенсивности в веществе в рамках пространственно-трехмерной геометрии, учитывающая произвольную поляризацию рассеянного излучения. Исследуются генерация гармоник распространяющегося излучения в результате стрикции и релятивистской нелинейности, рассеяние, обусловленное эффектом отдачи электронов, распадная неустойчивость гармоник с образованием рассеянных электромагнитных волн — стоксовых компонент вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) и плазмонов, эффекты взаимодействия электромагнитных волн в плазме (порождающие антистоксовы компоненты ВКР), генерация континуума излучения. Обсуждается переход трехмерной теории к одномерной задаче и к нерелятивистскому пределу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы вызывает существенный интерес проблема экспериментального и теоретического исследования процессов рассеяния лазерного излучения сверхвысокой интенсивности в веществе [1–10]. К сверхвысоким относятся интенсивности излучения $I \geq 10^{18}$ Вт/см^2, при которых проявляются релятивистские эффекты в движении электронов. Такие интенсивности в настоящее время достигаются в экспериментах с мощными ультракороткими лазерными импульсами [11–13]. При фокусировке ультракороткого лазерного импульса в вещество основная часть импульса взаимодействует с плазмой, которая образуется на его переднем фронте. Известно, что поляризация вещества в поле мощного лазерного излучения, приводящая к рассеянию, может быть обусловлена нелинейными токами свободных электронов [14], деформациями электронных оболочек атомов и ионов [15], вибрацией и вращением молекул [16]. В экспериментах с легкими атомарными газами можно выделить первую составляющую поляризации из числа указанных, добившись полной ионизации вещества. Ниже рассмотрим рассеяние лазерного излучения в плазме, обусловленное именно этой причиной. Рассеяние когерентного излучения в плазме при нерелятивистских интенсивностях изучалось, например, в [14, 17–22]. К числу работ, в которых анализировалось рассеяние при релятивистских интенсивностях, прежде всего следует отнести [8–10], см. также [1–7].

[*] E-mail: borovsky@kapella.gpi.ru

Изучение проблемы рассеяния лазерного излучения в веществе можно условно разделить на две практически не связанные между собой задачи. Первая заключается в определении локальных характеристик среды: временных инкрементов (пространственных коэффициентов усиления) рассеянного излучения в элементарном объеме плазмы как функций компонент волнового вектора рассеянной волны и параметров опорной волны. Вторая, в отличие от первой, является интегро-дифференциальной задачей переноса и сводится к расчету поля излучения вдали от рассеивающей области с учетом усиления и поглощения на пути распространения. В данной статье подробно рассматривается первая задача, а именно, — проводится расчет временных инкрементов. Вторая задача затрагивается лишь на качественном уровне.

В последнее время наметилась тенденция к построению пространственно-трехмерной модели рассеяния релятивистски интенсивной плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны в плазме [9, 10]. Теория включает совокупность разнообразных волновых явлений: генерацию гармоник, вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) на электронных плазменных колебаниях, возбуждаемых распространяющимся лазерным импульсом, гидродинамический аналог комптон-эффекта и др., а также предельные переходы к известным ранее случаям, главным образом, — к нерелятивистскому приближению.

Вместе с тем, описание рассеяния релятивистски интенсивной электромагнитной волны в плазме оказывается настолько сложным, что различные авторы ограничиваются рассмотрением ряда приближений. К их числу относятся: 1) одномерное приближение (см., например, [8]); 2) предположение о сохранении определенной поляризации рассеянного излучения, например, круговой [8, 10] (приближение заданной поляризации); 3) поиск инкрементов в предположении, что одна из поперечных компонент волнового вектора равна нулю [9]; 4) резонансные приближения, которые сводятся к использованию точных условий фазового синхронизма для некоторых волновых процессов (см., например, [20]).

В данной статье предлагается вариант теории рассеяния релятивистски интенсивного лазерного излучения в плазме, в рамках которого нет необходимости в использовании ни одного из указанных выше четырех приближений. Численными методами описаны генерация гармоник, ВКР на плазмонах, гидродинамический аналог комптоновского рассеяния, генерация континуума, а также взаимное влияние этих процессов. Исследование базируется на строгом анализе линеаризованных уравнений Максвелла и релятивистской гидродинамики электронной компоненты плазмы, находящейся в сильном электромагнитном поле. Для корректного проведения такого анализа необходимо располагать точным опорным решением исходной нелинейной системы уравнений. В рассматриваемом случае таким решением является плоская монохроматическая циркулярно поляризованная электромагнитная волна произвольной интенсивности [23]. Отметим, что в предшествующей литературе неоднократно проводилось исследование неустойчивости распространения линейно поляризованной монохроматической плоской волны, которая не является точным решением исходных релятивистских уравнений и по этой причине может быть использована только в предположении о малости ее интенсивности.

Задача об исследовании неустойчивости распространения циркулярно поляризованной монохроматической плоской опорной волны произвольной интенсивности сводится к решению системы линейных уравнений в частных производных с осциллирующими коэффициентами. После введения бегущей переменной вдоль оси распространения и взятия преобразования Фурье по пространственным координатам приходим к задаче решения линейной системы, состоящей из бесконечного числа связанных обыкновенных дифференциальных уравнений (что вызвано необходимостью учета генерации гармоник и их взаимодействия). Как показали проведенные расчеты, корректное приближенное решение данной задачи достигается при включении в рассмотрение более ста уравнений. Временной инкремент исследуемой неустойчивости определяется как максимальное собственное значение матрицы решаемой линейной системы. Такой подход, в частности, позволяет избежать выписывания и анализа громоздких дисперсионных уравнений. Отметим, что подобные исследования проведены в гидродинамике при численном анализе линейной стадии развития турбулентности [24]. Авторы данной статьи апробировали этот метод при линейном анализе неустойчивости плоской волны в приближении заданной поляризации [10].

Таким образом, в настоящей работе впервые представлены результаты строгого линейного анализа системы уравнений Максвелла и релятивистской гидродинамики электронов.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Распространение лазерного излучения релятивистской интенсивности в плазме описывается системой уравнений Максвелла и релятивистской гидродинамики электронов [23, 25]:

$$\Box A = \nabla\phi_t + \gamma^{-1}n(\mathbf{A} + \nabla\psi), \tag{1}$$

$$\Delta\phi = n - 1, \tag{2}$$

$$(\nabla\mathbf{A}) = 0, \tag{3}$$

$$\psi_t = \phi - \gamma, \tag{4}$$

$$n_t + \left(\nabla, \gamma^{-1}n(\mathbf{A} + \nabla\psi)\right) = 0, \tag{5}$$

$$\gamma = \left(1 + |\mathbf{A} + \nabla\psi|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Выше $\mathbf{A}$ и ϕ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, ψ — потенциал обобщенного импульса электронов, n — плотность электронов. Выражением (6) определен релятивистский массовый множитель γ. Нижний индекс t означает частную производную по времени.

Система (1)–(6) нормирована следующим образом: $\mathbf{A}$ и ϕ — на mc^2/e, n — на невозмущенное значение n_0, импульс электронной жидкости — на mc, время — на ω_p^{-1}, где ω_p — невозмущенное значение плазменной частоты, а пространственные координаты — на c/ω_p.

Точным решением системы уравнений (1)–(6) является плоская монохроматическая циркулярно поляризованная волна произвольной интенсивности, распространяющаяся, например, вдоль оси $\mathbf{e}_3$ [23]:

$$\mathbf{A}_0 = (1/2)(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)A_0\exp(ik\xi) + \text{c.c.} \tag{7}$$

Здесь $\xi = x_3 - qt$ — бегущая переменная, $q = \omega/k$ — фазовая скорость волны. Кроме этого выполнены условия $\omega^2 - k^2 = \gamma_0^{-1}$, $\gamma_0 = (1 + A_0^2)^{1/2}$, $n = 1$, $\phi = \gamma_0$, $\psi = 0$. Ниже будет использовано обозначение $k^{-1} = \varepsilon$.

Рассмотрим развитие в плазме, через которую распространяется волна (7), малых возмущений, помеченных символом «∼»

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{A}}, \quad n = 1 + \tilde{n}, \quad \phi = \gamma_0 + \tilde{\phi}, \quad \psi = \tilde{\psi}. \tag{8}$$

Линеаризованная система уравнений для возмущений имеет вид

$$\Box\tilde{\mathbf{A}} = \nabla\tilde{\phi}_t + \gamma_0^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}} + \nabla\tilde{\psi}\right) + \gamma_0^{-1}\tilde{n}\mathbf{A}_0 - \gamma_0^{-3}\left(\mathbf{A}_0, \tilde{\mathbf{A}} + \nabla\tilde{\psi}\right)\mathbf{A}_0, \tag{9}$$

$$\Delta\tilde{\phi} = \tilde{n}, \tag{10}$$

$$\left(\nabla\tilde{\mathbf{A}}\right) = 0, \tag{11}$$

$$\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi} = -\gamma_0^{-1}\left(\mathbf{A}_0\tilde{\mathbf{A}} + \nabla\tilde{\psi}\right). \tag{12}$$

Уравнение неразрывности получается взятием дивергенции от уравнения (9)

$$\tilde{n}_t + \gamma_0^{-1}\left(\mathbf{A}_0, \nabla\tilde{n}\right) = -\gamma_0^{-1}\Delta\tilde{\psi} + \gamma_0^{-3}\left(\mathbf{A}_0, \nabla\left(\mathbf{A}_0, \tilde{\mathbf{A}} + \nabla\tilde{\psi}\right)\right). \tag{13}$$

Система (9)–(13) совпадает с уравнениями, полученными в [9] с точностью до нормировки.

Далее наш подход отличается от использованного в [9]. Перейдем в системе (9)–(13) к сопутствующим переменным $(\mathbf{x}_\perp, \xi, t)$, после чего дифференциальные операторы принимают следующий вид:

$$\nabla \to (\nabla_\perp, \partial_\xi), \quad \Delta \to \Delta_\perp + \partial_\xi^2, \quad \partial_t \to D_t = \partial_t - q\partial_\xi, \quad \Box \to D_\Box = \Delta_\perp - \partial_t^2 + 2q\partial_{\xi t}^2 - \varepsilon^2\gamma_0^{-1}\partial_\xi^2.$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, периодически зависящими от ξ, которую не выписываем. Учитывая, что изучается распространение лазерного излучения в неограниченной однородной плазме, переводим данную систему уравнений в пространство волновых векторов возмущений (в импульсное $\mathbf{k}$-пространство) посредством взятия преобразования Фурье по $\mathbf{x}_\perp, \xi$ ($k = |\mathbf{k}_\perp|$):

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{\psi}\right)^T = (2\pi)^{-3/2}\int\left(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{\psi}\right)^T_{\mathbf{k}_\perp, \xi}\exp\left[i\left((\mathbf{k}_\perp, \mathbf{x}_\perp) + \chi\xi\right)\right]d^2\mathbf{k}_\perp d\chi.$$

Ниже символ «∼» при малых возмущениях будет опущен для краткости обозначений.

Результат для фурье-образов следующий ($g_1 = a_0^2/2\gamma_0^3$, $g_2 = a_0/2\gamma_0$):

$$\hat{D}_\Box A_1 + g_1\frac{ik_1\chi^2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}\psi - g_1\frac{k_1k_2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}A_2 + g_1\frac{k_2^2+\chi^2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}A_1 +$$
$$+ g_2\left((F_{1,1}^-)_{\chi-k} + (F_{1,1}^+)_{\chi+k}\right) + \frac{g_1}{2}\left((F_{1,2}^-)_{\chi-2k} + (F_{1,2}^+)_{\chi+2k}\right) = 0, \tag{14}$$

$$\hat{D}_\Box A_2 + g_1\frac{ik_2\chi^2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}\psi - g_1\frac{k_1k_2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}A_1 + g_1\frac{k_1^2+\chi^2}{\mathbf{k}^2+\chi^2}A_2 +$$
$$+ g_2\left((F_{2,1}^-)_{\chi-k} + (F_{2,1}^+)_{\chi+k}\right) + g_1\left((F_{2,2}^-)_{\chi-2k} + (F_{2,2}^+)_{\chi+2k}\right) = 0, \tag{15}$$

$$-(\mathbf{k}^2+\chi^2)\phi = n, \tag{16}$$

$$\hat{D}_t\psi - \phi + g_2\left((\Pi_1 + i\Pi_2)_{\chi-k} + (\Pi_1 - i\Pi_2)_{\chi+k}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\hat{D}_t n = \left(\gamma_0^{-1}\chi^2 + (\gamma_0^{-1} - g_1)k^2\right)\psi + ig_1(k_1A_1 + k_2A_2) -$$
$$- g_2\left((ik_1 - k_2)n_{\chi-k} + (ik_1 + k_2)n_{\chi+k}\right) + (g_1/2)\left[((ik_1 - k_2)\Pi_1 -\right.$$
$$\left. - (ik_2 + k_1)\Pi_2)_{\chi-2k} + ((ik_1 + k_2)\Pi_1 - (ik_2 - k_1)\Pi_2)_{\chi+2k}\right]. \tag{18}$$

Выше использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \Pi_{1,2} = A_{1,2} + ik_{1,2}\psi, \quad \hat{D}_t = \partial_t - iq\chi,\\
&\hat{D}_\square = -\partial_t^2 + 2iq\chi\partial_t + \left(\chi^2/\gamma_0 k^2 - \mathbf{k}^2\right) - \gamma_0^{-1},\\
&F_{1,1}^- = \left(k_1\frac{k_1 + ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - 1\right)n, \quad F_{1,1}^+ = \left(k_1\frac{k_1 - ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - 1\right)n,\\
&F_{1,2}^- = -\left(k_1\frac{k_1 + ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - 1\right)(\Pi_1 + i\Pi_2), \quad F_{1,2}^+ = -\left(k_1\frac{k_1 - ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - 1\right)(\Pi_1 - i\Pi_2),\\
&F_{2,1}^- = \left(k_2\frac{k_1 + ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - i\right)n, \quad F_{2,1}^+ = \left(k_2\frac{k_1 - ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} + i\right)n,\\
&F_{2,2}^- = \left(ik_2\frac{k_1 + ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} + 1\right)(i\Pi_1 - \Pi_2), \quad F_{2,2}^+ = \left(ik_2\frac{k_1 - ik_2}{\mathbf{k}^2 + \chi^2} - 1\right)(i\Pi_1 + \Pi_2).
\end{aligned}
$$

Сдвигая аргумент χ в получающихся уравнениях на $\pm nk$, где n — целое число, приходим к бесконечной цепочке линейных связанных обыкновенных дифференциальных уравнений по времени для амплитуд гармоник, на которые разлагаются возмущения. Последнюю систему уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{B}\mathbf{Y}, \tag{19}$$

где $\mathbf{Y}$ — бесконечномерный столбец, а $\mathbf{B}$ — бесконечномерная 30-диагональная матрица.

3. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

В одномерном приближении в уравнениях (14)–(18) следует положить равными нулю компоненты k_1 и k_2 волнового вектора возмущений. Уравнения одномерного приближения выглядят следующим образом:

$$\hat{D}_{\square,1}A_1 + g_1A_1 - g_2(n_{\chi-k} + n_{\chi+k}) + (g_1/2)\left((A_1 + iA_2)_{\chi-2k} + (A_1 - iA_2)_{\chi+2k}\right) = 0, \tag{20}$$

$$\hat{D}_{\square,1}A_2 + g_1A_2 + ig_2(-n_{\chi-k} + n_{\chi+k}) + (g_1/2)\left((iA_1 - A_2)_{\chi-2k} - (iA_1 + A_2)_{\chi+2k}\right) = 0, \tag{21}$$

$$\hat{D}_t\psi + \chi^{-2}n + g_2\left((A_1 + iA_2)_{\chi-k} + (A_1 - iA_2)_{\chi+k}\right) = 0, \tag{22}$$

$$\hat{D}_t n - \gamma_0^{-1}\chi^2\psi = 0, \tag{23}$$

где

$$\hat{D}_{\square,1} = -\partial_t^2 + 2iq\chi\partial_t + \chi^2/\gamma_0 k^2 - \gamma_0^{-1}.$$

Их вид, а также структура матрицы $\mathbf{B}$ остаются аналогичными виду уравнений и структуре соответствующей матрицы в пространственно-трехмерном случае.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ЦИРКУЛЯРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Уравнения (14)–(18), а также их одномерный вариант (20)–(23) соответствуют произвольной поляризации возмущений электромагнитного поля в плазме и этим отличаются от задач, представленных в статьях [8, 10]. В последних поляризация возмущения электромагнитного поля считалась циркулярной, что существенно ограничивало общность подхода.

Рассмотрим пространственно-одномерный случай. Для возмущения с заданной циркулярной поляризацией справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{A} = (1/2)(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)a \exp\left[i(kx_3 - \omega t)\right] + \text{c.c.},$$

что в терминах фурье-образов означает

$$A_1 = \frac{1}{2}(a_{\chi-k} + b_{\chi+k}), \quad A_2 = \frac{i}{2}(a_{\chi-k} - b_{\chi+k}), \tag{24}$$

где a_χ и b_χ — фурье-образы a и a^* соответственно.

Подставим данные соотношения в уравнения (20) и (21). В результате получим следующее уравнение для a:

$$-a_{tt} + 2iq\chi a_t + (\chi^2/\gamma_0 k^2)a + 2i(\omega a_t - (i\chi/\gamma_0 k)a) = 2g_2 n - g_1(a+b). \tag{25}$$

Дифференцируя (23) по времени и пользуясь уравнением (22), а также разрешая соотношения (24) относительно a_χ и b_χ, получаем следующее уравнение для описания отклика электронной компоненты плазмы на распространяющееся лазерное излучение:

$$\left((\partial_t - iq\chi)^2 + \gamma_0^{-1}\right) n = -(a_0/2\gamma_0^2)\chi^2(a+b). \tag{26}$$

Легко убедиться, что соотношения (25) и (26) являются фурье-образами уравнений, использованных в [8] для описания соответствующей неустойчивости лазерного излучения в плазме в рамках предположения о сохранении его циркулярной поляризации.

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНКРЕМЕНТОВ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

При рассмотрении линеаризованной задачи с матрицей **B** ограниченного размера естественно принять в качестве временного инкремента максимальную действительную часть в спектре ее собственных значений. Задача линейной алгебры по отысканию собственных значений матрицы решается с применением QR-алгоритма [26]. Представленные ниже результаты подчеркивают преимущества используемого подхода по сравнению с традиционными методами отыскания инкрементов, связанными с решением дискриминантных (дисперсионных) уравнений.

5.1. Одномерная задача

Рассмотрим вопрос об отыскании максимальных инкрементов для системы (20)–(23). Результаты соответствующих расчетов представлены на рис. 1, 2. Размер матрицы **B** увеличивался по закону $B = m \times m$, $m = 6 + 12j$, $j = 0, 1, 2 \ldots 17$. С увеличением числа

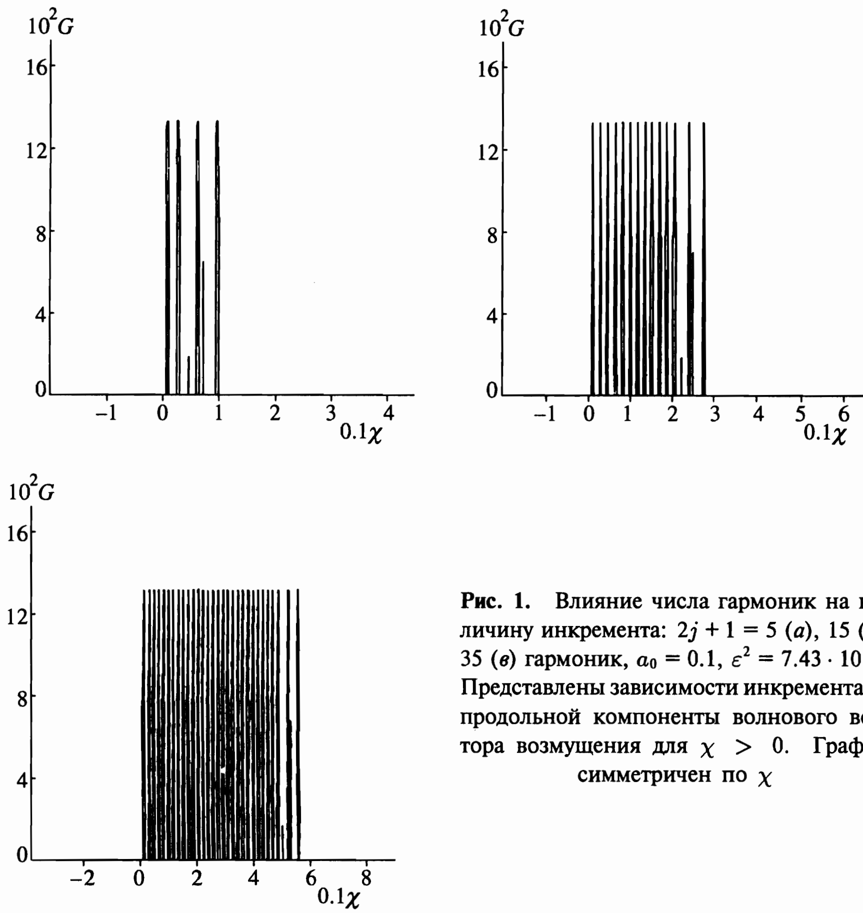

Рис. 1. Влияние числа гармоник на величину инкремента: $2j+1 = 5$ (*а*), 15 (*б*), 35 (*в*) гармоник, $a_0 = 0.1$, $\varepsilon^2 = 7.43 \cdot 10^{-2}$. Представлены зависимости инкремента от продольной компоненты волнового вектора возмущения для $\chi > 0$. График симметричен по χ

j возрастает количество учитываемых гармоник, что отражено на рис. 1. Значение $j = 1$ отвечает частоте лазерного излучения. Волновой вектор рассеянного излучения равен χ. Если $\chi > 0$, то рассеянное излучение распространяется в положительном направлении оси x_3, если $\chi < 0$, то в отрицательном.

На рис. 1, 2 изображены инкременты возмущений как функции χ. Рассеянное излучение представляет собой совокупность гармоник, каждая из которых — дублет, состоящий из стоксовой и антистоксовой ВКР-компонент. Так что все пики на рис. 1, 2 отвечают значениям волнового вектора $\chi = \pm jk \pm k_p$. Вблизи значений $\chi = \pm jk$ наблюдаются слабые пички, соответствующие гидродинамическому аналогу комптоновского рассеяния.

Расчеты показывают, что с увеличением размерности m матрицы **B** изменения в величинах инкрементов большей части гармоник становятся малыми, за исключением нескольких крайних (см. рис. 1). Другими словами, в расчетах с использованием матрицы **B** ограниченной размерности имеется краевой эффект, захватывающий крайние гармоники. Например, если $m = 210$, то гармоники $j = 0, 1, 2, \ldots 14$ прописываются с достаточной точностью, а $j = 15, 16, 17$ «смазываются» краевым эффектом.

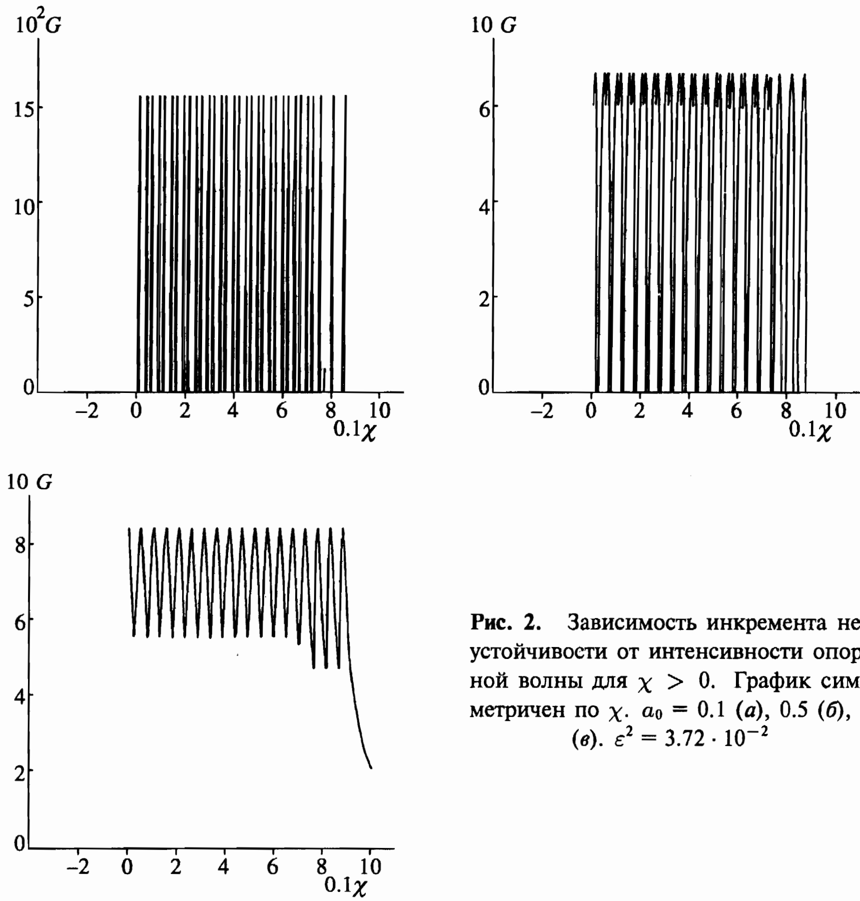

Рис. 2. Зависимость инкремента неустойчивости от интенсивности опорной волны для $\chi > 0$. График симметричен по χ. $a_0 = 0.1$ (*а*), 0.5 (*б*), 5 (*в*). $\varepsilon^2 = 3.72 \cdot 10^{-2}$

В параметрах расчетов, результаты которых отображены на рис. 2, по сравнению с расчетами, результаты которых изображены на рис. 1 в два раза уменьшена концентрация электронов, что привело к уменьшению плазменной частоты ω_p и величины k_p в $\sqrt{2}$ раз. ВКР-компоненты гармоник на рис. 2 сблизились в $\sqrt{2}$ раза.

Как показывает рис. 2, с увеличением амплитуды поля опорной волны возрастает уширение ВКР-компонент. При значениях поля $A_0 \simeq 1$ две ВКР-компоненты сливаются в одну. Таким образом, в релятивистской области при $A_0 > 1$ гармоники различимы, а ВКР-компоненты — нет.

Интересно проследить соответствие данных расчетов работе [8], в которой предполагалось, что в рамках одномерной задачи рассеянное излучение обладает циркулярной поляризацией. Как показывает данное исследование, при этом возникает существенная погрешность — выпадает из рассмотрения бесконечная последовательность гармоник. Задача сводится к исследованию матрицы 6×6. В случае произвольной поляризации рассеянного излучения, как показывают описанные выше результаты расчетов, в одномерной задаче имеет место генерация всех гармоник излучения и их взаимодействие. При этом в математическом плане задача приводит к необходимости решения бесконечной цепочки зацепляющихся линейных дифференциальных уравнений. Отметим, что расчеты с использованием матрицы с малой размерностью $m < 20$ дают результаты, близкие к [8].

5.2. Трехмерная задача

Исследовался максимальный инкремент для задачи (14)–(18) как функция трех компонент волнового вектора возмущений $\mathbf{k}$. Наглядное представление может обеспечить лишь график инкремента как функции двух переменных. Например, рассматривались распределения инкремента $G(k_1, 0, \chi)$, $G(0, k_2, \chi)$, $G(k_1, k_2, 0)$, а также $G(k\cos\Phi, k\sin\Phi, \chi)$ при фиксированном значении угла Φ и $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$. Исследование показало, что инкремент является квазипериодической функцией χ (с точностью, которую могут обеспечить результаты численного решения) и не обладает аксиальной симметрией относительно оси $\mathbf{e}_3$, что обусловлено отсутствием такой симметрии в линеаризованных уравнениях на периоде опорной волны. Запись осциллирующих коэффициентов, фигурирующих в линеаризованных уравнениях, зависит от выбора системы отсчета. В нашем случае вычисляется инкремент при условии, что в момент $t = 0$ в точке $x_3 = 0$ вектор $\mathbf{A}_0$ направлен вдоль $\mathbf{e}_1$. Однако выбор начального момента времени в пределах периода волны является случайным. Последнее означает, что инкремент следует усреднить в пределах периода волны по начальному моменту времени, что, в свою очередь, эквивалентно усреднению инкремента по азимутальному углу. Таким образом, неусредненные результаты расчетов являются промежуточными и имеют смысл «ненаблюдаемых», усредненные результаты соответствуют физически наблюдаемым величинам.

На рис. 3 представлен усредненный инкремент как функция k, χ. Он квазипериодичен по χ. Особенностью полученного решения является то, что на непрерывном фоне наблюдается: 1) система зацепляющихся колец, 2) повторяющиеся пички, расположенные вблизи оси $\mathbf{e}_3$, 3) рост инкремента при $k \to \infty$. Рисунок 3 объясняет особенности рассеяния лазерного излучения циркулярной поляризации в плазме. В среде, через которую распространяется лазерное излучение с волновым вектором $\mathbf{k}_0$, вследствие электронной стрикции и релятивистской нелинейности генерируются гармоники $m\mathbf{k}_0 - \delta\mathbf{k}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2...$ (с учетом сдвига в результате отдачи электронов $\delta\mathbf{k}$, $|\delta\mathbf{k}| \ll |\mathbf{k}_0|$). Исходные уравнения удовлетворяют законам сохранения энергии и импульса [25]. Поскольку их дальнейшие преобразования являются строгими, эффект отдачи электронов с необходимостью присутствует в данной теории. Каждая гармоника вследствие распадной неустойчивости

$$m\mathbf{k}_0 - \delta\mathbf{k} \to \mathbf{k}'_m + \mathbf{k}_e, \quad m\omega_0 - \delta\omega = (m\omega_0 - \delta\omega - \omega_p) + \omega_p$$

распадается на электромагнитную (стоксова компонента ВКР) и плазменную волны. Так как волновой вектор плазменных колебаний в холодной плазме принимает любые значения, вектор $\mathbf{k}'_m$ произвольно ориентирован в пространстве. Поэтому инкремент стоксовой компоненты ВКР в $\mathbf{k}$-пространстве имеет распределение, близкое к окружности радиусом $|\mathbf{k}'_m|$. Далее могут происходить волновые взаимодействия с образованием рассеянных волн $\mathbf{k}'' = n\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'_m$, где n, m — произвольные целые числа. На рис. 3 видна структура колец типа $\mathbf{k}'' = n\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'_1$. Кольцевые структуры с большими значениями $m > 1$ исчезают при усреднении, однако в промежуточных (не усредненных) расчетах они наблюдались. Антистоксовы компоненты ВКР в среде, в которой отсутствует опорная плазменная волна с частотой ω_p, не возникают, что и показывают расчеты. Тем не

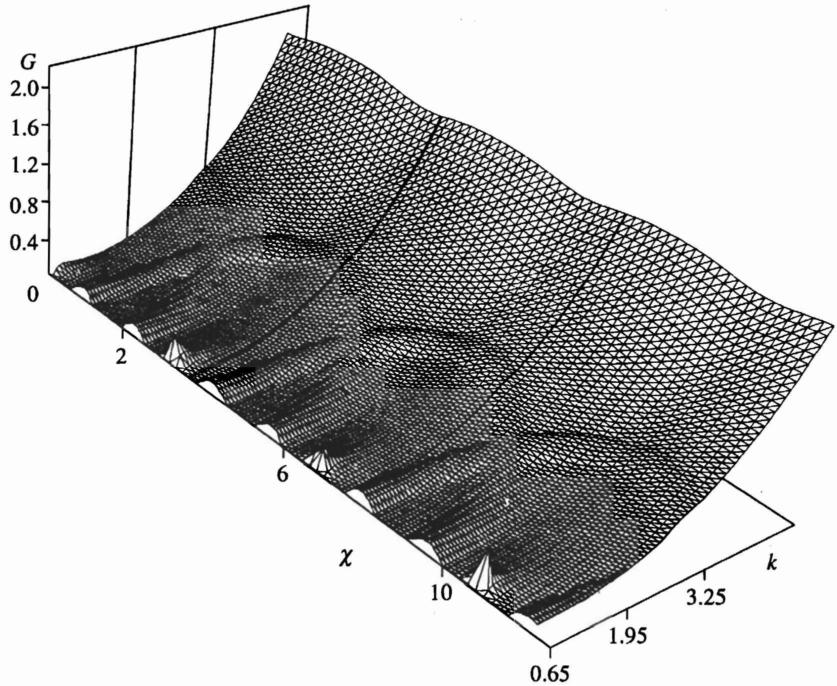

Рис. 3. Усредненное по азимутальному углу двумерное распределение инкремента как функции k и χ. $a_0 = 0.1$, $\varepsilon^2 = 7.43 \cdot 10^{-2}$

менее, в результате волновых взаимодействий между гармониками $m\mathbf{k}_0$ и стоксовыми компонентами ВКР $\mathbf{k}'_n$, рассеивающимися назад, возникают волны, волновые векторы которых направлены вдоль оси распространения, а их модули равны $(m - n)k_0 + k_p$. Это создает картину появления антистоксовых компонент ВКР в одномерной задаче. В трехмерном случае по этой причине рассеяние на антистоксовых компонентах будет наблюдаться лишь в узких телесных углах вдоль оси распространения опорной волны.

Пички вдоль оси $\mathbf{e}_3$ отвечают гармоникам с волновыми векторами $\mathbf{k}'' = m\mathbf{k}_0 - \delta\mathbf{k}$, сдвинутыми вследствие отдачи электронов.

Рост инкремента при $k \to \infty$ соответствует генерации континуума, т. е. рассеянного излучения непрерывного спектра. Как известно [27], при вращении электрона по окружности происходит генерация синхротронного излучения, представляющего собой бесконечный набор гармоник. При искажении круговых траекторий электронов спектр излучения меняется — возникает континуум. В экспериментах с лазерной плазмой континуум обусловлен, по крайней мере, тремя причинами: 1) тормозным и частично фоторекомбинационным излучением плазмы, 2) немонохроматичностью лазерного излучения, что особенно существенно для ультракоротких импульсов, 3) ангармонизмом электронных токов в плазме. Последнее обстоятельство обычно связывают с турбулизацией плазмы и аномальным увеличением ее собственного излучения [20].

Представленная теория приводит к интересной гипотезе о поляризации рассеянного излучения. Так как возмущение в объеме плазмы в фиксированный момент времени представляет собой сумму возмущений, возникших в различные моменты времени в пределах периода волны (линейная задача), а асимптотические решения для различных начальных моментов времени отличаются поворотом $\mathbf{k}$-пространства на азимутальный угол φ (фазовый угол) относительно оси $\mathbf{e}_3$, то следует ожидать, что результирующий вектор-потенциал обладает компонентами $\langle A_1 \rangle = 0$, $\langle A_2 \rangle = 0$, $\langle A_3 \rangle \neq 0$. Средние квадраты всех компонент, конечно, отличны от нуля, т. е. рассеянное излучение будет частично деполяризованным. Более подробное исследование данного вопроса требует привлечения методов статистической физики [28], что выходит за рамки данной статьи.

Рассмотренная выше теория допускает предельный переход к нерелятивистскому приближению. В математическом плане при этом в уравнениях (9)–(13) следует отбросить слагаемые, пропорциональные A_0^2 и положить $\gamma_0 = 1$. Далее получается задача на собственные значения матрицы $\mathbf{B}$, которая является 15-диагональной в отличие от релятивистского случая. Расчеты в нерелятивистском приближении для $a_0 = 0.1$ с высокой точностью совпадают с представленными на рис. 1 и рис. 2*а*.

В литературе класс нерелятивистских задач рассматривался достаточно давно, и при этом применялись два различных подхода: исследование неустойчивостей в рамках линеаризованных уравнений на основе резонансного приближения, предполагающего выполнение условий фазового синхронизма [20], и исследование дисперсионных уравнений без использования условий фазового синхронизма [14] (начальная либо краевая задача). Как показывает данное исследование, при решении релятивистских задач резонансное приближение не оправдано ввиду значительного уширения резонансных структур.

Представляет интерес сравнение результатов данной работы с выводами [9], где были получены дисперсионные уравнения, описывающие рассеяние циркулярно поляризованной волны в трехмерной геометрии. Авторы [9] ограничились рассмотрением случая $k_2 = 0$, предположив при этом аксиальную симметрию задачи. (Реальная ситуация более сложная и требует усреднения инкремента по азимутальному углу в $\mathbf{k}$-пространстве.) Серия стоксовых ВКР-гармоник [9] соответствует в нашем случае системе колец для рассеянных волн с волновым вектором $\mathbf{k}'_m$. Отличия следующие: 1) в неусредненной картине при стремлении полярного угла $\theta \to 0, \pi$ инкремент, в отличие от [9], стремится к отличным от нуля значениям, получающимся при решении одномерной задачи; 2) в усредненной картине при рассеянии на большие углы наблюдается лишь стоксова компонента на основной частоте $\mathbf{k}'_1$ на фоне генерации континуума; 3) при рассеянии на малые углы теория приводит к наличию стоксовой и антистоксовой компонент для всей последовательности гармоник.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлен строгий линейный анализ неустойчивости распространения плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны произвольной интенсивности в плазме в рамках пространственно-трехмерной геометрии. Теория описывает следующие волновые процессы: генерацию гармоник распространяющегося лазерного излучения в нелинейной среде, рассеяние с учетом эффекта отдачи электронов, распадную неустойчивость гармоник с образованием рассеянных электромагнитных волн и плазмонов, эффекты взаимодействия электромагнитных волн в плазме и генерацию континуума при рассеянии лазерного излучения. Совокупность перечисленных волновых процессов исследована как в релятивистском, так и нерелятивистском случаях.

Расчеты показывают возможность рассеяния вперед и назад. Каждый поток излучения содержит набор гармоник. Рассеяние гармоник происходит в совокупность вложенных пространственных конусов. Более высокая гармоника распространяется в более узкий пространственный конус. Вне соответствующих конусов теория предсказывает рассеяние с непрерывным спектром изменения волнового вектора. Этот эффект является преобладающим.

При распространении лазерных импульсов в плазме гармоники низкого порядка излучаются в более широкие конусы, чем гармоники высокого порядка. Поэтому гармоники низкого порядка в процессе распространения могут покидать область локализации импульса. В то же время гармоники высокого порядка распространяются вместе с импульсом. По-видимому, они могут быть зарегистрированы посредством спектрального анализа импульса в эксперименте специальной геометрии. Рассеяние назад происходит с малой интенсивностью из-за малого времени взаимодействия излучений, бегущих в противоположных направлениях [10].

Таким образом, в данной работе впервые без предположения о сохранении конкретного типа поляризации рассмотрена пространственно-одномерная теория рассеяния мощного лазерного излучения в плазме. Показано, что в этом случае рассеяние приводит к возникновению последовательности гармоник излучения, каждая из которых представляет собой дублет, состоящий из стоксовой и антистоксовой компонент. Механизмами генерации гармоник рассеянного излучения являются релятивистская нелинейность и электронная стрикция.

В рамках многомерной теории установлено, что при рассеянии под большими углами к оси распространения лазерного излучения наиболее существенными эффектами, которые можно наблюдать экспериментально, являются возникновение стоксовой компоненты ВКР на основной частоте и генерация континуума рассеянного излучения.

При рассеянии в малые телесные углы вдоль оси распространения опорной волны гармоники содержат как стоксову, так и антистоксову компоненты ВКР, причем последняя возникает в результате сложения излучения гармоники более высокого порядка и стоксовой компоненты ВКР, рассеянной назад. Показано, что гармоники имеют дублетную структуру при нерелятивистских интенсивностях излучения, а при релятивистских интенсивностях компоненты гармоник уширяются и сливаются в единую линию.

Результаты многомерной теории для полярных углов рассеяния, равных 0 и π, переходят в соответствующие результаты одномерной теории (инкременты при этих значениях углов рассеяния не стремятся к нулю, в отличие от [9]).

В численных исследованиях впервые для данного класса задач применен метод вычисления максимальных инкрементов (действительных частей собственных значений) для матрицы $\mathbf{B}$ бесконечной цепочки зацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход представляется более эффективным, чем вывод и исследование крайне громоздких дисперсионных соотношений.

Отметим, что при сравнении теории с экспериментом следует учесть следующие обстоятельства. Во-первых, расчеты не принимают во внимание поглощение излучения в плазме. При учете поглощения теоретические предсказания могут несколько измениться. Во-вторых, существенными могут быть вопросы, связанные с геометрией эксперимента и конечностью длительности импульсов: а) минимальный размер рассеивающей области (поперечный размер пучка) должен превосходить длину волны; б) время развития рассматриваемых неустойчивостей должно быть меньше длительности импульса.

В экспериментах с импульсами релятивистской интенсивности преимущественно используется линейно поляризованное излучение, в то время как все изложенные в данной работе результаты относятся к циркулярно поляризованной опорной волне. Однако очерченный выше круг физических эффектов будет проявляться и в случае линейной поляризации исходной волны. Возникнут и некоторые отличия. Так, в случае линейной поляризации рассеяние не будет являться азимутально симметричным.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-02-05194, 96-02-16401, 96-02-18264), и INTAS (грант № 94-1937).

Литература

1. D. S. Montgomery, S. H. Batha, K. S. Bradley et al., in *ICF Annual Report UCRL-LR-105820-91*, p. 13.
2. D. Umstadter, W. B. Mori, and C. Joshi, Phys. Fluids B **1**, 183 (1989).
3. S. H. Batha, D. D. Meyerhofer, A. Simon, and R. P. Drake, Phys. Fluids B **3**, 448 (1991).
4. D. Milam and D. Eimerl, in *ICF Quarterly Report UCRL-LR-105821-92-4*, p. 151.
5. K. Estabrook, W. L. Kruer, and M. G. Haines, Phys. Fluids B **1**, 1282 (1989).
6. S. V. Bulanov, I. N. Inovenkov, V. I. Kirsanov, N. M. Naumova, and A. S. Sakharov, Phys. Fluids B **4**, 1935 (1992).
7. В. М. Горбунов, В. И. Кирсанов, Труды ФИАН **219**, 3 (1992).
8. В. И. Кирсанов, А. С. Сахаров, Физика плазмы **21**, 623 (1995).
9. В. И. Кирсанов, А. С. Сахаров, Физика плазмы **21**, 632 (1995).
10. А. В. Боровский, А. Л. Галкин, В. В. Коробкин, О. Б. Ширяев, Квант. электр. **24**, 929 (1997).
11. A. B. Borisov, A. V. Borovskiy, V. V. Korobkin, A. M. Prokhorov, O. B. Shiryaev, X. M. Shi, T. S. Luk, A. McPherson, J. L. Solem, K. Boer, and C. K. Rhodes, Phys. Rev. Lett. **68**, 2309 (1992).
12. G. Mourou and D. Umstadter, Phys. Fluids. B **4**, 2315 (1992).
13. F. G. Patterson, R. Gonzales, and M. D. Perry, Optics Letters **16**, 1107 (1991).
14. В. П. Силин, *Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму*, Наука, Москва (1973).
15. Н. Бломберген, *Нелинейная оптика*, Мир, Москва (1966).
16. С. Келих, *Молекулярная нелинейная оптика*, Наука, Москва (1981).
17. Н. Е. Андреев, ЖЭТФ **59**, 2105 (1970).
18. Л. М. Горбунов, УФН **16**, 217 (1973).
19. S. Jorna, Phys. Fluids **17**, 765 (1974).
20. В. Н. Цытович, *Теория турбулентной плазмы*, Атомиздат, Москва (1971).
21. C. J. McKinstrie, A. Simon, and E. A. Williams, Phys. Fluids **27**, 2738 (1984).
22. R. L. Berger, Phys. Fluids **27**, 1796 (1984).
23. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ **30**, 915 (1956).
24. В. Г. Приймак, Дисс. на соиск. степ. доктора физ.-мат. наук, Институт математического моделирования, Москва (1996).
25. А. В. Боровский, А. Л. Галкин, *Лазерная физика*, ИздАТ., Москва (1996).
26. Д. Х. Уилкинсон, С. Райниш, *Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра*, Машиностроение, Москва (1976).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1982).
28. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).