

ПОЛЕВОЕ УШИРЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО РЕЗОНАНСА

*М. Г. Степанов, Д. А. Шапиро***Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 6 ноября 1997 г.

Найдено выражение через цилиндрические функции для формы нелинейного резонанса в двухуровневой системе с быстрораспадающимся уровнем. Показано, что когда естественной шириной линии атома можно пренебречь, полная ширина резонанса дается корнем из суммы квадратов полевой и диффузионной ширин. Использувавшееся ранее вариационное приближение дает правильную ширину на полувывоте, но искажает форму линии. Получена зависимость поглощаемой мощности от интенсивности падающей волны в случае сравнимых полевой и диффузионной ширин. Формула справедлива как в известных ранее предельных случаях большой и малой полевой ширины по сравнению с диффузионной, так и в новой промежуточной области перехода от однородного насыщения к неоднородному.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом данной работы является изучение резонансного поглощения (или усиления) сильной электромагнитной волны ионами в плазме. Знание законов усиления необходимо при расчетах ионных лазеров, а также при оптимизации их характеристик (например, увеличении выходной мощности или области перестройки комбинационного лазера). Измерение спектров поглощения (или усиления) волн при их прохождении через плазму является также одним из важнейших средств ее диагностики.

Наиболее простым с теоретической и важным с практической точек зрения является случай резонансного взаимодействия электромагнитной волны с плазмой, когда частота волны ω близка к боровской частоте перехода $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ между какими-либо внутренними состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ иона. Из-за эффекта Доплера волна наиболее эффективно взаимодействует с ионами, точно удовлетворяющими условию резонанса $\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega - \omega_{21}$, где \mathbf{k} — волновой вектор, а \mathbf{v} — скорость иона. Мощность, поглощаемая из слабой электромагнитной волны в линейном приближении (когда пренебрегается изменением состояния иона под воздействием волны), пропорциональна количеству частиц, взаимодействующих с волной. При изменении частоты волна резонансно взаимодействует с ионами, имеющими другую скорость. Ширина спектра поглощения определяется характерным разбросом скоростей v_T ионов, т.е. шириной максвелловского распределения по скоростям, и равна kv_T . Измеряя спектр линейного поглощения, можно определить ионную температуру.

Значительно большее количество информации как о параметрах плазмы, так и о релаксационных процессах внутри отдельного иона можно получить методами нелиней-

*E-mail: 249@okibox.iae.nsk.su

ной спектроскопии. Электромагнитная волна, взаимодействующая с плазмой, стремится выравнять населенности внутренних состояний ионов. Вследствие резонансного характера взаимодействия в функциях распределения населенностей по скоростям возникают узкие неравновесные структуры, называемые провалами или пиками Беннета [1]. Форму провалов Беннета можно найти методом пробного поля, измеряя зависимость коэффициента поглощения еще одной электромагнитной волны от ее частоты. В спектре поглощения пробной волны, резонансно взаимодействующей с тем же переходом, наблюдается нелинейный резонанс — провал в области частоты, при которой пробная волна резонансно взаимодействует с теми ионами, населенности которых уже частично выравнены первой волной. Аналогичный провал возникает в спектре поглощения стоячей волны, состоящей из двух встречно бегущих.

Скорость иона в плазме меняется во времени, так как ион находится в поле остальных заряженных частиц плазмы. В отличие от газов, где столкновения с другими атомами редки, но в каждом столкновении атом сильно изменяет свою скорость, ион находится в быстроменяющемся поле постоянно, что приводит к диффузионному характеру изменения его скорости [2]. Описание столкновений как диффузии в пространстве скоростей возможно также для тяжелых нейтральных частиц в буферном газе легких.

Впервые диффузионная форма провала Беннета в слабом поле применительно к ионам в плазме теоретически исследовалась в работе [3]. Было показано, что из-за диффузии в пространстве скоростей с коэффициентом D провал на уровне j приобретает ширину $\sqrt{D/\Gamma_j}$, равную характерному изменению скорости иона за время жизни Γ_j^{-1} на уровне j . Если диффузионная ширина превышает естественную, то провал в распределении по проекции скорости на волновой вектор имеет характерную заостренную в центре форму, описываемую экспонентой $\exp(-|x|)$, где x — безразмерное отклонение проекции скорости от центра провала. К естественной ширине может добавляться тушение уровней электронами и другие процессы, описываемые моделью релаксационных констант.

В пределе слабой электромагнитной волны глубина провалов Беннета пропорциональна ее интенсивности. Однако рост глубины при увеличении интенсивности волны замедляется, по мере того как населенности уровней выравниваются. В сильном поле населенности в центре резонанса практически равны, а область скоростей, в которой разность населенностей заметно уменьшилась, уширяется с ростом интенсивности поля [4]. Вопрос о сложении диффузионного и полевого уширений исследован в работе [5] вариационным методом, в качестве пробной функции для профиля провала брался лоренцевский контур. В случае, когда диффузионная и полевая ширины сравнимы, форма провала представляет собой нечто среднее между лоренцевской и экспоненциальной формами. В пределе малой естественной ширины форма провала найдена в [6]. В данной работе этот вопрос обсуждается более подробно.

Кривая насыщения — зависимость поглощаемой из поля мощности от интенсивности падающей волны — также позволяет измерить ряд параметров плазмы и релаксационных констант перехода. Знание аналогичной зависимости для усиления необходимо для расчета выходной мощности лазера. Диффузия приводит к выходу части ионов из резонанса при изменении их скорости, а также к приходу в область резонанса ионов, ранее не поглощавших (или не испускавших) квант поля. Вследствие этого поглощаемая из поля (или излученная в него) мощность увеличивается. Данная зависимость в области относительно слабых полей, когда полевая ширина провала Беннета много меньше диффузионной, получена в работе [7] и экспериментально проверена в [8]. Было по-

казано, что при наличии диффузии насыщение поглощения становится однородным и наступает при меньших интенсивностях поля, чем при ее отсутствии. Интенсивность, при которой происходит насыщение, оказалась пропорциональной квадратному корню из коэффициента диффузии D . Остался неисследованным случай, когда диффузионная и полевая ширины провалов Беннета сравнимы.

В разд. 2 приведены исходные уравнения для матрицы плотности ионов, классификация процессов взаимодействия ионов с полем электромагнитных волн, а также характерные значения основных параметров. В разд. 3 получено выражение для формы провала Беннета при совместном действии полевого и диффузионного уширений. В разд. 4 вычисляется кривая насыщения, т.е. мощность, поглощаемая из сильного поля. Для кривой также приводятся простые интерполяционные формулы, позволяющие отказаться от предположения о малой радиационной ширине. Раздел 5 содержит качественное обсуждение полученных результатов.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Максвелловское распределение ионов по скоростям будем нормировать на единицу:

$$W(\mathbf{v}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}v_T)^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_T^2}\right), \quad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad \int d\mathbf{v}W(\mathbf{v}) = 1,$$

где T — температура ионов в плазме, m — масса иона. Выделим два возбужденных состояния иона, $|1\rangle$ и $|2\rangle$, с энергиями E_1 и E_2 ($E_1 < E_2$) и рассмотрим резонансное взаимодействие данной двухуровневой системы с бегущей электромагнитной волной

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + \text{c.c.}),$$

отстроенной от резонанса на частоту $\Omega = \omega - \omega_{21} \ll \omega$, где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$. Считая взаимодействие иона с волной дипольным, в резонансном приближении можно получить квантовые кинетические уравнения для матрицы плотности в представлении Вигнера [9]:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_1\right) \rho_1 = \nu \hat{\mathcal{V}} \rho_1 - 2\text{Re} (iG^* e^{i(\Omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \rho_{21}) + q_1 W(\mathbf{v}) + A_{21} \rho_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_2\right) \rho_2 = \nu \hat{\mathcal{V}} \rho_2 + 2\text{Re} (iG^* e^{i(\Omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \rho_{21}) + q_2 W(\mathbf{v}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_{12}\right) \rho_{21} = \nu \hat{\mathcal{V}} \rho_{21} + iG e^{-i(\Omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} (\rho_2 - \rho_1), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \left(\frac{v_T^2}{2} \frac{\partial}{\partial v_\beta} + v_\beta \right),$$

$\rho_j = \langle j|\hat{\rho}|j\rangle$, $\rho_{21} = \langle 2|\hat{\rho}|1\rangle$ — матричные элементы оператора плотности, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ — константы релаксации состояний $|1\rangle, |2\rangle$ и их когерентности ρ_{21} , $G = \mathbf{E}_0 \langle 2|\hat{\mathbf{d}}|1\rangle / 2\hbar$, $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор дипольного момента, $q_j W(\mathbf{v})$ — функция возбуждения состояния $|j\rangle$, A_{21} — коэффициент Эйнштейна, диффузионный оператор $\hat{\mathcal{V}}$ описывает диффузию в пространстве скоростей, $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ — тензор диффузии, ν — транспортная частота столкновений

или обратное время, за которое частица из-за диффузии изменит свою скорость на величину порядка v_T .

Эффекты, связанные с зависимостью $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ от скорости, обсуждались в работах [10]. Было показано, что при $\nu \ll \Gamma_j$, когда диффузионная ширина провалов Беннета вдоль вектора \mathbf{k} много меньше v_T , можно пользоваться моделью постоянного и изотропного коэффициента диффузии $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \delta_{\alpha\beta}$, введенной в нелинейную спектроскопию Раутианом [11]. Если ось z выбрать вдоль \mathbf{k} , то на форму провала Беннета влияет лишь усредненная по поперечной скорости компонента $\Phi_{zz}(\mathbf{v})$ тензора диффузии, взятая при продольной скорости, соответствующей центру провала. Принятое приближение позволяет проинтегрировать систему уравнений (1) по поперечным волновому вектору \mathbf{k} скоростям. Далее продольная проекция скорости $v_{||} = \mathbf{k}\mathbf{v}/k$ для краткости будет обозначаться через v .

Имея в виду приложения к нелинейной спектроскопии, мы интересуемся стационарным решением системы уравнений (1):

$$\rho_j = r_j, \quad \rho_{21} = r_{21} e^{-i(\Omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 r_1 &= \nu \hat{\mathcal{V}}_1 r_1 - 2\text{Re}(iG^* r_{21}) + q_1 W_1(v) + A_{21} r_2, \\ \Gamma_2 r_2 &= \nu \hat{\mathcal{V}}_1 r_2 + 2\text{Re}(iG^* r_{21}) + q_2 W_1(v), \\ [\Gamma_{12} - i(\Omega - kv)] r_{21} &= \nu \hat{\mathcal{V}}_1 r_{21} + iG(r_2 - r_1), \end{aligned} \quad (2)$$

$$W_1(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_T} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right), \quad \hat{\mathcal{V}}_1 = \frac{d}{dv} \left(\frac{v_T^2}{2} \frac{d}{dv} + v \right).$$

Мощность, поглощаемая из волны в единице объема, равна произведению концентрации ионов, поглощающих в единицу времени квант поля, на энергию этого кванта:

$$P(\Omega) = 2\hbar\omega \int dv \text{Re}(iG^* r_{21}). \quad (3)$$

Приведем теперь численные значения характерных параметров, которые можно разделить на параметры плазмы и параметры отдельного иона. Характерная для разряда ионная температура $T_i \sim 1$ эВ, концентрация ионов в плазме аргонового лазера $N_i \sim 10^{14}$ см $^{-3}$. Длина волны излучения, резонансного лазерным переходам однозарядного иона, $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ см. Константы релаксации Γ_j , Γ_{ij} определяются скоростью релаксационных процессов, а также процессов тушения в плазме. В зависимости от выбранных уровней они могут варьироваться в пределах 10^7 – 10^9 с $^{-1}$. Для AgII имеем $v_T \simeq 2 \cdot 10^5$ см/с, $kv_T \simeq 2.5 \cdot 10^{10}$ с $^{-1}$, а транспортная частота столкновений

$$\nu = \frac{16\sqrt{\pi}e^4 N_i}{3m^2 v_T^3} L \simeq 10^7 \text{ с}^{-1},$$

где e — заряд электрона, а L — кулоновский логарифм. Параметры газоразрядной плазмы подробно обсуждались в [9]. Указанные выше значения параметров использовались при численных расчетах. Заметим, что все константы релаксации (Γ_j , Γ_{ij}) и транспортная частота столкновений ν малы по сравнению с доплеровской шириной линии kv_T .

3. ПРОВАЛ БЕННЕТА ПРИ СОВМЕСТНОМ ПОЛЕВОМ И ДИФФУЗИОННОМ УШИРЕНИЯХ

В отсутствие диффузии провал Беннета Δr_j имеет лоренцевскую форму, его ширина складывается из однородной ширины Γ_{12} и полевой ширины w_F [4]:

$$\Delta r_j \propto \left[\Gamma_{12}^2 + w_F^2 + (\Omega - kv)^2 \right]^{-1},$$

$$w_F = \sqrt{\frac{2\Gamma_{12}|G|^2}{k^2} \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} - \frac{A_{21}}{\Gamma_1\Gamma_2} \right)}.$$

Если $r_j(v)$ имеет ширину w , то для оценки порядка величины отдельных слагаемых в уравнении для r_j можно заменить производную d/dv на w^{-1} . В столкновительном члене присутствуют два слагаемых: $(\nu v_T^2/2)(d^2 r_j/dv^2)$ и $\nu(d(vr_j)/dv)$. Первое описывает диффузию скорости, а второе — динамическую силу трения, действующую на ион, движущийся относительно всей плазмы как целого. Диффузионная ширина w_{jD} провала Беннета на уровне j возникает из условия равенства $\Gamma_j r_j$ и диффузионного слагаемого: $(\nu v_T^2/2)d^2 r_j/dv^2 \sim (\nu v_T^2/2w_{jD}^2)r_j$, откуда $w_{jD} = v_T \sqrt{\nu/2\Gamma_j}$. При умеренной концентрации носителей заряда в плазме $\nu \ll \Gamma_j$ или $w_{jD} \ll v_T$, и мы можем пренебречь слагаемым, отвечающим динамической силе трения. Изменение скорости иона за время жизни Γ_j^{-1} из-за силы трения мало по сравнению с диффузионным изменением скорости w_{jD} и имеет порядок величины $v_T \nu/\Gamma_j$.

Ниже форма провала Беннета будет рассмотрена в двух предельных случаях:

1. Верхний уровень является долгоживущим, нижний — быстрораспадающимся, $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$. Данная ситуация при одинаковых скоростях возбуждения уровней приводит к стационарной инверсии населенностей и типична для лазерных переходов непрерывных ионных лазеров [9].

2. Нижний уровень является долгоживущим, $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$. Метастабильное нижнее состояние используется на поглощающем переходе комбинационных лазеров [8].

В обоих случаях мы считаем, что диффузионная ширина провала Беннета на короткоживущем уровне много меньше однородной или полевой. Пренебрегая диффузионными операторами в уравнениях для населенности этого уровня и для когерентности r_{21} в системе (2), получаем в случае 1 обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для населенности долгоживущего уровня r_2 :

$$\left[1 + J \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_1} \right) \right] r_2 = w_{2D}^2 \frac{d^2}{dv^2} r_2 + r_2^{(0)} + J \left(r_1^{(0)} - \frac{A_{21}}{\Gamma_1} r_2^{(1)} \right), \quad (4)$$

где

$$J = \frac{2\Gamma_{12}|G|^2}{\Gamma_2 \left[\Gamma_{12}^2 + 2\Gamma_{12}|G|^2/\Gamma_1 + (\Omega - kv)^2 \right]},$$

$r_j^{(0)}$ — населенность уровня j в отсутствие поля. Форма провала Беннета описывается функцией $y = (r_2 - r_2^{(0)})/(r_1^{(0)} - r_2^{(0)})$, которая подчиняется уравнению

$$\left(1 + \frac{A^2}{W^2 + x^2} \right) y = \frac{d^2}{dx^2} y + \frac{A^2}{W^2 + x^2}, \quad (5)$$

где

$$x = (\Omega - kv)/kw_{2D}, \quad A = w_F/w_{2D}, \quad W = (\Gamma_{12}^2 + 2\Gamma_{12}|G|^2/\Gamma_1)^{1/2}/kw_{2D}.$$

Отметим, что несмотря на присутствие $|G|^2$ в выражении для W , последнее не сводится к отношению A полевой и диффузионной ширин. Например, в сильном поле $W \simeq (\Gamma_2/\Gamma_1)^{1/2}A \ll A$. Точные решения однородного уравнения выражаются через сфероидальные функции [12]. Однако эти функции сравнительно мало изучены, для них даже пока не найдено интегральных представлений.

В случае 2, действуя аналогично, имеем

$$\left[1 + J \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_2} \right) \right] r_1 = w_{1D}^2 \frac{d^2}{dv^2} r_1 + r_1^{(0)} + J \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_2} \right) r_2^{(0)}, \quad (6)$$

где выражение для J получается из своего аналога в случае 1 заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Аналогично заменяя индексы в выражениях для x , y , A и W , снова приходим к уравнению (5).

Уравнение (5) имеет простой физический смысл: имеется резервуар частиц и набор состояний, различающихся параметром x . В этих состояниях частица испытывает диффузию по x и распад (единица в левой части уравнения). Внешнее поле резонансно взаимодействует с частицами, вызывая переходы между состояниями x и резервуаром; ширина резонанса равна W . Имеется ненулевая вероятность ухода или прихода частицы в состоянии x , равная $A^2/(W^2 + x^2)$.

Приступим к анализу решений уравнения (5). Если хотя бы одна из величин A , W велика ($W \gg 1$ или $A \gg 1$), то ширина провала Беннета превосходит диффузионную, в уравнении можно пренебречь производной d^2y/dx^2 , а форма провала Беннета является лоренцевской:

$$y = \frac{A^2}{W^2 + A^2 + x^2}. \quad (7)$$

В слабых полях, $A \ll W \sim 1$, форма провала является сверткой лоренцевского и экспоненциального контуров:

$$y = \frac{1}{2} e^{-|x|} * \frac{A^2}{W^2 + x^2} = \frac{A^2}{2} \int dx' \frac{e^{-|x-x'|}}{W^2 + x'^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь случай, когда диффузионная ширина провала Беннета на долгоживущем уровне превосходит однородную, $W \ll 1$. Заменяв $1/(W^2 + x^2)$ на $\pi\delta(x)/W$, получаем уравнение

$$y = \frac{d^2}{dx^2} y + \frac{\pi A^2}{W} \delta(x) [1 - y(0)],$$

решение которого дается формулой

$$y(x) = \frac{A^2}{2W/\pi + A^2} e^{-|x|}. \quad (9)$$

Это решение справедливо в области слабых полей, $A \ll 1$. По мере увеличения интенсивности поля глубина провала $y(0)$ приближается к единице, и точность приближения,

основанного на данной замене, ухудшается. В достаточно сильных полях, $A \sim 1$, форма провала Беннета становится отличной от экспоненциальной $e^{-|x|}$.

Построим решение уравнения (5) при больших значениях x ($x \gg W$), после чего попытаемся согласовать его поведение с условиями для решения при малых $x \sim W$. При $x \gg W$ мы можем пренебречь W^2 в знаменателях в (5), тогда решение $y(x)$ выражается через цилиндрические функции:

$$y(x) = A^2 \sqrt{i|x|} [CK_\alpha(|x|) - S_{-3/2,\alpha}(i|x|)], \tag{10}$$

где $\alpha = \sqrt{A^2 + 1/4}$, $K_\alpha(z)$ и $S_{\mu,\alpha}(z)$ — функции Макдональда и Ломмеля [13, с. 13 и с. 50], а C — константа, определяемая из поведения решения (10) при малых x .

При $x \sim W$ можно пренебречь единицей в левой части уравнения (5), $A \gg W$. Получившееся неоднородное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 1$. Решения однородного уравнения выражаются через гипергеометрические ряды ${}_2F_1$ [14, с. 70]. Однако при $A^2 \gg W$ константу C можно определить из условия регулярности поведения функции (10) в точке $x = 0$:

$$C = \frac{e^{-i\alpha\pi/2}}{2^{3/2}\pi} \Gamma\left(\frac{-1/2 - \alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-1/2 + \alpha}{2}\right) \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)\right].$$

После этого решение (10) можно переписать через модифицированную функцию Бесселя $I_\alpha(z)$ и обобщенный гипергеометрический ряд ${}_1F_2$ [14, с. 199]:

$$y(x) = {}_1F_2\left(1; \frac{3/2 + a}{2}, \frac{3/2 - a}{2}; \frac{x^2}{4}\right) - \sqrt{\frac{|x|}{2}} \Gamma\left(\frac{3/2 + \alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3/2 - \alpha}{2}\right) I_\alpha(|x|),$$

откуда следует, что $y(0) = 1$. Решение (10) содержит лоренцевский и экспоненциальный контуры как предельные случаи:

$$y = \begin{cases} e^{-|x|}, & A \ll 1, \\ \frac{1}{1 + (x/A)^2}, & A \gg 1. \end{cases} \tag{11}$$

В случае слабых полей, $A^2 \sim W \ll 1$, провал Беннета описывается экспоненциальным контуром (9) с $y(0) \neq 1$.

На рис. 1 приведены примеры провалов Беннета: a — функция (10) и b — численные решения четырех связанных диффузионных уравнений для элементов матрицы плотности (2). В системе (2) интервал по скоростям v бесконечен, при численном расчете границы интервала по скоростям были взяты $v = \pm 4v_T$, а значения матрицы плотности на границах интервала были выбраны согласно аналитической лоренцевской асимптотике. На рисунке виден переход от экспоненциального контура к лоренцевскому (от кривой $n = 0$ к кривой $n = 3$). Кривые $n = 1, 2, 3$ на рис. 1а и б почти совпадают, различие между рис. 1а и б в центре провала Беннета в слабом поле (кривая $n = 0$) может быть объяснено тем, что только в численном расчете учтена конечная естественная ширина $W \neq 0$.

Форма решения (10) $y(x)$ зависит лишь от параметра $A = w_F/w_D$, где w_D — диффузионная ширина провала Беннета на долгоживущем уровне ($w_D = w_{2D}$ в случае 1 и $w_D = w_{1D}$ в случае 2). Таким образом, полуширина провала v_L на доле L , $0 < L < 1$, от полной высоты провала ($v_L = w_D x_L$, где $y(x_L) = L$) есть однородная функция w_D

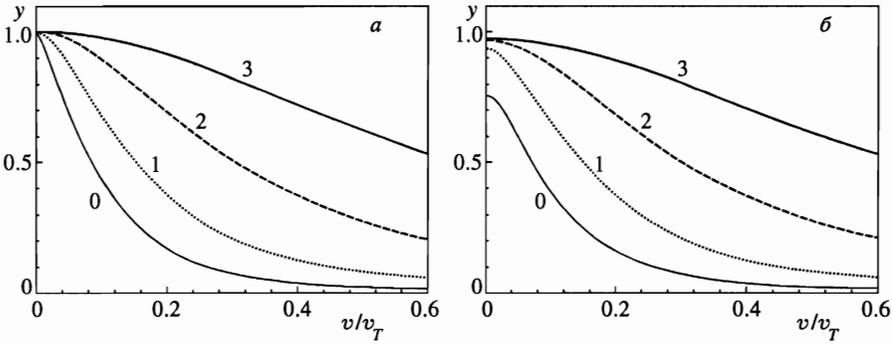


Рис. 1. Провал Беннета $y(x)$: решение (10) (а) и численный расчет (б). $\Gamma_< = 10^{-3}kv_T$, $\Gamma_> = 4 \cdot 10^{-2}kv_T$, где $\Gamma_<$ ($\Gamma_>$) — меньшая (большая) из Γ_1, Γ_2 . $\Gamma_{12} = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$, $\nu = 10^{-5}kv_T$, $\Omega = 0$. Кривые $n = 0, 1, 2, 3$ соответствуют значениям $|G| = 10^{n/3-2}kv_T$

и w_F порядка единицы. Это означает, что если w_D и w_F увеличить в $p > 0$ раз, то и v_L увеличится в p раз. Различные линии уровня v_L с одинаковым L , но отвечающие разным значениям v_L , на плоскости (w_F^2, w_D^2) переводятся друг в друга масштабным преобразованием с центром в точке $(0, 0)$. Например, полуширина на полувысоте равна

$$v_{1/2} = \begin{cases} w_F \left[1 + \left(\frac{w_D}{2w_F} \right)^2 \right], & w_D \ll w_F, \\ w_D \ln 2, & w_D \gg w_F \end{cases}$$

и может быть приближена интерполяционной формулой

$$v_{1/2} \simeq \sqrt{w_F + w_D^2/2} = w_D \sqrt{A^2 + 1/2}. \tag{12}$$

Заметим, что простота выражения (12) связана с приближенным равенством $\sqrt{2} \cdot \ln 2 = 0.9803 \dots \simeq 1$ (если $w_F = 0$, то из (12) мы имеем $v_{1/2} = w_D/\sqrt{2} \simeq w_D \ln 2$). При $A = 1/\sqrt{2}$ ширина провала Беннета превышает как полевую, так и диффузионную ширины почти в полтора раза. Такой контур изображен на рис. 2.

В работе [5] решение приближалось лоренцевской функцией. Его амплитуда и ширина находились вариационным методом. Ширина приближающего лоренциана удовлетворяет уравнению четвертой степени

$$v_{1/2}^4 - (w^2 + w_F^2 + w_D^2/2)v_{1/2}^2 - 2ww_D^2v_{1/2} - 3w^2w_D^2/2 = 0, \tag{13}$$

где $w = w_D W$ (в [5] w было равно $w = w_H = \Gamma_{12}/k$, что справедливо в случае не слишком сильного поля). Его решение в случае $w_D, w_F \gg w$ дается формулой (12), т. е. полуширины на полувысоте решения (13) и приближающего лоренциана в вариационном методе практически совпадают. Линии уровня решения (13) на плоскости (w_F^2, w_D^2) являются отрезками прямых, которые при $w_D, w_F \gg w$ становятся параллельными, а значит, и переводящимися друг в друга масштабным преобразованием с центром в начале координат.

Значения $v_{n/4}$, $n = 1, 2, 3$, на рис. 3 выбраны таким образом, чтобы кривые $n = 1, 2, 3$ совпадали, если форма провала является чисто лоренцевской. Таким обра-

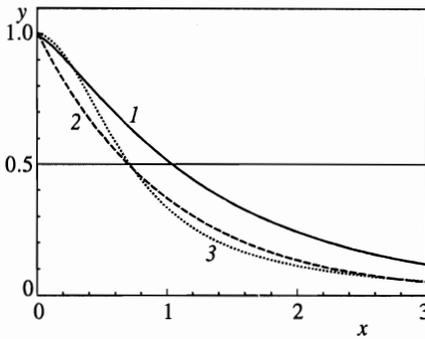


Рис. 2

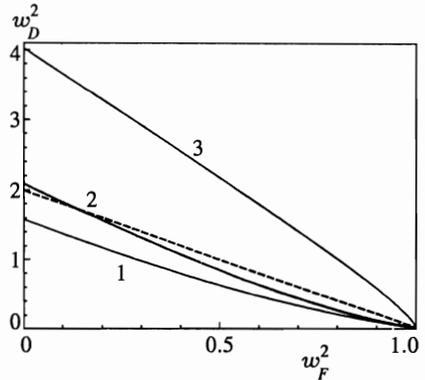


Рис. 3

Рис. 2. Форма провала $y(x)$ (10) при $A = \sqrt{1/2}$ (кривая 1), диффузионный контур $\exp(-|x|)$ (кривая 2) и лоренциан $1/(1 + (x/A)^2)$ (кривая 3)

Рис. 3. Линии уровня $v_{n/4}$, $n = 1, 2, 3$, соответствующие значениям $v_{n/4} = \sqrt{4/n - 1}$. Штриховой кривой изображено приближение (12) для кривой $n = 2$

зом, расстояние между кривыми есть мера отклонения формы от лоренцевской. Отклонение сильнее в центре провала, чем на крыльях (кривая $n = 3$ отклоняется от кривой $n = 2$ сильнее, чем кривая $n = 1$), и в случае малости полевого уширения по сравнению с диффузионным. В условиях большого полевого уширения, $w_F \gg w_D$, кривые сходятся друг к другу, так как эффекты насыщения маскируют диффузионное уширение.

Известно, что функция Макдональда $K_\nu(z)$ при полуцелых $\nu = n + 1/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ выражается через элементарные функции. Однако решение (10) неоднородного уравнения сводится к элементарным функциям, только если $\alpha = 2n + 1/2$, $n = 0, 1, \dots$. Так, например, при $\alpha = 1/2$ контур получается экспоненциальным (11), а при $\alpha = 5/2$ форма провала задается формулой

$$y(x) = \frac{6 - 2e^{-|x|}(3 + 3|x| + x^2)}{x^2},$$

которая отличается от лоренциана с шириной $\sqrt{13/2}$ (см. (13) и работу [5]) на 8%.

Спектр пробного поля

Форму провала Беннета можно найти, измеряя спектр поглощения пробной волны, резонансно взаимодействующей с тем же переходом, что и сильная волна. Для определения спектра пробного поля следует дополнить систему (1), включив в нее взаимодействие с пробной волной. В линейном приближении по интенсивности пробного поля им наводятся когерентность ρ_{21} и поправки к населенностям, осциллирующие по времени с частотами соответственно Ω_μ и $\Omega_\mu - \Omega$. Здесь Ω_μ — отстройка пробной волны от резонанса. Наведенные пробным полем поправки к матрице плотности пропорциональны разности населенностей при резонансной пробному полю продольной скорости. В предположении сравнимых скоростей возбуждения уровней 1, 2 населенность

долгоживущего уровня значительно превосходит населенность быстрораспадающегося уровня. Вследствие полевого расщепления уровней резонансная скорость нелинейно зависит от Ω_μ . Это приводит к тому, что в спектре поглощения (усиления) пробной волны возникают провалы, форма которых не повторяет форму провалов Беннета. Профиль искажен нелинейной зависимостью резонансной скорости от Ω_μ , т. е. полевым расщеплением.

4. КРИВАЯ НАСЫЩЕНИЯ

Прежде всего покажем, что поглощаемая из поля мощность выражается только через площадь провала Беннета $\int_{-\infty}^{\infty} dx y(x)$. Для случая 2, подставив $2\text{Re}(iG^*r_{21})$ из первого уравнения системы (2), получаем

$$P(\Omega) = 2\hbar\omega \int dv \text{Re}(iG^*r_{21}) = \\ = \hbar\omega\Gamma_1 \int dv \left[w_{1D}^2 \frac{d^2}{dv^2} r_1 - r_1 + r_1^{(0)} + \frac{A_{21}}{\Gamma_1} (r_2 - r_2^{(0)}) \right]. \quad (14)$$

Перепишем (14), выразив r_1, r_2 через $y, r_1^{(0)}, r_2^{(0)}$:

$$P(\Omega) = \hbar\omega\Gamma_1 \int dv (r_1^{(0)} - r_2^{(0)}) \left[y - \frac{d^2}{dx^2} y + \frac{A_{21}}{\Gamma_1} J(1-y) \right].$$

Так как ширина провала Беннета много меньше v_T , то можно вынести $r_1^{(0)} - r_2^{(0)}$ из-под интеграла, взяв $r_1^{(0)} - r_2^{(0)}$ в точке $v = \Omega/k$. Замечая, что $J(1-y) = (y - d^2y/dx^2) \times (1 - A_{21}/\Gamma_2)^{-1}$, получаем

$$P(\Omega) = \frac{\hbar\omega\Gamma_1 w_{1D} (N_1 - N_2)}{\sqrt{\pi} v_T (1 - A_{21}/\Gamma_2)} \exp \left[- \left(\frac{\Omega}{k v_T} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx y(x), \quad (15)$$

где $N_j = \int dv r_j^{(0)}$ — начальная концентрация ионов, находящихся на уровне j . Аналогично для случая 1 имеем

$$P(\Omega) = \frac{\hbar\omega\Gamma_2 w_{2D} (N_1 - N_2)}{\sqrt{\pi} v_T} \exp \left[- \left(\frac{\Omega}{k v_T} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx y(x). \quad (16)$$

Таким образом, изучение зависимости поглощаемой из поля мощности от его интенсивности свелось к изучению поведения интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} dx y(x)$, где y — решение уравнения (5).

Показанный только что факт имеет простое качественное объяснение. В стационарной ситуации площадь провала Беннета на уровне j , т. е. $\int dv (r_j - r_j^{(0)})$, есть отношение концентрации ионов, поглощающих (или излучающих) в единицу времени квант волны, к скорости релаксации населенности данного уровня Γ_j . Поглощаемая из поля мощность выражается через площадь провала Беннета, если скорость ухода частиц с уровня из-за столкновений не зависит от скорости их поступательного движения (например, столкновения вообще не меняют числа частиц на уровне).

Рассмотрим преобразование Фурье уравнения (5):

$$\left(W^2 + \frac{A^2}{1+t^2}\right) Y = \frac{d^2}{dt^2} Y + 2\pi A^2 \delta(t), \tag{17}$$

где

$$Y(t) = (1+t^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{itx} y(x).$$

Вся зависимость поглощаемой мощности $P(\Omega)$ от интенсивности волны содержится в амплитуде нулевой гармоники $Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx y(x)$.

При $W \gg A$ можно пренебречь членом $A^2/(1+t^2)$ в левой части уравнения (17), и тогда $Y(t) = \pi A^2 \exp(-W|t|)/W$. Если $W \gg 1$ или $A \gg 1$, то функция $Y(t)$ имеет ширину $(W^2 + A^2)^{-1/2} \ll 1$. Тогда можно считать t малым, $t \ll 1$, и

$$Y(t) = \frac{\pi A^2}{\sqrt{W^2 + A^2}} \exp\left(-\sqrt{W^2 + A^2} |t|\right).$$

Рассмотрим другой предельный случай $W \ll \min\{A, 1\}$. Ниже мы решим уравнение (17) в двух областях изменения параметра t : $t \gg 1$ и $t \ll A/W$. При $A \gg W$ эти области по t перекрываются, и при $1 \ll t \ll A/W$ применимы обе асимптотики, что позволяет сшить их и, тем самым, получить равномерно пригодное при всех t приближение для $Y(t)$.

При положительных $t \gg 1$ можно пренебречь единицей в знаменателе $1+t^2$, после чего уравнение (17) сведется к дифференциальному уравнению Бесселя

$$Y(t) = C_3 \sqrt{t} K_\alpha(Wt), \tag{18}$$

где C_3 — константа, определяемая из условия сшивки (18) с решением для $Y(t)$ при малых t .

При $t \ll A/W$ можно пренебречь W^2 в левой части уравнения (17), после чего (17) сводится к гипергеометрическому уравнению

$$Y(t) = C_{1\pm}(i+t)_2 F_1\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; 2; \frac{i+t}{2i}\right) + C_{2\pm}(i-t)_2 F_1\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; 2; \frac{i-t}{2i}\right), \tag{19}$$

при $t > 0$ в константах C_1, C_2 выбирается знак $+$, а при $t < 0$ — знак $-$. Здесь ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрический ряд, см. [14, с. 69].

Нам осталось определить значения констант $C_{1\pm}, C_{2\pm}, C_3$. Ограничения на поведение функции $Y(t)$ вблизи $t = 0$ налагают два условия на значения констант, еще одно условие возникает при сшивке асимптотик (18) и (19), наконец, оставшиеся два условия нам даст вещественность функции $y(x)$.

Локально проинтегрировав (17) вблизи $t = 0$, находим, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} Y(t) = \lim_{t \rightarrow -0} Y(t), \quad \lim_{t \rightarrow -0} \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right) - \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right) = 2\pi A^2, \tag{20}$$

$$C_{1+} + C_{2+} = C_{1-} + C_{2-}, \quad C_{1-} - C_{2-} - C_{1+} + C_{2+} = \frac{2\pi A^2}{{}_2F_1 - A^2 {}_2F_1^+ / 4},$$

где

$${}_2F_1 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; 2; \frac{1}{2}\right), \quad {}_2F_1^+ = {}_2F_1\left(\frac{3}{2} + \alpha, \frac{3}{2} - \alpha; 3; \frac{1}{2}\right).$$

Так как $y(x)$ вещественно, то $Y(-t) = Y^*(t)$, откуда $C_{m-} = -C_{m+}^*$, $m = 1, 2$.

При $1 \ll t \ll A/W$ решения (18) и (19) должны совпадать. При этом аргумент у гипергеометрического ряда в (19) большой, $t \gg 1$, а в (18) аргумент у функции Макдональда может быть выбран малым, $Wt \ll 1$. Разложим (18) в степенной ряд по t вблизи $t = 0$ (см. [13, с. 13]), а (19) — в ряд по t^{-1} в окрестности $t = \infty$ (см. [14, с. 116]):

$$Y(t) = \frac{\pi C_3 \sqrt{t}}{2 \sin(\pi \alpha)} \left[\frac{(Wt/2)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{(Wt/2)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right] + \dots, \tag{21}$$

$$Y(t) = \exp\left[-\frac{i\pi}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right] (C_{1+} - ie^{i\pi\alpha} C_{2+}) \frac{\Gamma(-2\alpha)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(3/2-\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1/2-\alpha} +$$

$$+ \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right] (C_{1+} - ie^{-i\pi\alpha} C_{2+}) \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(1/2+\alpha)\Gamma(3/2+\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1/2+\alpha} + \dots,$$

и, приравнявая коэффициенты при степенях $t^{1/2 \pm \alpha}$, получаем

$$\frac{C_{1+} - ie^{-i\pi\alpha} C_{2+}}{C_{1+} - ie^{i\pi\alpha} C_{2+}} = \varepsilon e^{-i\pi\alpha}, \quad \varepsilon = -W^{2\alpha} \frac{\Gamma(-2\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1/2+\alpha)\Gamma(3/2+\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(3/2-\alpha)}. \tag{22}$$

Представив C_{1+} в виде $C_{1+} = \mu C_{2+}$, имеем

$$\mu = ie^{-i\pi\alpha} \frac{1 - \varepsilon e^{i\pi\alpha}}{1 - \varepsilon e^{-i\pi\alpha}}, \quad |\mu| = 1,$$

$$Y(0) = iC_{2+} {}_2F_1 = -\frac{\pi A^2 {}_2F_1}{2({}_2F_1 - A^2 {}_2F_1^+ / 4)} \frac{|1 + \mu|^2}{\text{Im} \mu} =$$

$$= \frac{\pi A^2 {}_2F_1}{{}_2F_1 - A^2 {}_2F_1^+ / 4} \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \text{arctg} \frac{\varepsilon \sin(\pi\alpha)}{1 - \varepsilon \cos(\pi\alpha)} \right). \tag{23}$$

Таким образом, поглощаемая из поля мощность в единице объема в случае, когда полевая ширина превосходит радиационную, $A \gg W$, дается выражением (16) для случая 1 и выражением (15) для случая 2, где $\int_{-\infty}^{\infty} dx y(x) = Y(0)$ находится из (23). Полевая ширина может быть сравнима с диффузионной, $A \sim 1$. Выражение (23) довольно громоздко, поэтому мы рассмотрим сначала некоторые его предельные случаи, после чего укажем для него простое, но достаточно точное приближение.

4.1. Предельные случаи

Рассмотрим случай слабых полей, $A \ll 1$. Тогда $\alpha \simeq 1/2 + A^2$, $\varepsilon \simeq W^{2\alpha}$, аргумент у ctg в (23) мал, откуда

$$Y(0) \simeq \frac{\pi A^2}{W^{2\alpha} + \pi A^2 / 2}. \tag{24}$$

Подобный результат, $Y(0) = \pi A^2 / (W + \pi A^2 / 2)$, отличающийся от (24) лишь степенью W в знаменателе, можно получить, заменив $A^2 / (W^2 + x^2)$ в (5) на $\pi A^2 \delta(x) / W$ [7]. Степень отличия приближения, основанного на данной замене, от (24) можно оценить разностью $1 - W^{2A^2}$, которая при $W \ll A \ll 1$ может быть порядка единицы. Выражение (24) описывает так называемое «однородное насыщение», когда диффузионная форма провала Беннета не меняется, оставаясь экспоненциальной, а его глубина $y(0)$ при увеличении поля дорастает до своего максимального значения, равного единице.

Рассмотрим теперь случай сильных полей, $A \sim 1$. Поправкой к аргументу $\text{ctg}z$ в (23), связанную с ненулевым значением ε , можно пренебречь (см. Приложение). Положив $\varepsilon = 0$ в (23), выпишем асимптотики для $Y(0)$ в случаях сильного и слабого диффузионного уширения по сравнению с полевым (см. (11)):

$$Y(0) = \begin{cases} 2, & A \ll 1, \\ \pi A (1 + 1/4A^2), & A \gg 1. \end{cases} \quad (25)$$

4.2. Интерполяционные формулы

В случае сильных полей ($A \sim 1$) для $Y(0)$ можно предложить следующую интерполяционную формулу:

$$Y(0) \simeq \pi \sqrt{(2/\pi)^2 + A^2}, \quad (26)$$

которая, как показал численный расчет, справедлива в области $W \ll \min\{A^2, 1\}$ с точностью не хуже 2%.

Комбинируя (26) с (24), получаем интерполяционную формулу с более широкой, чем у (26), областью применимости:

$$Y(0) \simeq \frac{\pi A^2 \sqrt{(2/\pi)^2 + A^2}}{(2/\pi)W^{2\alpha} + A^2}. \quad (27)$$

Выражение (27) применимо в области $W \ll 1$, в частности, и в случае слабого поля $A^2 \sim W$.

Наконец, немного видоизменив (27), можно получить интерполяционную формулу

$$Y(0) \simeq \frac{\pi A^2 \sqrt{(2/\pi)^2 + W^2 + A^2}}{(2/\pi)W^{2\alpha} / (1 + 2W^{2\alpha}) + W^2 + A^2}, \quad (28)$$

которая справедлива при всех $A, W > 0$ с точностью около 3%. Примеры кривых насыщения (зависимостей поглощаемой из поля мощности от его интенсивности), рассчитанных по (28), приведены на рис. 4. Из рисунка видно, как с уменьшением естественной ширины W однородное насыщение наступает раньше (переход от кривой 1 к кривым 2, 3 на рис. 4б). Однако дальнейшее увеличение интенсивности A^2 (рис. 4а) ведет к корневому росту поглощаемой мощности. В масштабе рис. 4б этот рост почти незаметен.

Возвращаясь к исходным переменным задачи, получаем

$$P(\Omega) = \frac{2\sqrt{\pi}\hbar\omega\Gamma_{12}|G|^2(N_1 - N_2)}{kv_T} \exp \left[- \left(\frac{\Omega}{kv_T} \right)^2 \right] \frac{\sqrt{\Gamma_{12}^2 + \mathcal{F}^2 + (2/\pi)^2 \mathcal{D}}}{\Gamma_{12}^2 + \mathcal{F}^2 + (2/\pi)\mathcal{D}p/(1 + 2p)},$$

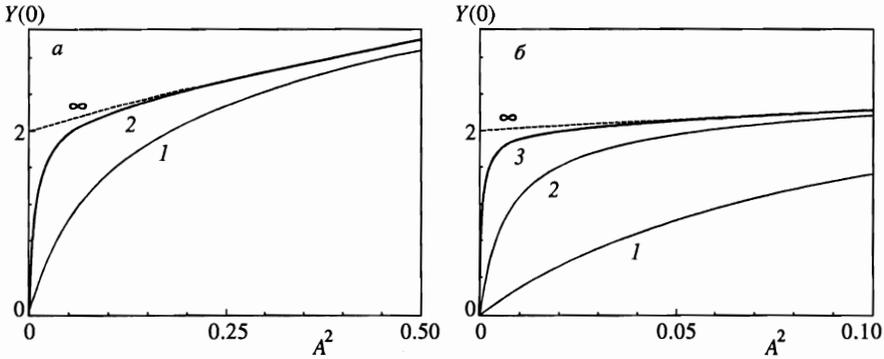


Рис. 4. Зависимость поглощаемой мощности $Y(0)$ от интенсивности поля A^2 . Кривая n соответствует значению $W = 10^{-n}$ (кривая ∞ соответствует значению $W = 0$)

$$\mathcal{F}^2 = 2\Gamma_{12}|G|^2 \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} - \frac{A_{21}}{\Gamma_1\Gamma_2} \right), \quad \mathcal{D} = \frac{\nu k^2 v_T^2}{2\Gamma_<},$$

$$p = \left(\frac{\Gamma_{12}^2 + 2\Gamma_{12}|G|^2/\Gamma_>}{\mathcal{D}} \right)^{\sqrt{\mathcal{F}^2/\mathcal{D} + 1/4}},$$

где $\Gamma_<$ ($\Gamma_>$) — меньшая (большая) из Γ_1, Γ_2 . В случае 1 имеем $\Gamma_< = \Gamma_2, \Gamma_> = \Gamma_1$, а в случае 2 — $\Gamma_< = \Gamma_1, \Gamma_> = \Gamma_2$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В предыдущих разделах были приведены два результата.

1. Получено выражение для формы провала Беннета в двухуровневой системе с быстрораспадающимся уровнем в случае произвольного соотношения полевой и диффузионной ширины провала. Выражение справедливо, если естественная ширина провала мала по сравнению с его полной шириной, а ширина максвелловского распределения превосходит ширину провала. Показано, что квадрат полной ширины провала на полувысоте равен сумме квадратов полевой и диффузионной ширины.

2. В условиях предыдущего пункта получена зависимость поглощаемой мощности от интенсивности падающей волны. Полученное выражение описывает как ранее известные предельные случаи малой и большой интенсивностей, так и гладкий переход от однородного насыщения к неоднородному насыщению в новой промежуточной области. Для данной зависимости предложена также интерполяционная формула, которая справедлива и без предположения малости однородной ширины.

5.1. Форма провала

Уравнение (5) содержит три ширины: диффузионную, равную единице, полевую A и однородную W . Ранее были получены решения для формы провала Беннета в бесстолкновительном случае (A и W велики по сравнению с единицей) и в случае слабого

поля (A мало по сравнению с W и единицей). Остался неисследованным единственный случай, когда одна из этих трех ширин мала, а остальные две могут быть сравнимы — случай малого W . Этот случай соответствует сложению полевого и диффузионного уширений. Глубина $y(0)$ провала Беннета при $A^2 \gg W$ достигает своего максимального значения $y(0) = 1$, форма же провала при $A \ll 1$ определяется диффузией и описывается экспоненциальным контуром. Далее при увеличении интенсивности поля A^2 происходит выполаживание формы провала. Общий случай, когда все три ширины сравнимы, едва ли поддается решению в гипергеометрических функциях, которые обычно содержат всего две ширины. Например, $J_\nu(z)$ содержит два масштаба: единицу (период колебаний при больших z) и ν (расстояние от точки $z = 0$ до начала колебаний). Однако, даже если и удастся записать ответ в каком-либо виде, значительно проще будет, видимо, для каждого конкретного случая найти решение прямыми численными методами. Кроме того, для случая, когда W порядка единицы, форма провала близка к лоренцевской, поэтому вариационное приближение, описанное в работе [5], дает неплохие результаты.

5.2. Кривая насыщения

Полученное в работе [7] выражение для поглощаемой мощности, а также выражение (9) данной работы применимы в двух областях: $A^2 \ll 1/|\ln W|$, $W \ll 1$ и $W \ll A^2 \ll 1$. Оно правильно описывает однородное насыщение при $W \ll 1$. Условием применимости при описании однородного насыщения является малость параметра $W|\ln W|$, который стремится к нулю при $W \rightarrow 0$. Выражение (9) неприменимо в случае сильных полей ($A \sim 1$), когда полевая ширина провала Беннета порядка диффузионной. Одной из особенностей данного выражения является выход на максимальное значение $\int dx y(x) = 2$ при больших A . Было неясно, как поглощаемая мощность ведет себя при $A \sim 1$, так как известно, что $\int dx y(x) = \pi A$ при $A \gg 1$, т. е. поглощаемая мощность растет при увеличении интенсивности волны. Выражение (23) или интерполяционные формулы (27), (28) описывают как раз случай $A \sim 1$. Они применимы и в случае слабых полей ($A \ll 1$). Ограничениями их применимости являются малость ширины одного из уровней по сравнению с шириной другого, а также малость ширины провала Беннета по сравнению с шириной v_T максвелловского распределения. Если диффузионная ширина провала Беннета меньше v_T , то насыщение, связанное с тем, что полевая ширина сравнивается с v_T (и, тем самым, ограничивается корневой рост поглощаемой мощности, $\int dx y(x) = \pi\sqrt{A^2}$, при увеличении интенсивности поля A^2 с выходом на константу), может быть описано без учета диффузии ($A \gg 1$). Этот предельный случай хорошо изучен (см. [15]). При однородном насыщении рост поглощаемой мощности при увеличении интенсивности поля замедляется, по мере того как глубина провала $y(0)$ приближается к единице. Однако в сильных полях форма провала начинает выполаживаться, из-за чего рост поглощаемой мощности не останавливается. Переход с режима однородного насыщения на режим выполаживания формы происходит при $A \sim W^{1/4}$, когда рост из-за однородного насыщения замедляется настолько, что сравнивается с ростом из-за выполаживания формы.

Авторы благодарны Е. В. Подивиллову за полезные обсуждения и А. И. Черных за консультации по численным методам. Данная работа частично поддержана Россий-

ским фондом фундаментальных исследований (гранты 96-02-19052, 96-15-96642), межатраслевой научно-технической программой «Оптика. Лазерная физика» (грант 1.53) и программой «Соросовские студенты» (М. С., грант s97-215).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поправка к аргументу $\operatorname{ctg} z$ в (23), связанная с ненулевым значением ε , может оказаться существенной в трех случаях.

1. ε велико (α близко к $1, 2, \dots, n, \dots$).
2. Значение $\operatorname{ctg} z$ велико (α близко к $5/2, 9/2, \dots, 2n + 1/2, \dots$).
3. Значение $\operatorname{ctg} z$ мало (α близко к $3/2, 7/2, \dots, 2n - 1/2, \dots$).

Пусть $\alpha = n + \delta$, $\delta \ll 1$. Тогда $\varepsilon \simeq (-1)^{n+1} C_n W^{2\alpha} / \delta^2$, $C_n > 0$ (например, $C_1 = 3/64$), $\sin(\pi\alpha) \simeq (-1)^n \pi \delta$, $\cos(\pi\alpha) \simeq (-1)^n$. Аргумент $\operatorname{arctg} z$ в (23) приблизительно равен

$$\frac{\varepsilon \sin(\pi\alpha)}{1 - \varepsilon \cos(\pi\alpha)} \simeq -\frac{\pi \delta C_n W^{2\alpha}}{C_n W^{2\alpha} + \delta^2}$$

и максимален при $\delta \sim W^\alpha$; максимальное значение аргумента порядка $W^\alpha \ll 1$.

Пусть $\alpha = 2n + 1/2 + \delta$, $\delta \ll 1$. Тогда $\varepsilon \simeq C_n W^{2\alpha} \delta$ (например, $C_1 = 2/675$), $\sin(\pi\alpha) \simeq 1$, $\cos(\pi\alpha) \simeq 0$. Значение $\operatorname{ctg} z$ в (23) приблизительно равно

$$\operatorname{ctg} z \simeq \frac{1}{(\pi/2 + C_n W^{2\alpha}) \delta},$$

т. е. поправка, связанная с $\varepsilon \neq 0$, мала ($W \ll 1$). Заметим, что если положить $n = 0$ (случай слабого поля), то $\varepsilon \simeq W^{2\alpha}$, т. е. ε не имеет малости по δ .

Пусть $\alpha = 2n - 1/2 + \delta$, $\delta \ll 1$. Тогда $\varepsilon \simeq -C_n W^{2\alpha} \delta$ (например, $C_1 = 2/9$), $\sin(\pi\alpha) \simeq -1$, $\cos(\pi\alpha) \simeq 0$. Значение $\operatorname{ctg} z$ в (23) приблизительно равно

$$\operatorname{ctg} z \simeq -(\pi/2 + C_n W^{2\alpha}) \delta,$$

т. е. поправка, связанная с $\varepsilon \neq 0$, мала ($W \ll 1$).

Литература

1. W. R. Bennett, Jr., Phys. Rev. **126**, 580 (1962).
2. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, т. 1, Наука, Москва (1969), с. 199.
3. Г. И. Смирнов, Д. А. Шапиро, ЖЭТФ **76**, 2084 (1979).
4. R. Karplus and J. A. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 1020 (1948).
5. С. А. Бабин, В. И. Донин, Д. А. Шапиро, ЖЭТФ **91**, 1270 (1986).
6. D. A. Shapiro and M. G. Stepanov, J. Phys. B **30**, L377 (1997).
7. К. Б. Курлаев, Д. А. Шапиро, КЭ **21**, 1080 (1994).
8. A. A. Arolonsky, S. A. Babin, A. I. Chernykh et al., Phys. Rev. A **55**, 661 (1997).
9. S. A. Babin and D. A. Shapiro, Phys. Rep. **241**, 119 (1994).
10. E. V. Podivilov, D. A. Shapiro, and M. G. Stepanov, Phys. Rev. Lett. **74**, 3979 (1995); Е. В. Подивилов, М. Г. Степанов, Д. А. Шапиро, ЖЭТФ **109**, 418 (1996).
11. С. Г. Раутиан, ЖЭТФ **51**, 1176 (1966).

12. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*, Наука, Москва (1967); И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, Москва (1976).
13. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, Москва (1974).
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра*, Наука, Москва (1973).
15. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).