ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 4, стр. 1313–1318 ©*1998*

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ «МЕЛКОЙ» И «ГЛУБОКОЙ ВОДЫ» В ТЕОРИИ РАЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОГО ТОКОВОГО СЛОЯ

*С. К. Жданов**

Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

В. П. Власов

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 сентября 1997 г.

В рамках двухжидкостной гидродинамики плазмы показано, что в проблеме неустойчивости тонкого токового слоя возможны два предельных случая, допускающие аналитическое решение и взаимодополняющие друг друга. Эти пределы аналогичны известным приближениям «мелкого» и «глубокого» слоя в гидродинамической неустойчивости «опрокинутой воды». При этом предел длинных волн совпадает с «квазичаплыгинской» динамической системой Буланова, Сасорова [1], а предел коротких волн отвечает феноменологической модели Трубникова [2] слипания «элементарных» токов. В последнем случае неизбежен «сильный» коллапс с возникновением токовых нитей, захватывающих конечный ток.

1. Тиринг-неустойчивость и связанное с ней явление пересоединения силовых линий магнитного поля и образования магнитных островов является одним из фундаментальных явлений в физике нейтральных токовых слоев. Ей посвящено много оригинальных работ и обзоров (см., например, [2–5] и цитированную в них литературу), в которых неустойчивость анализируется во всех ее проявлениях. В настоящее время физика этой неустойчивости в основных чертах ясна. Хорошо известно, что тиринг-мода с физической точки зрения может интерпретироваться как результат пинчевания распределенного токового слоя — своего рода неустойчивости к «слипанию» за счет взаимного притяжения отдельных «элементарных» токовых нитей, на которые условно можно разбить слой [2–4]. Таким образом, «разрыв» и «слипание», казалось бы, исключающие друг друга явления, органически сочетаются при развитии этой неустойчивости. Это фундаментальное обстоятельство, однако, своеобразно проявляется, например, в теории неустойчивости тонкого токового слоя: к настоящему времени сложилось два, на первый взгляд противоположных, подхода [1, 2]. В действительности, как показано в данной работе, предложенные в [1, 2] нелинейные динамические модели — это две стороны одной медали, не исключающие, а взаимодополняющие друг друга. Как отмечалось, они отвечают двум предельным случаям по вполне определенному параметру, зависящему от произведения погонной плотности на величину характерного масштаба возмущения. Это обстоятельство, насколько нам известно, ранее не отмечалось, но

* E-mail: root@plasm.mephi.msk.su

полезным образом дополняет теорию тиринг-неустойчивости тонкого токового слоя.

2. Модель Буланова, Сасорова, впервые предложенная в [1], может быть записана с учетом исправлений, указанных в [6], в виде

$$\rho'_t + (\rho v)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x = -(1/2)c_0^2 \left((\rho_0/\rho)^2 \right)'_x, \tag{1}$$

где $c_0 = 2(c_A\delta/a)_0$, $\rho = na$ — погонная плотность плазмы токового слоя, a — толщина слоя, c_A — альфвеновская скорость, $\delta_0 = c/\omega_{pe}$ — длина вакуумного скин-слоя, индексом «0» помечены невозмущенные значения величин. Возмущения предполагаются длинноволновыми, так что их характерный масштаб λ значительно превышает толщину токового слоя, $\lambda \gg a$. Ключевым моментом для справедливости (1) является предположение о постоянстве погонной плотности тока слоя и, тем самым, скачка касательной компоненты магнитного поля поперек слоя. Это требование очевидным образом противоречит обрисованной выше картине «слипания» токов. В феноменологическую модель Трубникова [2] ($\hat{H}$ — оператор Гильберта):

$$\rho'_t + (\rho v)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x = g_T \hat{H} \rho, \quad g_T = 2\pi I_1^2/M_1 c^2 h, \tag{2}$$

закладываются совершенно иные представления. Здесь тонкий токовый слой представляется как набор одинаковых параллельных проводников — «элементарных токов» с величиной тока I_1 и массой M_1 (на единицу длины) в каждом из них, величина ρ равна произведению расстояния h между соседними проводниками в равновесии на число проводников, приходящихся на единицу длины вдоль оси x (вдоль слоя). Эти величины и задают значение фигурирующего в (2) ускорения g_T (ускорения Трубникова).

Отличие систем (1) и (2) является не только внешним. На линейной стадии инкремент описываемой ими неустойчивости различным образом зависит от волнового числа:

$$\gamma_{BS} = kc_0, \quad \gamma_T = (kg_T)^{1/2}, \tag{3}$$

для (1) и (2) соответственно. Такое различие зависимостей инкремента от волнового числа внешне напоминает случай неустойчивости «опрокинутого» слоя воды [6], который следует считать «мелким» или «глубоким» в зависимости от соотношения между длиной волны возмущения и толщиной слоя. При этом в первом случае инкремент пропорционален волновому числу, а во втором — корню квадратному из него. Эта аналогия в действительности является более глубокой: роль параметра, разделяющего области длинных и коротких волн, играет величина $\varepsilon = \delta_0^2/a_0\lambda$.

3. Чтобы обосновать это утверждение, воспользуемся, следуя [1, 6], уравнениями двухжидкостной гидродинамики в следующей форме:

$$(na)'_t + (nav)'_x = 0,$$

$$v'_t + vv'_x = -\frac{j_z B_y}{cn(m_i + m_e)} \equiv -\frac{|e| B_y u_j}{c(m_i + m_e)}. \tag{4}$$

Здесь геометрия слоя выбрана так, что ток течет вдоль оси z, координата y направлена поперек слоя, координата x отсчитывается вдоль слоя. При этом используются общепринятые обозначения, а также плазма считается квазинейтральной, $n_e = n_i = n$, и предполагается равенство продольных скоростей: $v_{xe} = v_{xi} = v$. Введена также для удобства токовая скорость

$$u_j = v_{zi} - v_{ze} = j_z/|e|n.$$

Величину токовой скорости вычислим, учитывая, что в силу предполагаемой однородности слоя по координате z имеют место законы сохранения обобщенных импульсов ионов и электронов:

$$\left(mv_z + eA/c\right)_{e,i} = \text{const}, \tag{5}$$

где величина A является z-компонентой векторного потенциала; компоненты магнитного поля через нее выражаются следующим образом:

$$B_x = \partial A/\partial y, \quad B_y = -\partial A/\partial x, \quad B_z = 0.$$

Используя (5), получаем z-компоненту токовой скорости:

$$u_j = u_{j0} - |e|A/\mu c, \tag{6}$$

где $\mu = m_i m_e/(m_i + m_e)$, u_{j0} — начальное значение, предполагаемое постоянным. В уравнениях (4) все величины берутся на слое, т.е. при $y = 0$. Вне слоя векторный потенциал удовлетворяет уравнению (в пренебрежении током смещения)

$$\Delta A = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)A = 0, \tag{7}$$

которое следует дополнить граничным условием

$$[\partial A/\partial y]_{y=0} = -(4\pi/c)j_z a \equiv -(4\pi/c)|e|na\left(u_{j0} - |e|A/\mu c\right)_{y=0}, \tag{8}$$

где $[\partial A/\partial y]_{y=0}$ — скачок величины $\partial A/\partial y$ поперек токового слоя. Следуя [1,2], считаем, что слой «погружен» в вакуум, в противном случае в правых частях (7), (8) необходимо удержать токи, индуцируемые неустойчивостью в окружающей слой среде.

Заметим, что формальным решением (7), (8) является соотношение

$$B_y = -(2\pi/c)\hat{H}(j_z a). \tag{9}$$

Соотношение такого рода в сходных задачах о токах в тонких пленках, по-видимому, впервые было введено Чукбаром (см., например, [7]).

Удобно, далее, представить векторный потенциал в виде суммы

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = -B_0|y|, \quad B_0 = (2\pi/c)|e|n_0 a_0 u_{j0}, \tag{10}$$

явно выделив невозмущенное поле A_0. Выберем теперь характерные масштабы величин λ, $\mu c u_{j0}/|e|$, n_0, a_0 для координат, векторного потенциала, ионной плотности плазмы и толщины слоя соответственно. Тогда в безразмерном виде условие (8) для поправки A_1 к векторному потенциалу записывается в следующем виде

$$\varepsilon[\partial A_1/\partial y]_{y=0} = -\left(na(1 - A_1) - 1\right)_{y=0}, \tag{11}$$

где $\varepsilon = \delta_0^2/a_0\lambda$ — введенный выше параметр.

Очевидно, что если ε мало, что и было использовано в [1], то левую часть (11) можно считать малой величиной, и с этой точностью из (11) получаем значение потенциала на слое:

$$A_1 \approx 1 - (na)^{-1}. \tag{12}$$

Используя его в уравнениях (4), приходим, как не трудно проверить, к уравнениям (1). Соотношение (12), очевидно, тождественно условию постоянства погонной плотности тока $j_z a = \text{const}$, а условие $\varepsilon \ll 1$ определяет область «мелкой воды», т. е. длинных волн возмущений $\lambda \gg \delta_0^2/a_0$.

В противоположном пределе, когда ε велико, имея в виду разложение по степеням ε^{-1}, в правой части (11) и, соответственно, (8) можно пренебречь слагаемым с векторным потенциалом. Это эквивалентно, как легко видеть, условию постоянства токовой скорости $u_j = \text{const}$. В этом пределе, тем самым, погонная плотность тока приближенно равна

$$j_z a \approx |e| u_{j0} na, \tag{13}$$

и пропорциональна погонной плотности плазмы токового слоя. Воспользовавшись далее формулой (9), убеждаемся, что уравнения (4) теперь сводятся к уравнениям

$$(na)'_t + (nav)'_x = 0,$$

$$v'_t + vv'_x = g_H \hat{H}(na/n_0a_0), \tag{14}$$

эквивалентным (2). А вычисленное из гидродинамики феноменологическое ускорение Трубникова оказывается равным

$$g_H = \frac{2\pi e^2 (u_j^2 na)_0}{(m_i + m_e)c^2}. \tag{15}$$

Условие $\varepsilon \gg 1$ совместно с условием $a_0 \ll \lambda$ определяет область коротких волн возмущений $a_0 \ll \lambda \ll \delta_0^2/a_0$ (или «глубокой воды» по гидродинамической терминологии).

4. Хорошо известно [1, 6], что в рамках модели (1) для решений типична тенденция к разрыву токового слоя в плане местного уменьшения погонной плотности, но не тока (!), что находится в явном противоречии с физической картиной неустойчивости. Полученный выше результат позволяет разрешить этот парадокс, существовавший с момента опубликования работы [1]. Дело в том, что в областях разрыва токового слоя по мере уменьшения погонной плотности неизбежно нарушаются условия применимости уравнений (1): плотность тока уже нельзя считать постоянной. Согласно (13), уменьшение погонной плотности ведет к пропорциональному уменьшению плотности тока, так что разрыв токового слоя непременно сопровождается филаментацией тока в полном соответствии с физикой тиринг-неустойчивости. Покажем, что в рамках применимости уравнений (14) неизбежен «сильный» коллапс с возникновением токовых нитей, захватывающих конечный ток. Заметим, что систему (14) можно записать в эквивалентной гамильтоновской форме:

$$\Psi'_t = -\delta H/\delta\rho, \quad \rho'_t = \delta H/\delta\Psi, \quad v = \Psi'_x, \quad \rho = na/(na)_0, \tag{16}$$

где «гамильтониан» равен

$$H = \int dx \left((\rho/2)[\Psi'_x]^2 - (1/2) g_H \rho \left[\hat{K} \rho \right] \right). \tag{17}$$

Здесь оператор $\hat{K}$ определяется соотношением

$$\partial \left(\hat{K} \rho \right) / \partial x \equiv \hat{H} \rho.$$

Очевидно, имеют место законы сохранения «энергии», «импульса» и «числа частиц» соответственно:

$$H = \text{const}, \quad P = \int dx \left(\rho \Psi'_x \right) = \text{const}, \quad N = \int dx (\rho) = \text{const}. \tag{18}$$

Масштабное преобразование $x \to bx$, $\rho \to \rho/b$, $\Psi \to b\Psi$, сохраняющее «импульс» P и «число частиц» N, дает

$$H \to H - \left(\left[g_H / 2\pi \right] N^2 \ln(1/b) \right), \tag{19}$$

и с уменьшением масштаба ($b \to 0$) гамильтониан может только уменьшаться, что выгодно!

В заключение приведем пример точного решения в виде изолированного коллапсирующего филамента [8]:

$$v = \xi (dL/dt), \quad \rho = (L_0/L)(1 - \xi^2)^{1/2}, \quad \xi = x/L, \quad |x| \le L, \tag{20}$$

где $L = L(t)$ — полуширина филамента ($\rho \equiv 0$ при $|x| \ge L$), а L_0 — ее начальное значение. Размер филамента определяется уравнением

$$L d^2 L / dt^2 = -g_H L_0,$$

согласно которому к моменту времени

$$t = t_c = \left[\pi L_0 / (2 g_H) \right]^{1/2}$$

эта токовая нить «схлопывается», захватив конечный ток

$$I_f \sim \int_{-L}^{+L} \rho \, dx = \text{const}.$$

Элементарный анализ показывает, что учет взаимодействия с соседними филаментами, расположенными в токовом слое периодически, затягивает коллапс, но не устраняет его полностью. Периодические системы токовых нитей, очевидно, неустойчивы относительно модуляций по положению или величине токов нитей, и эта неустойчивость также может быть описана в рамках уравнений (14).

Авторы благодарны Б. А. Трубникову за обсуждение данной работы и также признательны участникам семинара академика В. Д. Шафранова за плодотворную дискуссию.

Литература

1. С. В. Буланов, П. В. Сасоров, Физика плазмы **4**, 746 (1978).
2. Б. А. Трубников, УФН **160**, 167 (1990).
3. А. А. Галеев, в сб. *Основы физики плазмы*, под общей ред. Р. З. Сагдеева, М. Н. Розенблюта, Энергоатомиздат, Москва (1984), т. 2, с. 331.
4. Б. Б. Кадомцев, УФН **151**, 3 (1987).
5. С. В. Буланов, Г. И. Дудникова, Т. Ж. Есиркепов и др., Физика плазмы **22**, 867 (1996).
6. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
7. К. В. Чукбар, Физика плазмы **19**, 1491 (1993).
8. С. К. Жданов, В. П. Власов, Тез. докл. 24-ой Звенигородской конф. по физике плазмы и УТС, Россия (1997), с. 86.