

## ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Валуев, А. С. Каклюгин, Г. Э. Норман\*

*Московское физическое общество  
121019, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 июля 1997 г.

Показано, как понятия обычные для дебаевской плазмы — затухание Ландау, столкновительное затухание, близкие и дальние соударения, плазменные волны — должны быть пересмотрены для описания электрон-ионной неидеальной плазмы. Степени свободы неидеальной плазмы разделяются на коллективные и индивидуальные. Обсуждаются рост и насыщение доли коллективных степеней по мере возрастания неидеальности. Подход Татарского для системы связанных осцилляторов позволяет смоделировать коллективные степени свободы неидеальной плазмы набором ланжевеновских осцилляторов в термостате. Найдены как корреляционная энергия, так и энергия плазменных волн. Развитые представления позволили определить дисперсию плазменных волн и их затухание. Рассмотрено влияние затухания на расхождение между положением максимума динамического структурного фактора и действительной частью решения дисперсионного уравнения. Получена оценка для эффективной частоты столкновений индивидуальных степеней свободы (электронов), учитывающая как близкие парные рассеяния, так и рассеяния на плазменных волнах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Плазменные (ленгмюровские) волны являются специфической характеристикой газовой (дебаевской) плазмы (см., например, [1–5]). Формулы, полученные для газовой плазмы, ограничивают область существования плазменных волн значениями волновых чисел  $k/\kappa \ll 1$  и параметров неидеальности  $\gamma = \beta e^2 n^{1/3} \ll 1$  [4], где  $\kappa = a_e^{-1}$  — обратный электронный дебаевский радиус,  $a_e = [T/(4\pi e^2 n_e)]^{1/2}$ ,  $n_e$  и  $n$  — концентрация электронов и зарядов,  $T = \beta^{-1}$  — температура.

Однако плазменные волны в неидеальной плазме наблюдались уже в ранних экспериментах [6–9] и при моделировании методом молекулярной динамики [10–13]. В связи с этим существование плазменных волн в неидеальной плазме в ряде работ считалось доказанным и использовалось при решении различных вопросов теории такой плазмы [14–20]. Вместе с тем осуществить удовлетворительный переход от дебаевской плазмы [1–5] к неидеальной [6–20] не удавалось. Таким образом, целая область теории неидеальной плазмы, относящаяся к плазменным волнам и соответствующая представлениям, развитым в [1–5], отсутствовала.

Попытка начать построение теории неидеальной плазмы, следующей представлениям [1–5] и методу коллективных переменных [21, 22], предпринята в настоящей работе. При этом мы исходим из ограничения возможных волновых векторов продольных плазменный мод  $kn^{-1/3} < \text{const}$ , на которое было обращено внимание в [23–25], и из связанного с этим ограничением насыщения коллективных степеней свободы [24–27].

\* E-mail: henry@aha.ru

Выражения для дебаевской плазмы в данной работе используются со значениями коэффициентов из [1]. Однако в силу приближенного характера существующих моделей дебаевской плазмы [1–5] выбор численных значений неоднозначен. Тем более это относится к неидеальной плазме. Основное внимание уделялось качественным зависимостям.

В разд. 2 кратко излагаются необходимые сведения из теории дебаевской плазмы. В разд. 3 аналогичные понятия — затухание Ландау, столкновительное затухание, область существования плазменных волн, число коллективных степеней свободы — пересматриваются для неидеальной плазмы на основе качественных оценок.

В разд. 4 проводится разделение степеней свободы неидеальной плазмы на коллективные и индивидуальные. Показано, что уравнения движения для коллективных переменных сводятся к уравнениям ланжевеновского типа, при этом удается ввести дисперсионные характеристики. В разд. 5 рассмотрена энергия флуктуаций продольного электрического поля. Показано, как теория, развитая для идеальной плазмы, может быть распространена на неидеальную плазму. Найдены как корреляционная энергия, так и энергия плазменных волн. Обсуждаются распределения этих энергий по волновым числам и частотам.

Развитые представления в разд. 6 применяются для определения дисперсионных характеристик. Проводится сравнение с экспериментальными (натурными и компьютерными) наблюдениями плазменных волн в неидеальной плазме. В разд. 7 рассмотрены частоты взаимодействий электронов (индивидуальных степеней свободы) с зарядами и плазменными волнами. Результаты сопоставляются с данными молекулярно-динамического эксперимента.

Неидеальная плазма является неупорядоченной системой с сильным взаимодействием. Принято считать, что по этой причине неидеальная плазма теоретически может исследоваться либо путем экстра- и интерполяции строгих разложений для слабонеидеальной плазмы и подходов, развитых в теории металлов, либо компьютерным моделированием [28, 29]. В Заключении обсуждается, почему перспектива построения такой теории *ab initio* все же существует.

## 2. ДЕБАЕВСКАЯ ПЛАЗМА

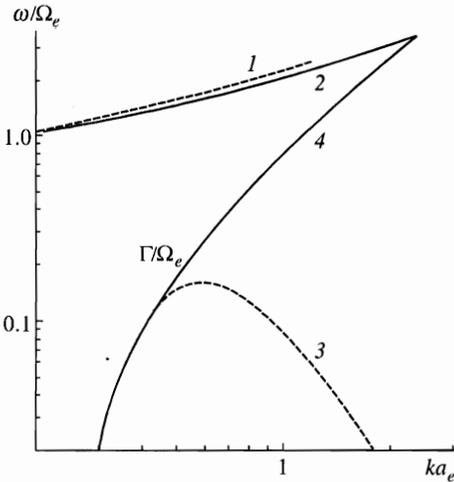
В разреженной плазме могут распространяться продольные плазменные волны с законом дисперсии

$$\omega^2(k) = \Omega_e^2(1 + 3a_e^2 k^2) \quad (1)$$

и декрементом бесстолкновительного затухания Ландау [1]

$$\frac{\Gamma_L(k)}{\Omega_e} = 0.14 \left(\frac{\kappa}{k}\right)^3 \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2\right], \quad (2)$$

не зависящим от  $\gamma$  (здесь  $\Omega_e = (4\pi e^2 n_e / m)^{1/2}$  — плазменная частота). Декремент  $\Gamma_L$  экспоненциально мал при  $k/\kappa \ll 1$  и возрастает при увеличении  $k/\kappa$  (рис. 1). Однако формула (2) справедлива только при  $k/\kappa \ll 1$  и становится неприменимой в области  $k/\kappa \approx 1$ , т. е. еще до того, как  $\Gamma_L$  станет величиной одного порядка с частотой и понятие о распространяющихся плазменных волнах теряет смысл [1]. Продолжить зависимость  $\omega(k)$  и  $\Gamma_L(k)$  в область больших значений  $k$  можно путем решения комплексного



**Рис. 1.** Дисперсионные кривые для идеальной плазмы. Действительные (1, 2) и мнимые (3, 4) части частоты плазменных волн, вычисленные соответственно по формулам (1), (2) и согласно работам [30, 31]

функционального уравнения, как это описано в монографии [30] со ссылкой на работу [31]. Результат, показанный на рис. 1, позволяет найти величину  $k_0 = \alpha \kappa$  ( $\alpha = 2.34$ ), при которой  $\Gamma_L(k_0) = \omega(k_0)$  (при этом  $\omega(k)/\Omega_e = 3.5$ ). Количественные результаты [31] в области  $\Gamma_L/\omega \approx 1$  нельзя считать достаточно надежными, так как использованные при этом выражения формально выходят за границы их применимости. Однако это значение  $\alpha$  согласуется с [21], где считается, что при  $k \approx 2\kappa$  движение частиц в плазме заметно коллективно, а степени свободы с  $k \approx \kappa$  можно считать уже полностью коллективными. Эти оценки уточняют качественные представления, использованные в [1].

Столкновительное затухание плазменных волн (плазмонов)  $\Gamma_c$  выражается в [1] через частоту электрон-ионных столкновений  $\nu_{ei}$  в лоренцевской модели:

$$\Gamma_c = \nu_{ei}/3\sqrt{2\pi}. \tag{3}$$

В дебаевской плазме  $\nu_{ei}$  определяется, в основном, далекими коллективными взаимодействиями с рассеянием на малые углы и описывается интегралом столкновений Ландау:

$$\nu_{ei} = \langle n_e v \sigma_t(v) \rangle, \tag{4}$$

где  $v$  — скорость электрона, скобки означают усреднение по скоростям,  $\sigma_t$  — транспортное сечение рассеяния электрона,

$$\sigma_t \propto \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \chi) \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)} d\chi, \tag{5}$$

$\chi$  — угол рассеяния. Поскольку  $\chi \ll 1$ , подынтегральное выражение в (1) приближенно равно  $d\chi/\chi$ . Тогда

$$\Gamma_c/\Omega_e = \ln \Lambda \gamma^{3/2}/3, \tag{6}$$

где  $\Lambda = \rho_{max}/\rho_{min} = (1/4\pi)^{1/2}\gamma^{3/2}$  (в качестве максимального прицельного расстояния  $\rho_{max}$  обычно берется полный дебаевский радиус  $a = a_e/2^{1/2}$ , а в качестве минимального —  $\rho_{min} = r_L = e^2\beta$ ).

Формула (6) справедлива при  $\gamma \ll 1$  ( $\ln \Lambda \gg 1$ ) и становится неприменимой при увеличении  $\gamma$  раньше, чем достигается значение  $\Gamma_c/\Omega_e \approx 1$ . Для оценки  $\Gamma_c$  при больших  $\gamma$  величина  $\ln \Lambda$  обычно фиксировалась по достижении ею значения  $\approx 3$  [32] (на возможность этого указывают экспериментальные данные по электропроводности при  $\gamma > 0.1$ ). Тогда  $\Gamma_c/\Omega_e = 1$  при  $\gamma_0 \approx 1$ .

Таким образом, область существования плазменных волн, согласно вышеприведенным оценкам, ограничивается неравенствами

$$k < k_0 \approx \alpha\kappa, \quad (7a)$$

$$\gamma < \gamma_0 \approx 1. \quad (7b)$$

Иногда область существования плазменных волн ограничивают еще более сильным неравенством

$$\Omega_e/\nu_{ei} > 1.$$

Именно на последнее неравенство ссылаются, например, авторы [33], утверждая, что плазменные волны перестают существовать в неидеальной плазме. Этим же можно объяснить отсутствие упоминаний о плазменных волнах в монографиях [28, 29].

Другой важной для нашего рассмотрения характеристикой является число коллективных степеней свободы  $s$ . Величину  $s$  можно оценить как отношение объема сферы  $4\pi k_0^3/3$  к  $(2\pi)^3/V$  — плотности возможных значений волновых векторов в объеме  $V$ . В дебаевской плазме

$$\frac{s}{3N_e} = \frac{1}{9\pi^{1/2}} \alpha^3 \gamma^{3/2} \ll 1, \quad (8)$$

где  $N_e$  — число электронов в объеме  $V$ . Видно, что почти все степени свободы остаются индивидуальными.

### 3. ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАНИЯ

Оценки  $\Gamma_L$  и  $\Gamma_c$ , справедливые для  $\gamma \ll 1$ , требуют существенного пересмотра для области  $\gamma \gtrsim 1$ . Ключевым здесь является естественное ограничение длин плазменных волн величиной порядка среднего расстояния между заряженными частицами [23], в терминах волновых чисел оно соответствует ограничению дебаевским волновым числом  $q_0$  [34]:

$$k < q_0 = (6\pi^2)^{1/3} n_e^{1/3}. \quad (9)$$

В дебаевской плазме  $q_0 \gg \kappa$  и ограничение (7a) сильнее, чем (9). С увеличением  $\gamma$  неравенство обращается:  $q_0 < \kappa$ .

Затухание Ландау определяется электронами, движущимися со скоростью равной фазовой скорости волны  $v_f$  [1]:

$$v_f = \frac{\omega(\mathbf{k})}{k} > \begin{cases} \Omega_e/k_0 \simeq v_T, & \gamma \ll 1, \\ \Omega_e/q_0 \simeq v_T \kappa n^{-1/3} > v_T, & \gamma \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

В дебаевской плазме такие электроны являются тепловыми. В недебаевской плазме при увеличении  $\gamma$  вклад в затухание Ландау вносится все меньшим числом электронов, соответствующих дальнему хвосту распределения Максвелла, и максимальное значение  $\Gamma_L(q_0)$  уменьшается с возрастанием  $\gamma$ . Таким образом, с ростом  $\gamma$  область значений  $k$ , в которой могло бы происходить сильное затухание Ландау, смещается в сторону больших  $k$  и вытесняется за границу  $k = q_0$ . Иными словами, роль затухания Ландау при увеличении  $\gamma$  в неидеальной области уменьшается.

Оценки декремента столкновительного затухания, приведенные в разд. 2, в неидеальной плазме теряют смысл, поскольку с увеличением  $\gamma$  все большую роль начинают играть сильные взаимодействия на расстояниях порядка и меньше  $n^{-1/3}$ . Можно выделить три области  $\gamma$ , в каждой из которых основными являются взаимодействия того или иного типа.

а) Область  $\gamma \ll 1$  ( $a \gg n^{-1/3}$ ). Определяющими являются слабые коллективные взаимодействия на расстояниях  $\approx a$ .

б) Область  $\gamma \sim 0.1$  ( $a \sim n^{-1/3}$ ). Дебаевский характер экранирования сохраняется, но основными становятся сильные взаимодействия на расстояниях  $\approx n^{-1/3}$ , остающиеся при этом непарными.

в) Область  $\gamma > 1$  ( $a < n^{-1/3}$ ). Дебаевский радиус теряет смысл радиуса экранирования, оно теперь имеет место на расстояниях  $\approx n^{-1/3}$  (об этом говорят и результаты математического моделирования [35]<sup>1)</sup>). Характер взаимодействия при этом существенным образом меняется [36]: из-за перекрытия кулоновских воронок ближайших ионов потенциал электрон-ионного взаимодействия становится эффективно короткодействующим. Основной вклад в  $\nu_{ei}$  дают теперь сильные парные взаимодействия на расстояниях  $< n^{-1/3}$  с рассеянием на большие углы.

Для оценки декремента столкновительного затухания при любых  $\gamma$  удобно ввести декременты затухания  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , обусловленные слабыми и парными сильными столкновениями соответственно. Первый из них описывается, как и прежде, интегралом столкновений Ландау, второй — интегралом столкновений Больцмана, при этом оба выражаются через кулоновский интеграл рассеяния (5). Перейдя в (5) от углов к прицельным расстояниям  $\rho$ , проинтегрировав в первом случае от  $n_e^{-1/3}/2$  до  $a$ , а во втором — от нуля до  $n_e^{-1/3}/2$ , получим для области  $\gamma \ll 1$

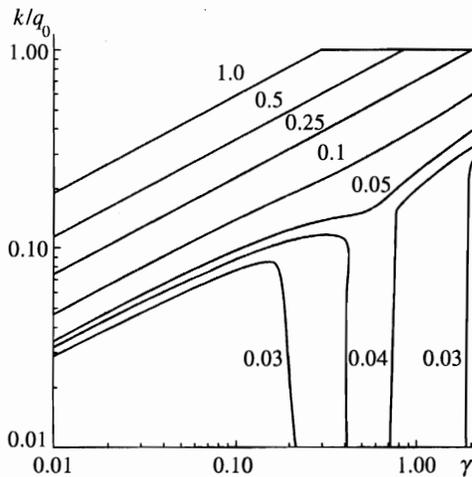
$$\frac{\Gamma_1}{\Omega_e} = \frac{\gamma^{3/2}}{6} \ln \frac{\Lambda_1^2 + 1}{\Lambda_2^2 + 1} \tag{11}$$

и для области  $\gamma > 1$

$$\frac{\Gamma_2}{\Omega_e} = \frac{\gamma^{3/2}}{6} \ln(\Lambda_2^2 + 1), \tag{12}$$

где  $\Lambda_1 = a/r_L$ ,  $\Lambda_2 = n_e^{-1/3}/2r_L$ . В выборе коэффициента в  $\Lambda_2$  имеется некоторая неопределенность (от 0.5 до 1). При усреднении в (4) значение  $mv^2$  под знаком логарифма заменено на  $T$  (эта оценка также вносит неопределенность). При  $\gamma \ll 1$  имеем  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$  и  $\Gamma_1$  возрастает как  $\gamma^{3/2}$ . При  $\gamma \gg 1$  декремент  $\Gamma_2$  убывает как  $\gamma^{-1/2}$ . Следовательно, в

<sup>1)</sup> Дебаевский радиус определяет лишь асимптотику парных корреляционных функций на расстояниях больших  $n^{-1/3}$ .



**Рис. 2.** Область существования плазменных волн в неидеальной плазме. Горизонтальная линия —  $k = q_0$ , кривые — изолинии  $(\Gamma_c + \Gamma_L)/\omega(k) = \text{const}$ . Цифры около кривых указывают значения константы

промежуточной области  $\gamma \sim 0.1$  должен существовать максимум. Его величину можно оценить, просуммировав  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_c = \Gamma_1 + \Gamma_2. \quad (13)$$

При этом  $\Gamma_1 = 0$  при  $\Lambda_1 < \Lambda_2$ , поскольку понятие о слабых столкновениях теряет смысл, когда  $a < n^{-1/3}$ . Хотя и (11), и (12), вообще говоря, неприменимы в промежуточной области, доводом в пользу такой оценки служит то, что такие столкновения все равно приводят к отклонениям на малые углы (крайний случай — пролет электрона точно между двумя ионами). Малые отклонения вносят малый вклад в  $\Gamma_c$ . Это справедливо, конечно, если формула (13) действительно дает малые значения  $\Gamma_c$ . Согласно оценке (13) с учетом отмеченных неопределенностей, максимум  $\Gamma_c/\Omega_e$  составляет  $0.08-0.2 \ll 1$  и расположен при  $\gamma = 0.8-1.6$ .

Из проведенных оценок следует, что плазменные волны даже при  $\gamma \approx 1$  и  $k \approx q_0$  остаются слабозатухающими. Область их существования оказывается существенно шире той, которая ограничивается неравенствами (7); она представлена на рис. 2, где также нанесены изолинии суммарного декремента затухания. Видно, что в зависимости от значений  $k$  и  $\gamma$  преобладает либо затухание Ландау, либо столкновительное затухание.

При рассмотрении числа коллективных степеней свободы в неидеальной плазме следует учесть, что  $\alpha\kappa = q_0$  при  $\gamma = \gamma_L$ . На рис. 2  $\gamma_L = 0.25$ . При  $\gamma > \gamma_L$  формула (8) становится несправедливой. Из определения дебаевского волнового числа  $q_0$  следует, что

$$s/3n_e = 1/3 \quad \text{при} \quad \gamma > \gamma_L. \quad (14)$$

Значение  $1/3$  соответствует тому, что рассматриваются только продольные колебания.

Таким образом, в неидеальной плазме число коллективных степеней свободы увеличилось по сравнению с дебаевской плазмой, а затухание Ландау перестало их ограничивать.

#### 4. КОЛЛЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Поскольку в неидеальной плазме существует большое количество хорошо определенных коллективных мод, естественно попытаться применить для такой плазмы метод коллективных переменных, развитый Бомом [21] для описания газовой плазмы. Этим методом были получены дисперсионные зависимости (1), (2), следующие из кинетических уравнений [1, 30]. Коллективные переменные были определены в виде

$$\rho_k(t) = \sum_j^N \exp[-ikx_j(t)].$$

Случай неидеальной плазмы гораздо сложнее. Мы имеем дело с системой нелинейно взаимодействующих осцилляторов [21], причем в отличие от случая идеальной плазмы здесь этим взаимодействием пренебречь нельзя.

Чтобы получить уравнения движения для коллективных возбуждений в неидеальной плазме, пригодные для последующего качественного анализа, нужно видоизменить метод коллективных переменных. В данной работе мы для этого сразу используем эвристические оценки из разд. 3, т. е. малость затухания плазменных волн. Тогда по аналогии с [21] гамильтониан системы  $H$  можно записать в виде

$$H = H_{os}(\rho_k) + H_{in}(q, p) + \Delta H_{kk'} + \Delta H_{os-in}, \tag{15}$$

где  $H_{os}(\rho_k)$  — гамильтониан, отвечающий коллективным степеням свободы,  $H_{in}(q, p)$  — гамильтониан индивидуальных степеней свободы,  $q, p$  — координаты и импульсы отдельных частиц,  $\Delta H_{kk'}$  и  $\Delta H_{os-in}$  — поправки, учитывающие взаимодействие коллективных мод между собой и с индивидуальными степенями свободы. Строго говоря, в неидеальной плазме разделить коллективные и индивидуальные переменные в последних двух членах нельзя. Их запись в (15) оправдана лишь в силу их предполагаемой малости.

Мы не будем конкретизировать вид гамильтониана (15), это достаточно сложно, и для дальнейших оценок в данной работе в этом нет необходимости. Поэтому сразу напишем уравнения движения для коллективных переменных, следующие из (15):

$$\ddot{\rho}_k = -\omega_k^2 \rho_k + F_{kk'} + F_{os-in}, \tag{16}$$

последние два члена в (16) — силы, соответствующие поправкам в гамильтониане (15). Система уравнений (16) напоминает систему для слабосвязанных осцилляторов, рассмотренную в [37]. Различие состоит лишь в наличии члена  $F_{os-in}$ , описывающего взаимодействие осциллятора со «средой» индивидуальных частиц, которое можно рассматривать как взаимодействие с термостатом. В [37] исследовалась «релаксация» гамильтоновской системы связанных осцилляторов на временах малых по сравнению с временем возврата Пуанкаре. При этом уравнения типа (16) представлялись в виде

$$\ddot{\rho}_k = -\omega_k^2 \rho_k + \Gamma_{eff} \dot{\rho}_k + y, \tag{17}$$

где  $\Gamma_{eff}$  — эффективный коэффициент трения, а  $y(t)$  —  $\delta$ -коррелированная случайная сила,  $\langle y(t)y(t') \rangle = 2D_\rho \delta(t - t')$ , где  $D_\rho$  — коэффициент диффузии в пространстве  $\rho$ . В нашем случае переход от (16) к (17) лишь облегчается из-за наличия «термостата».

Таким образом, уравнение движения коллективных переменных удастся, хотя бы в принципе, свести к более простым уравнениям ланжевеновского типа. Упрощение, в частности, состоит в том, что в отличие от (16) уравнение (17) зависит лишь от своего волнового вектора. Затухание за счет взаимодействия различных коллективных мод, следующее из  $F_{kk'}$ , и затухание, обусловленное взаимодействием с индивидуальными степенями свободы и следующее из  $F_{os-in}$ , объединены в эффективный коэффициент трения.

Отметим, что уравнение (17) отличается от уравнения для затухающих колебаний наличием случайного возбуждения  $y(t)$ . Его появление можно было предвидеть изначально, поскольку (17) моделирует подсистему коллективных степеней свободы полной системы (15) при постоянной температуре.

Как и в обычном методе коллективных переменных, выделение коллективных степеней свободы ограничивает движение «индивидуальных квазичастиц» окрестностью  $\Delta E$  некоторой гиперповерхности в фазовом пространстве с размерностью  $3N_e - s$ . Однако в отличие от случая дебаевской плазмы эта окрестность, по-видимому, достаточно велика (в силу флуктуационно-диссипационной теоремы [37]  $\Delta E \propto D_p = nk^2 \Gamma_{eff} v_T$ ), что и выражает гораздо более сильную связь между коллективными и индивидуальными степенями свободы.

Уравнение (17) поддается анализу аналогично обычному уравнению для стохастического осциллятора [38]. В этом случае понятие собственной частоты осциллятора теряет смысл, ее роль переходит к частоте  $\omega_1$ , на которой реализуется максимальный отклик на случайную силу  $y(t)$  (17). Для этой частоты справедливо известное в механике выражение  $\omega_1^2 = \omega_k^2 - \Gamma_{eff}^2$ . Величина  $\Gamma_{eff}$  в отличие от случая затухания Ландау носит диссипативный характер. Величины  $\omega_k$  и  $\Gamma_{eff}$  должны быть, конечно, определены при последовательном проведении преобразований (15)–(17). Однако для оценок в данной работе примем  $\omega_k = \omega(k)$  из формулы (1) или [31] и  $\Gamma_{eff} = \Gamma_L + \Gamma_c$  из оценок в разд. 3.

## 5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПЛАЗМЫ И ФЛУКТУАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### 5.1. Корреляционная энергия

Средняя потенциальная энергия системы с электромагнитным полем выражается через средний квадрат электрического поля (вклад магнитного поля мал):

$$U = \langle E^2 \rangle / (8\pi). \quad (18)$$

В тепловом равновесии при температуре  $T$  пространственно-временной спектр флуктуаций электрического поля и, следовательно, средний квадрат электрического поля, согласно флуктуационно-диссипационной теореме, определяются спектром определенной диссипативной величины — мнимой частью обратной продольной диэлектрической проницаемости [2, 30]:

$$U = -\frac{T}{(2\pi)^4} \int d^3k \int \frac{d\omega}{\omega} \text{Im} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right]. \quad (19)$$

Этот интеграл может быть вычислен различными способами. Если интегрировать вначале по  $\omega$ , можно убедиться, что в силу аналитических свойств подынтегрального выражения интеграл (19) по  $\omega$  может быть выражен через значения  $\varepsilon(\mathbf{k}, 0)$ . Представим

сомножители подынтегральной функции в виде

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\omega + i\Delta} + \frac{1}{\omega - i\Delta} \right],$$

$$- \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right] = \frac{1}{2i} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right] - \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \right] \right\},$$

после чего интеграл (2) может быть вычислен [2]:

$$U = \frac{T}{2(2\pi)^3} \int d^3k \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \right] = \frac{T}{(2\pi)^2} \int F(k) dk. \quad (20)$$

Интеграл (20) расходится (в частности, в дебаевской плазме подынтегральное выражение пропорционально выражению  $a_e^2 k^2 / (1 + a_e^2 k^2)$  и при интегрировании по  $d^3k$  обратится в бесконечность). Это — обычная кулоновская расходимость, связанная с бесконечной собственной энергией электромагнитного поля. Физический интерес представляет конечная величина, а именно, энергетический выигрыш от взаимных корреляций  $U_{corr} = U - U_0$ , где  $U_0$  — энергия некоррелированной кулоновской системы. Величина  $U_{corr}$  — потенциальная часть термодинамической функции, т. е. внутренней энергии системы. Для вычисления  $U_0$  воспользуемся тем, что с увеличением температуры корреляции ослабевают, т. е.

$$U_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} U.$$

Этот предел может быть представлен в виде интеграла по волновым векторам [23]:

$$U_0 = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ T \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \right) \right]. \quad (21)$$

При  $T \rightarrow \infty$  плазма становится дебаевской, поэтому предел величины в квадратных скобках равен  $T(\kappa/k)^2 = 4\pi n_e e^2 / k^2$ . Отсюда получаем

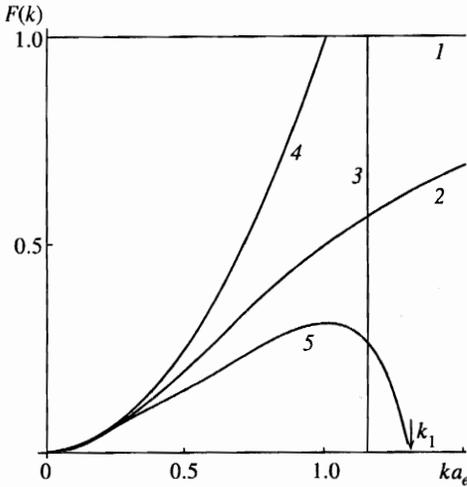
$$U_{corr} = -\frac{T}{2a_e^3(2\pi)^2} \int d(ka_e) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right] (ka_e)^2 \right\}. \quad (22)$$

Величину  $U_0$  можно записать и в более общем виде. Так как при высоких температурах  $\varepsilon(\mathbf{k}, 0) \simeq 1 + o(1/T)$ , подынтегральное выражение в (21) с той же точностью можно записать как  $T(\varepsilon(\mathbf{k}, 0) - 1)$  и получить [39]  $U_{corr}$  в виде

$$U_{corr} = -\frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\varepsilon(\mathbf{k}, 0) - 1]^2}{\varepsilon(\mathbf{k}, 0)}, \quad (23)$$

согласуем с общим выражением для корреляционной энергии (формула (85.15) в [40]). Интеграл (22) соответствует области между прямой 1 (первый член в фигурных скобках в (22)) и кривой 2 (второй член) на рис. 3 и конечен. В случае дебаевской плазмы при конечных температурах получим

$$U_{corr} = -\frac{T}{a_e^3(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d(ka_e)}{1 + (ka_e)^2}, \quad (24)$$



**Рис. 3.** Плотность энергии продольных мод  $F(k)$ : 1 — некоррелированные заряды, 2 — коррелированные заряды, 3 —  $k = q_0$ , 4 — коллективные моды в отсутствие затухания [30], 5 — коллективные моды с учетом затухания, определение  $k_1$  дается в тексте

что дает известное выражение для кулоновской энергии [38]

$$U_{corr}/NT = -\sqrt{\pi} \gamma^{3/2}.$$

Для перехода к неидеальной плазме интегрирование в (18)–(24) должно распространяться не до бесконечности, а до  $k \approx q_0$ . В дебаевской плазме  $q_0 \gg \kappa$  и это ограничение несущественно. В неидеальной плазме указанное сильное неравенство не выполняется, и интегрирование должно распространяться лишь до  $q_0$  (область между линиями 1, 2 и 3 на рис. 3). Тогда, экстраполируя в область неидеальности дебаевское выражение для  $\varepsilon(k, 0)$  (это, по крайней мере в длинноволновом пределе, справедливо, см. сноску<sup>1</sup>), для  $U_{corr}$  получим

$$U_{corr}/NT = -(2/\pi^{1/2})\gamma^{3/2} \arctg(q_0 a_e). \tag{25}$$

Это выражение было получено в [23] несколько другим способом.

### 5.2. Энергия электрического поля продольных плазменных волн

Самостоятельный интерес представляет энергия продольных плазменных волн. Эту энергию в равновесном случае можно оценить, положив на каждую коллективную степень свободы  $T/2$  и приняв число коллективных степеней свободы равным объему фазового пространства волновых чисел [4,5]. Для дебаевской плазмы этот объем  $\sim \kappa^3$ , а для неидеальной  $\sim q_0^3$ . В этой оценке полагается, что при  $k < \kappa$  (или  $q_0$ ) плазменные волны являются незатухающими, а при  $k > \kappa$  (или  $q_0$ ) эти волны не существуют.

Для уточнения численных коэффициентов, вычисления распределения энергий по  $k$  с учетом затухания и получения плавного перехода от дебаевского случая к неидеальному следует проинтегрировать в формуле (19) в области существования этих мод сначала по  $\omega$ , а затем по  $k$ . В [30] такая оценка проведена для разреженной плазмы в предположении бесконечно малого затухания,  $\text{Im}[\varepsilon(k, \omega)] \rightarrow 0$ . При этом подынтегральное выражение в (19)

$$A(\omega, k) = \omega^{-1} \text{Im} [\varepsilon^{-1}(k, \omega)]$$

оказывается равным

$$A(\omega, k) = (\pi/2)\Omega_e\delta(\omega - \Omega_e)/\omega, \tag{26}$$

а после интегрирования по  $\omega$  отношение энергии электрического поля коллективных мод к тепловой энергии электронов равно

$$\xi = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi \cdot (3/2)n_e T} = \frac{1}{6\pi^2 n_e} \int_0^{k_{max}} k^2 dk. \tag{27}$$

В [30] полагается  $k_{max} = \kappa$ . Тогда

$$\xi = 0.17\gamma^{3/2}. \tag{28}$$

Если же согласовать выбор  $k_{max} = 2.34\kappa$  с рис. 1, получим

$$\xi = 2.17\gamma^{3/2}. \tag{29}$$

В такой оценке не учитывается затухание волн при приближении к  $k_{max} = 2.34\kappa$ , т. е. оценка (29) завышает  $\xi$ .

Можно было бы думать, что истина лежит между (28) и (29). Однако оценки (28), (29) можно попытаться уточнить, не предполагая бесконечной малости затухания и проводя численное интегрирование  $A(\omega, k)$  в области существования коллективных мод (максимум  $A(\omega_k)$  при данном  $k$ ), пользуясь выражением для диэлектрической проницаемости [30]

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, \omega) &= 1 - (\Omega_e/\omega)^2 \Phi(x), \\ \Phi(x) &= -2x^2 \left[ 1 - 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt - i\sqrt{\pi} x \exp(-x^2) \right], \\ x &= \omega / (\sqrt{2} k v_T). \end{aligned}$$

Взять интеграл по  $\omega$  от  $A(\omega, k)$  нетрудно в области  $ka_e \leq 0.7$ , где коллективные моды хорошо определены (рис. 4, кривые 1, 2). Результат интегрирования по  $\omega$  дается кривой 5 на рис. 3. Видно, что эта кривая начинает отклоняться от кривых 2, 4 уже при  $ka_e \approx 0.3$ . При бóльших значениях  $ka_e$  оценка приобретает весьма приблизительный характер, поскольку уже трудно разделить вклады в интеграл от  $A(\omega, k)$  от индивидуальных и плохо определенных коллективных мод (кривая 3 на рис. 4).

Интеграл по  $k$  от нуля до бесконечности, фактически до  $k_1$  ( $\kappa < k_1 < 2.34\kappa$ ), от функции, соответствующей кривой 5 на рис. 3, определяет величину

$$\xi = 0.11\gamma^{3/2}, \tag{30}$$

что меньше, чем по оценкам (28) и (29).

В случае (29) предельное значение волнового числа  $q_0$  становится сравнимым с  $\alpha\kappa$  при  $\gamma_L$ , а в случае (28) — при некотором значении  $\gamma > \gamma_L$ . При этих значениях  $\gamma$  величина  $\xi$  достигает своего предельного значения  $1/3$  и далее с увеличением  $\gamma$  не меняется. По оценке же (30) лишь коэффициент начинает уменьшаться при таких  $\gamma$ , при которых  $q_0$  меньше  $k_1$ , а сама величина  $\xi$  становится равной  $1/3$  при  $\gamma \approx 15$ .

С учетом приближенности сделанных оценок следует ожидать, что значение  $\gamma$ , при котором достигается  $\xi = 1/3$ , лежит между 0.25 и 15 и может быть уточнено (на этом этапе исследований) путем сравнения с результатами численного эксперимента.

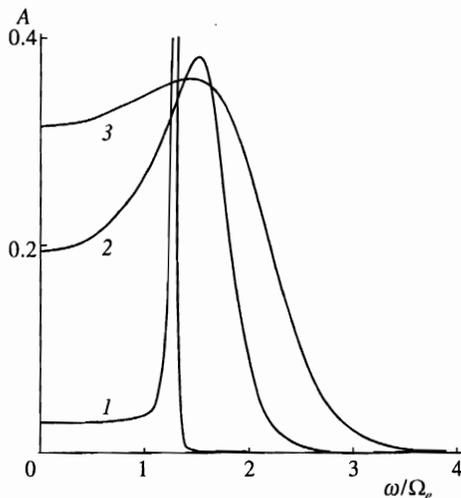


Рис. 4. Спектр мощности продольных мод  $A(\omega, k)$ : 1 —  $ka_e = 0.3$ , 2 — 0.7, 3 — 1

## 6. ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Для оценки дисперсии плазменных волн в качестве исходного возьмем выражение (1). Собственно дисперсионный член в нем  $3\Omega_e^2 a_e^2 k^2$  носит газодинамический характер. Коэффициент при  $k^2$ , равный  $3T$ , есть  $r = (\partial P / \partial n)_\eta$  для идеального газа ( $P = nT$ ) в процессе с показателем политропы  $\eta = 3$  [4]. Для неидеальной плазмы величину  $r$  можно вычислить, используя соотношение (25) для кулоновской энергии. Получим

$$r = 3T \left[ 1 - (2/3\sqrt{\pi}) \gamma^{3/2} \operatorname{arctg}(q_0 a_e) \right], \quad (31)$$

т. е. величину меньшую, чем для идеального газа. Результаты оценки приведены на рис. 5 вместе с данными молекулярно-динамического расчета [13]. Видно, что качественное изменение дисперсионных кривых с увеличением  $\gamma$  соответствует тенденции к уменьшению значений  $\omega_k$ , наблюдаемой в компьютерном эксперименте.

Наибольшее расхождение между кривой 2 и точками, полученными из данных [13], наблюдается при больших  $k$ . Это расхождение может быть связано с тем, что кривая 2 и точки на рис. 5 относятся к разным величинам. Точки соответствуют максимумам динамического структурного фактора, т. е. статистической оценке  $k^2 A(\omega, k)$ . Что касается кривых 1, 2, то они представляют собой действительные части решений  $\omega'_k$  дисперсионного уравнения  $\varepsilon(k, \omega' + i\omega'') = 0$  для идеальной и неидеальной плазмы. Положение максимума  $A(\omega, k)$  по  $\omega$  совпадает с решением дисперсионного уравнения  $\omega'_k$ , только если считать затухание плазменных волн  $\omega''_k$  бесконечно малым. Только тогда (как в формуле (26)) функция  $A(\omega, k)$  представляет собой сингулярное слагаемое формулы Сохоцкого, и носитель этой функции сводится к решению уравнения  $\varepsilon(k, \omega) = 0$ .

Если затухание не нулевое, эта функция

$$A(\omega, k) = - \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \omega}$$

оказывается регулярной и ее максимум приближенно соответствует максимуму первого сомножителя или минимуму функции  $|\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2$  ( $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  — действитель-

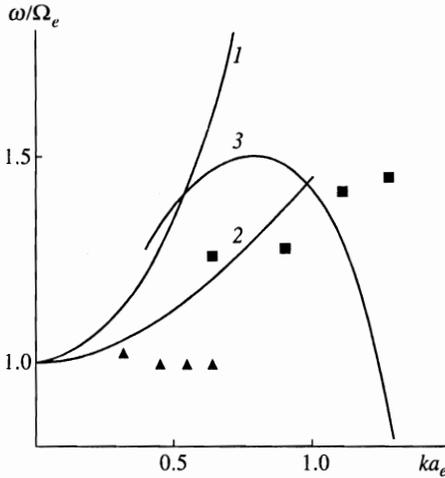


Рис. 5. Дисперсия плазменных волн в неидеальной плазме. Расчет: 1 — [30, 31], 2 — согласно (31),  $\gamma = 1.56$ , 3 —  $\omega_{max,k}$ . Данные молекулярной динамики [13]: квадраты —  $\gamma = 0.39$ , треугольники —  $\gamma = 1.56$

ная и мнимая части диэлектрической проницаемости). Вблизи решения дисперсионного уравнения  $\epsilon' \approx A(\omega - \omega'_k)$ ,  $\epsilon'' \approx B + C(\omega - \omega'_k)$  и можно записать  $\epsilon'^2 + \epsilon''^2 \approx (A^2 + C^2)(\omega - \omega'_k)^2 + 2BC(\omega - \omega'_k) + B^2$ . Минимум такого квадратного трехчлена реализуется при  $\omega_{max,k} = \omega'_k - BC/(A^2 + C^2)$ . При малых значениях затухания величины  $B$  и  $C$  ничтожны. С возрастанием  $k$  величины  $B$  и  $C$  растут, причем  $C$  становится положительной, и  $\omega_{max,k}$  смещается в сторону значений меньших  $\omega'_k$ .

На рис. 5 приведена зависимость  $\omega_{max,k}$  для идеальной плазмы, рассчитанная численно по кривым типа изображенных на рис. 4. Видно, что значения  $\omega_{max,k}$  оказываются ниже кривой 1 на рис. 5 при  $ka_e > 0.4$ . Такой же эффект по отношению к кривой 2 ожидается и для неидеальной плазмы. Оценка максимального смещения (при  $k \approx q_0$ ) дает величину порядка  $\Omega_e \gamma^{5/2}$ .

Определение корреляционной энергии в разд. 5 и влияние уравнения состояния на зависимость  $\omega(k)$  позволяют связать подход, развиваемый в настоящей работе, с подходом, где главным является вычисление вклада короткодействующего (квантового) взаимодействия в термодинамические функции (см., например, [28] и содержащиеся там ссылки). Во-первых, соответствующие уравнения состояния можно использовать при вычислении  $r$ ; при этом, однако, корреляционную энергию (25) следует дополнить вкладом короткодействия аналогично тому, как это сделано для дебаевской плазмы. Во-вторых, можно ожидать, что короткодействие повлияет на дисперсионные характеристики при значениях  $k$  близких к  $k_{max}$ , как это имеет место для фононных спектров.

Зависимость декремента затухания от волнового числа приведена на рис. 6. Две аналитические кривые соответствуют оценкам кулоновского логарифма в (12) по минимуму и по максимуму, сделанным в связи с упоминавшейся в разд. 3 неопределенностью численных коэффициентов.

Оценка из разд. 3 неплохо согласуется с данными математического моделирования [13] в области  $k$ , где преобладает затухание Ландау. К сожалению, в области малых  $k$ , где главным должно быть столкновительное затухание, результаты молекулярно-динамического расчета отсутствуют.

В таблице приведены результаты экспериментального наблюдения плазменных волн. В работах [6–8, 41, 42] фиксировался лишь сам факт существования плазменных

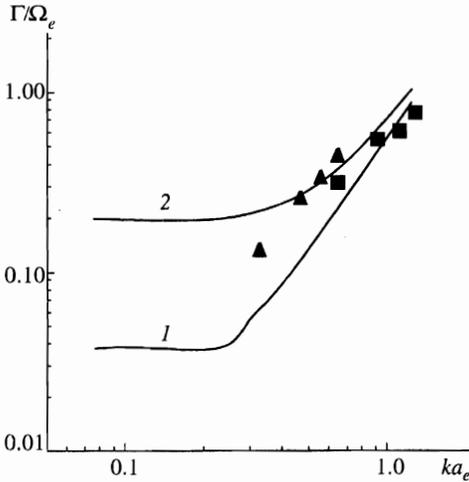


Рис. 6. Декремент затухания плазменных волн в неидеальной плазме: 1 и 2 — (12) при оценке кулоновского логарифма по минимуму и по максимуму. Данные молекулярной динамики [13]: квадраты —  $\gamma = 0.39$ , треугольники —  $\gamma = 1.56$

колебаний при тех или иных значениях концентрации и температуры зарядов. Значения  $\omega(k)$  для условий работы [8] были найдены в [9] с помощью интерпретации результатов измерений электропроводности. Из таблицы следует, что плазменные волны уверенно наблюдаются даже в области значений параметра неидеальности  $\gamma \simeq 0.2-1$ , где, согласно разд. 3, суммарный декремент затухания должен быть максимальным.

**Значения параметра неидеальности, при которых экспериментально наблюдались плазменные колебания**

	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.2-1$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.25$
$\omega/\Omega_e$	—	—	$1.0 \pm 0.1$	—	—
Ссылка	[6]	[7]	[8]	[41]	[42]

**7. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ**

Дифференцируя (15) по  $p$  и  $q$ , можно получить уравнения движения для квазичастиц (электронов), отвечающих индивидуальным степеням свободы:

$$\frac{dp_i}{dt} = \nabla \sum_j \Phi(q_{ij}) + f_{in-os}. \tag{32}$$

Здесь  $\Phi(q_{ij})$  — потенциальная энергия взаимодействия электрона  $i$  с зарядом  $j$  (включая ионы), а сила  $f$  создается электрическим полем коллективных мод. Напомним, что в неидеальной плазме потенциал  $\Phi$  в (32) следует считать короткодействующим ядром кулоновского потенциала, а рассеяние на нем — сильным, но эффективно парным. Коллективное же рассеяние на больших расстояниях описывается вторым членом в (32).

В простейшем виде разделить силы в (32) можно следующим образом. При выделении коллективных переменных длинноволновая часть кулоновского взаимодействия

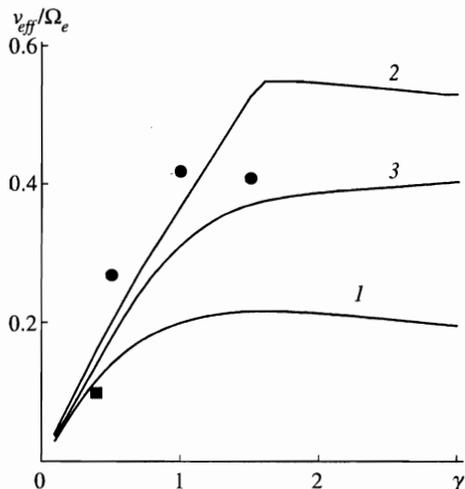


Рис. 7. Эффективная частота столкновений электронов: 1 — столкновительный вклад, 2 и 3 — сумма (33), где значение  $\xi$  оценено по (28) и (30) соответственно. Молекулярно-динамические результаты: точки — [45], квадрат — [13] (получен для потенциала, более мелкого, чем в [45])

образует поля плазменных волн [4, 21]. В дебаевской плазме граничный вектор, отделявший коллективные поля от коротковолнового взаимодействия, был недостаточно хорошо определенным ( $\sim \kappa$ ), что, однако, компенсировалось тем, что реальный вклад обеспечивался лишь областями  $k \ll \kappa$  и  $k \gg \kappa$  и описание плазмы было корректным.

При значительной неидеальности ситуация меняется. Теперь граничный вектор оказывается однозначно определен — это  $q_0$ , а в качестве потенциала  $\Phi$  можно использовать интеграл

$$\Phi(r) = 4\pi \int \frac{d^3k}{k^2} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

взятый по  $k > q_0$ .

Обоим силовым членам в (32) соответствуют некоторые сечения рассеяния и определяемые через эти сечения времена релаксации электронов или их эффективные частоты рассеяния. Для столкновительной части эффективной частоты  $\nu_c$  справедливы соображения, высказанные в разд. 3 при оценке столкновительного затухания плазменных волн, и  $\nu_c$  отличается от  $\Gamma_c$  из (13) лишь коэффициентом [1, 43]:

$$\nu_c = (3\pi/16\alpha_e)\Gamma_c,$$

где в однократно ионизованной разреженной плазме коэффициент  $\alpha_e = 0.582$ , согласно [43], учитывает электрон-электронное взаимодействие. Для оценок мы будем использовать то же значение  $\alpha_e$ .

Сечение рассеяния при взаимодействии электронов с плазменными волнами впервые было вычислено в [44] и оказалось равным резерфордскому, но без кулоновского логарифма. Частота же взаимодействий дается выражением  $\nu_{os} = \xi\Omega_e$ . Полную эффективную частоту «столкновений» можно записать в виде

$$\nu_{eff}/\Omega_e = \nu_c/\Omega_e + \nu_{os}/\Omega_e. \tag{33}$$

Отметим, что впервые формула типа (33) была применена для оценки электропроводности неидеальной плазмы в [36]. При малых  $\gamma$  оба члена в (33) возрастают как  $\gamma^{3/2}$ , при

больших же степенях неидеальности первый член убывает как  $\gamma^{-1/2}$ , а второй выходит на константу  $\approx 1/3$  вместе с полной эффективной частотой. Результаты оценки для двух выражений для  $\xi$  (28) и (30) приведены на рис. 7 в сравнении с данными молекулярно-динамического эксперимента [45] по временам электронной релаксации. Видно, что учет плазменных волн сильно меняет оценки частоты столкновений, а вместе с ней и электронных транспортных свойств плазмы. Последний вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможность построения теории неидеальной плазмы на том же уровне строгости, что и для дебаевской плазмы, обусловлена малостью затухания  $\Gamma/\Omega_e$ . Однако эта теория не может строиться как разложение по малому параметру  $\Gamma/\Omega_e$ , так как до сих пор не найдены аналитические представления, описывающие свойства плазмы как функции этого параметра.

Выделение в гамильтониане вклада коллективных степеней свободы связано с наиболее общими свойствами движения заряженных частиц, т. е. топология изоэнергетической гиперповерхности в фазовом пространстве системы должна быть эквивалентна топологии тора. Размерность этого тора определяет число колебательных степеней свободы. Справедливость этих утверждений обосновывала бы корректность подхода [37] в общем случае, а также возможность его применения для неидеальной плазмы.

Форму фазовой гиперповерхности нужно исследовать, используя компьютерное моделирование. Топологические свойства фазовой траектории должны затем исследоваться современными методами дифференциальной геометрии и математической статистики. Так будет подтверждена справедливость предложенного подхода к теории неидеальной плазмы.

Благодарим А. А. Рухадзе и М. В. Незлина за интерес к работе и поддержку.

## Литература

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы*, Наука, Москва (1975).
3. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).
4. Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев, *Физика плазмы для физиков*, Атомиздат, Москва (1979).
5. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1978).
6. V. Ya'akobi and G. Bekefi, *Phys. Lett.* **130**, 539 (1969).
7. M. Skowronek, J. Rous, A. Goldstein, and F. Cabannes, *Phys. Fluids* **13**, 378 (1970).
8. И. Я. Дихтер, В. А. Зейгарник, *ДАН СССР* **227**, 656 (1976).
9. Э. И. Асиновский, А. А. Валуев, *ТВТ* **18**, 1318 (1980).
10. G. E. Norman and A. A. Valuev, in *Proc. XII IGPIG*, Eindhoven (1975), p. 257.
11. А. А. Валуев, *ТВТ* **15**, 1143 (1977).
12. G. E. Norman and A. A. Valuev, *Plasma Phys.* **21**, 531 (1979).

13. J. P. Hansen and I. R. McDonald, *Phys. Rev. A* **23**, 2041 (1981).
14. Yu. K. Kurilenkov and A. A. Valuev, *Beitr. Plasmaphys.* **24**, 529 (1984).
15. В. М. Адамян, И. М. Ткаченко, *ТВТ* **21**, 417 (1983).
16. K. I. Golden, *Phys. Rev. A* **35**, 5278 (1987).
17. G. Kalman, in *Physics of nonideal plasmas. Teubner-Texte zur physik. Bd. 26*, ed. by W. Ebeling, A. Forster, and R. Radtke, Teubner, Stuttgart (1992), p. 167.
18. G. Kalman and K. I. Golden, *Phys. Rev. A* **41**, 5516 (1990).
19. J. Ortner and I. M. Tkachenko, *Phys. Rev. A* **46**, 7882 (1992).
20. F. A. Gutierrez and M. A. Girardeau, *Phys. Rev. A* **42**, 936 (1990).
21. Д. Бом, *Общая теория коллективных переменных*, Мир, Москва (1964).
22. Д. Н. Зубарев, *ДАН СССР* **95**, 757 (1954).
23. А. С. Каклюгин, *ТВТ* **23**, 217 (1985).
24. А. С. Каклюгин, в сб. *Тез. докл. IV Всес. конф. по физике газового разряда (Махачкала, 1988)*, Изд-во ДГУ, Махачкала (1988), с. 33.
25. А. А. Валугев, А. С. Каклюгин, Г. Э. Норман, в кн. *Радиационная плазменная динамика. Т. 1*, под ред. Ю. С. Протасова, Энергоатомиздат, Москва (1991), с. 396.
26. А. А. Валугев, А. С. Каклюгин, Г. Э. Норман, *Математическое моделирование* **4**(12), 178 (1992).
27. A. S. Kaklyugin, G. E. Norman, and A. A. Valuev, in *Proc. Int. Conf. on Physics of Strongly Coupled Plasmas*, ed. by W. D. Kraeft and M. Schlanges, World Scientific, Singapore (1996), p. 435.
28. W. Ebeling, A. Forster, V. E. Fortov, V. K. Gryaznov, and A. Ya. Polishchuk, *Thermophysical properties of hot dense plasmas. Teubner-Texte zur physik. Bd. 25*, Teubner, Stuttgart (1992).
29. В. Е. Фортов, И. Т. Якубов, *Неидеальная плазма*, Энергоатомиздат, Москва (1994).
30. Дж. Бекефи, *Радиационные процессы в плазме*, Мир, Москва (1971).
31. M. A. Lieberman and A. Bers, *Quarterly Progr. Rep. № 77*, Research Laboratory of Electronics, M.I.T. (1965), p. 141.
32. С. И. Андреев, Н. Ф. Ивасенко, *Основы расчета импульсных ксеноновых ламп*, Изд-во Томского университета, Томск (1982), с. 44.
33. I. T. Iakubov and A. G. Khrapak, in *Transport and optical properties of nonideal plasma*, ed. by G. A. Kobzev, I. T. Iakubov, and M. M. Popovich, Plenum Press, New York, London (1995), p. 1.
34. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1966).
35. Б. В. Зеленер, Г. Э. Норман, В. С. Филинов, *ТВТ* **12**, 267 (1974).
36. А. А. Валугев, Ю. К. Куриленков, *ТВТ* **21**, 591 (1983).
37. В. И. Татарский, *УФН* **151**, 273 (1987).
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Ч. 1*, Наука, Москва (1995).
39. А. С. Каклюгин, *Дисс. ... канд. физ.-матем. наук*, ИВТАН, Москва (1987).
40. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2*, Наука, Москва (1978).
41. K. H. Finken and U. Ackerman, *Physica B* **113**, 135 (1982).
42. M. Ketlitz and R. Radtke, in *Physics of nonideal plasmas. Teubner-Texte zur physik. Bd. 26*, ed. by W. Ebeling, A. Forster, and R. Radtke, Teubner, Stuttgart (1992), p. 233.
43. Л. Спитцер, *Физика полностью ионизованного газа*, Изд-во иностр. лит., Москва (1957).
44. Б. И. Давыдов, в сб. *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, Изд-во АН СССР, Москва (1958), с. 77.
45. А. А. Валугев, И. В. Морозов, Г. Э. Норман, в сб. *Тез. докл. XXIV Звенигородской конф. по физике плазмы и УТС, (Звенигород, 1997)*, РИИС ФИАН, Москва (1997), с. 236.