ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 2, стр. 606–614

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВУХ РАЗБЕГАЮЩИХСЯ ДЕЛЬТА-ЯМАХ

*В. И. Манько**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

А. С. Чихачев

Конструкторское бюро «Салют»
Государственного космического научно-производственного центра им. М. В. Хруничева
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 сентября 1997 г.

Для квантовой нестационарной системы, потенциал которой имеет вид двух равномерно разбегающихся дельта-ям, проанализировано точное решение для аналогов связанных состояний и состояний рассеяния. Для дельта-потенциала найдены в явном виде (в виде ядер операторов) интегралы движения, зависящие от времени и переходящие при стремлении силы взаимодействия с потенциалом к нулю к известным интегралам движения свободной квантовой частицы.

1. Точные решения уравнения Шредингера для нестационарных квантовых гамильтонианов существуют лишь для нескольких потенциалов. Так, осциллятор с переменной частотой был рассмотрен, и его волновые функции — как гауссовские пакеты, так и дискретные аналоги связанных состояний — были найдены в явном виде Хусими [1]. Пропагатор этой задачи в виде гауссиана также был получен в этой работе. Осциллятор с постоянной частотой, на который действует переменная внешняя сила, был решен независимо Швингером [2] и Фейнманом [3]. Квадратичный по координатам и импульсам интеграл движения, совпадающий по форме с интегралом движения, найденным Ермаковым [4] для классического параметрического осциллятора, был построен в [5, 6]. Линейные интегралы движения для квантового параметрического осциллятора были построены для одномерного случая в [7, 8] и для многомерного в [9]. Другими нестационарными задачами, для которых найдено точное решение, являются циклотронное движение в переменном поле [10], а также задачи со специально подобранными зависимостями от времени [11]. Дельта-потенциал является хорошей моделью для короткодействующих сил. Пропагатор для стационарной дельта-ямы был получен в виде функции, выражающейся через функцию ошибок в [12, 13]. Пропагатор для одной нестационарной дельта-ямы был рассмотрен в [14]. Большой интерес представляет модель двух разбегающихся дельта-ям. Точные решения были впервые получены в [15], где построено симметричное решение, переходящее в известное связанное состояние при нулевой скорости разбегания, в [16] получены аналоги состояний рассеяния. Однако для неквадратичных потенциалов типа дельта-ям интегралы движения не были известны. Цель настоящей работы — детальное изучение свойств решений для двух

* E-mail: manko@na.infn.it

разбегающихся дельта-ям, включая антисимметричное решение. Также найден в явном виде интеграл движения, зависящий от времени, для одной дельта-ямы и изучен предельный переход к случаю свободного движения.

2. Рассмотрим сначала состояния частицы с одним притягивающим дельта-центром в точке $x = 0$. Уравнение для функции Грина G в этом случае имеет вид

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\delta(x)\right] G(x, x', t, t') = i\delta(x - x')\delta(t - t'). \qquad (1)$$

Используя представление G в виде суммы

$$\sum_\lambda \psi_\lambda^*(x', t')\psi_\lambda(x, t),$$

где ψ_λ — собственные функции оператора

$$i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\delta(x),$$

аналогично тому, как сделано в работе [13], можно получить

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi i(t-t')}} \exp\left[i\frac{(x-x')^2}{2(t-t')}\right]\sigma(t-t') +$$
$$+ \alpha\exp\left[-\alpha\left(|x| + |x'|\right) + i\frac{\alpha^2(t-t')}{2}\right] - \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k^2+\alpha^2}\left\{k\sin\left[k\left(|x| + |x'|\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \alpha\cos\left[k\left(|x|+|x'|\right)\right]\right\} = G_0 + \alpha\exp\left[-\alpha\left(|x| + |x'|\right) + \frac{i\alpha^2(t-t')}{2}\right] -$$
$$- \frac{\alpha i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k+i\alpha}\exp\left[-ik^2\frac{t-t'}{2} - ik\left(|x|+|x'|\right)\right], \qquad (2)$$

$$\sigma(\tau) = 1, \quad \tau \geq 0, \quad \sigma = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0.$$

Первый член в выражении для G представляет собой пропагатор свободно движущейся частицы, второе слагаемое соответствует единственному связанному состоянию частицы и интегральный член — сумма по всем состояниям непрерывного спектра.

Интегральный член может быть выражен при помощи функции Мошинского [17]:

$$M(x, k, t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{k-k'}\exp\left[i\left(k'x - \frac{k'^2 t}{2}\right)\right].$$

Преобразование этого интеграла с использованием результатов [17] позволяет представить функцию Грина в виде

$$G(x, x', t) = G_0(x, x', t) + \alpha M_1(\theta, \alpha, t), \qquad (3)$$

где

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}}\exp\left[i\frac{(x-x')^2}{2t}\right]\sigma(t),$$

$$M_1 = \frac{1}{2}\exp\left(-\alpha\theta + \frac{i\alpha^2 t}{2}\right)\operatorname{erf}\left(\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)\frac{\theta - i\alpha t}{\sqrt{2t}}\right),$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \exp(-x^2)dx, \quad \theta = |x| + |x'|.$$

Выражение (3) для функции Грина отличается от выведенного в [17], так как в [17] рассмотрен случай $\alpha < 0$, т. е. при отсутствии связанного состояния.

Явные выражения для пропагатора (2), (3) позволяют найти также в явном виде интегралы движения нашей задачи. Действительно, как показано в [18], если задан оператор эволюции системы $\hat{U}(t)$, т. е.

$$\hat{U}(t,t')\Psi(x,t') = \Psi(x,t), \tag{4}$$

где $\Psi(x,t')$ — начальное значение волновой функции в момент времени t', оператор

$$\hat{I}(t,t') = \hat{U}(t,t')I(t')\hat{U}^{-1}(t,t') \tag{5}$$

есть интеграл движения. Это означает, что $d\hat{I}/dt \equiv 0$. Функция Грина, по определению, является матричным элементом оператора эволюции

$$G(x,x',t,t') = \langle x|\hat{U}(t,t')|x'\rangle$$

в координатном представлении, т. е. ядром оператора эволюции.

Мы рассматриваем систему с эрмитовым гамильтонианом и, следовательно, оператор эволюции унитарен. Из формулы (5) вытекает, что если известно ядро оператора $\hat{I}(t')$ в координатном представлении, т. е.

$$I(x,x',t') = \langle x|\hat{I}(t')|x'\rangle,$$

то для ядра интеграла движения $\hat{I}(t,t')$ в этом представлении имеем выражение

$$J(x,x',t,t') = \int G(x,z,t,t')I(t')G^*(z,x',t,t')dz.$$

Положим для определенности $t' = 0$ и рассмотрим отдельно случаи координаты и импульса в качестве оператора $\hat{I}|_{t'=0}$.

Для оператора координаты следует равенство

$$\begin{aligned}
(\hat{x}_0(t))_{xx'} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\,dz\,G(x,z,t)G^*(z,x',t) = \frac{t}{2\pi}\,\delta'(x-x')\exp\left(i\frac{x^2 - x'^2}{2t}\right) - \\
&- i\alpha\int\limits_0^{\infty} z\,dz\sin\frac{xz}{t}\exp\left(i\frac{z^2}{2t} - \alpha z\right)\operatorname{erf}\left(\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)\frac{z + |x'| - i\alpha t}{\sqrt{2t}}\right)\times \\
&\times \exp\left(i\frac{x^2}{2t} - \alpha|x'| + \frac{i\alpha^2 t}{2}\right) + i\alpha\int\limits_0^{\infty} z\,dz\sin\frac{x'z}{t}\exp\left(-\frac{iz^2}{2t} - \alpha z\right)\times \\
&\times \operatorname{erf}\left(\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\frac{z + |x| + i\alpha t}{\sqrt{2t}}\right)\exp\left(-\frac{ix^2}{2t} - \alpha|x| - \frac{i\alpha^2 t}{2}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично для импульса можно получить соотношение

$$
\begin{aligned}
(\hat{p}_0(t))_{xx'} &= i\int_{-\infty}^{\infty} dz\, G(x,z,t)\frac{\partial}{\partial z}G^*(z,x',t) = \\
&= -\frac{x'}{2\pi}\,\delta(x-x') + \frac{i}{2\pi}\,\delta'(x-x')\exp\left(i\frac{x^2-x'^2}{2t}\right) + \\
&+ \alpha\left\{\frac{1}{\sqrt{-2\pi i t}}\int_0^{\infty} dz\, M_1\left(|x|+z,\alpha,t\right)\left(\frac{x'}{2t}\sin\frac{x'z}{2t} - \frac{z}{2t}\cos\frac{x'z}{2t}\right)\times\right. \\
&\times\exp\left(\frac{ix'^2}{2t}+\frac{iz^2}{2t}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}}\int_0^{\infty} dz\, M_1^*\left(|x'|+z,\alpha,t\right)\times \\
&\left.\times\left(\frac{x}{2t}\sin\frac{xz}{2t} - \frac{z}{2t}\cos\frac{xz}{2t}\right)\exp\left(-\frac{ix^2}{2t}-\frac{iz^2}{2t}\right)\right\}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

В выражениях (6) и (7) члены пропорциональные α описывают отличие от аналогичных выражений для свободного движения частиц. Отметим также, что любые функции $\hat{p}_0$ и $\hat{x}_0$ тоже являются интегралами движения. С другой стороны, любые другие интегралы движения, например $E = p^2/2 + \alpha\delta(x)$, могут быть выражены через $\hat{p}_0$ и $\hat{x}_0$.

3. В случае двух разбегающихся дельта-ям система собственных решений состоит из двух «связанных» состояний — состояний, описывающихся экспоненциально убывающими функциями, и состояний, имеющих осциллирующую асимптотику.

Как в работе [19], будем искать убывающие симметричное и антисимметричное по x решения уравнения

$$
\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\left[\delta(x-vt)+\delta(x+vt)\right]\right\}\Psi(x,t) = 0. \qquad (8)
$$

Для симметричного решения положим

$$
\begin{aligned}
\Psi^{(+)} &= \exp\left(i\frac{v^2 t}{3}\right)\sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(+)}\left\{\exp\left[iv(x-vt)-(\alpha+2ivs)|x-vt|\right] + \right. \\
&\left. + \exp\left[-iv(x+vt)-(\alpha+2ivs)|x+vt|\right]\right\}\exp\left[\frac{it}{2}(\alpha+2ivs)^2\right]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Если выражение (9) удовлетворяет уравнению (8), то $C_s^{(+)}$ могут быть представлены в виде

$$
C_s^{(+)} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\alpha}{2iv}\right)^s\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(\frac{i\alpha}{2v}\right).
$$

При этом в случае $v \to 0$ решение (8) переходит в решение уравнения

$$
\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha\delta(x)\right]\Psi(x,t) = 0,
$$

соответствующее связанному состоянию (см. [15]).

Для антисимметричного по x решения

$$\Psi^{(-)} = \exp\left(i\frac{v^2t}{2}\right)\sum_s C_s^{(-)}\left\{\exp\left[iv(x-vt)-(\alpha+2ivs)|x-vt|\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-iv(x+vt)-(\alpha+2ivs)|x+vt|\right]\right\}\exp\left[\frac{it}{2}(\alpha+2ivs)^2\right], \qquad (10)$$

$$C_s^{(-)} = \frac{1}{s!}\left(-\frac{\alpha}{2iv}\right)^s\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(-\frac{i\alpha}{2v}\right).$$

Выражения $C_s^{(+)}$ и $C_s^{(-)}$ только множителями $\exp(i\alpha/2v)$ и $\exp(-i\alpha/2v)$ отличаются от соответствующих выражений в [19].

Эти множители (не влияющие на вероятности процессов перезарядки, вычисленные в [19]) введены для того, чтобы обеспечить возможность плавного перехода к случаю $v \to 0$.

При $t = 0$ ряды для $\Psi^{(\pm)}$ легко суммируются как ряды для экспонент:

$$\Psi^{(+)}\Big|_{t=0} = \sum_s \frac{1}{s!}\left(\frac{\alpha}{2iv}\right)^s\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(\frac{i\alpha}{2v}\right)\left[\exp\left(ivx-\alpha|x|-2ivs|x|\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-ivx-\alpha|x|-2ivs|x|\right)\right] = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(\frac{i\alpha}{2v}\right)\exp(-\alpha|x|)\times$$
$$\times 2\cos(vx)\exp\left[\frac{\alpha}{2iv}\exp\left(-2iv|x|\right)\right], \qquad (11)$$

$$\Psi^{(-)}\Big|_{t=0} = 2i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(-\frac{i\alpha}{2v}\right)\exp\left(-\alpha|x|\right)\sin(vx)\exp\left[-\frac{\alpha}{2iv}\exp\left(-2iv|x|\right)\right]. \qquad (12)$$

Выражения (11) и (12) показывают, что существенная особенность при $v \to 0$ исчезает после введения множителей $\exp(\pm i\alpha/2v)$.

Для непрерывного спектра, характеризующегося осцилляционной асимптотикой, соответствующей свободному движению с импульсом k, представим, как в [13], ψ-функцию в виде суммы:

$$\psi_k = \tilde{\psi}_k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ik^2t}{2}+ikx\right), \qquad (13)$$

причем далее будем отдельно вычислять симметричную по x и антисимметричную части:

$$\psi_k^{(+)} = \tilde{\psi}_k^{(+)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ik^2t}{2}\right)\cos(kx),$$
$$\psi_k^{(-)} = \tilde{\psi}_k^{(-)} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{ik^2t}{2}\right)\sin(kx). \qquad (14)$$

Функции $\tilde{\psi}_k^{(\pm)}$, так же, как в работе [15], можно искать в виде сумм

$$\tilde{\psi}_k^{(\pm)} = \exp\left(\frac{iv^2t}{2}\right)\sum_s C_s^{(\pm)}\left[\exp(ivx)\varphi_s(z_-t) \pm \exp(-ivx)\varphi_s(z_+t)\right], \qquad (15)$$

где

$$\varphi_s(z,t) = \exp\left(-a_s z + \frac{i a_s^2 t}{2}\right), \quad z_- = |x - vt|, \quad z_+ = |x + vt|.$$

Для коэффициентов $C_s^{\pm}$ получим систему

$$\sum_s C_s^{(\pm)} \left\{(\alpha - a_s)\exp\left(i\frac{a_s^2 t}{2}\right) \pm \alpha \exp\left[\frac{it}{2}(a_s + 2iv)^2\right]\right\} =$$
$$\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \left\{\exp\left[-\frac{it}{2}(k-v)^2\right] \pm \exp\left[-\frac{it}{2}(k+v)^2\right]\right\}.$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\sum_s \left\{C_s^{(\pm)}(\alpha - a_s)\exp\left(i\frac{a_s^2 t}{2}\right) \pm \alpha C_{s-1}^{(\pm)} \exp\left[\frac{it}{2}(a_{s-1} + 2iv)^2\right]\right\} =$$
$$= -\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \left\{\exp\left[-\frac{it}{2}(k-v)^2\right] \pm \exp\left[-\frac{it}{2}(k+v)^2\right]\right\}. \quad (16)$$

Для определения коэффициентов $C_s^{(\pm)}$ положим $a_s = i\left[-|k| + v(2s-1)\right]$, $a_0 = -i\times$ $\times(|k| + v)$, $a_1 = -i(|k| - v)$, $C_{-1}^{(\pm)} = 0$. Тогда

$$C_0^{(\pm)} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha - a_0}, \quad C_1^{(+)} = -\frac{\alpha a_0}{2\sqrt{2\pi}(\alpha + a_0)},$$

при $s > 1$

$$C_s^{(+)}(\alpha - a_s) + \alpha C_{s-1}^{(+)} = 0,$$

$$C_s^{(+)}\big|_{s\geq 1} = -\frac{a_0}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2iv} \left(\frac{\alpha}{2iv}\right)^s \frac{\Gamma(-\xi)}{\Gamma(s - \xi + 1)}, \quad (17)$$

где

$$\xi = \frac{\alpha}{2iv} + \frac{k}{2iv} + \frac{1}{2iv} = \frac{\alpha - a_0}{2iv}.$$

Коэффициенты $C_s^{(-)}$ антисимметричного решения определяются соотношением

$$C_s^{(-)} = (-1)^s C_s^{(+)}, \quad (18)$$

при предельном переходе $v \to 0$ можно получить решения для одного δ-центра, характеризующегося константой 2α. При $\nabla = 0$

$$C_s^{(+)}\big|_{s\geq 1} = -\frac{a_0}{2\sqrt{2\pi}} \frac{(-\alpha)^s}{(\alpha + i|k|)^{s+1}}, \quad C_0^{(\pm)} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha + i|k|},$$

и ряд $\psi_k^{(+)}$ легко суммируется:

$$\tilde{\psi}_k^{(+)} = \frac{2i\alpha\cos(|k|x)}{i|k| + 2\alpha} \exp\left(-\frac{ik^2 t}{2}\right).$$

Для $k < 0$ функция $\psi_k^{(+)}$ не изменяется ($\tilde{\psi}_k^{(+)} = \tilde{\psi}_{-k}^{(+)}$), тогда как $\tilde{\psi}_k^{(-)}$ изменяет знак ($\tilde{\psi}_k^{(-)} = -\tilde{\psi}_{-k}^{(-)}$).

Система собственных функций, определяемая равенствами (9), (10), (14), по-видимому, образует полную систему.

4. Изучим обобщение уравнения (8) — разбегающиеся дельта-центры, характеризующиеся разной глубиной единственного связанного состояния:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\delta(x - vt) + \beta\delta(x + vt)\right]\Psi = 0. \tag{19}$$

При этом рассмотрим «связанное» состояние нестационарной системы, соответствующее экспоненциально убывающей в пространстве асимптотике.

Решение аналогично тому, как сделано в [15, 19], представим в виде

$$\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{iv^2t}{2}\right)\sum_s \left[C_s^{(1)}\varphi_s(z_-,t)\exp(ivx) + C_s^{(2)}\chi_s(z_+,t)\exp(-ivx)\right]. \tag{20}$$

Здесь $z_\mp = |x \mp vt|$, функции φ_s, χ_s удовлетворяют уравнениям

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi_s(z,t) = 0, \quad \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\chi_s(z,t) = 0.$$

Подстановка (20) в уравнение (19) приводит к соотношениям

$$\begin{gathered}\sum_s \left\{C_s^{(1)}\left[\alpha\varphi_s(0,t) + \left.\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\right|_{z=0}\right] + \alpha C_s^{(2)}\chi_s(2vt,t)\exp(-2iv^2t)\right\} = 0,\\ \sum_s \left\{\beta C_s^{(1)}\varphi_s(2vt,t)\exp(-2iv^2t) + C_s^{(2)}\left[\beta\chi_s(0,t) + \left.\frac{\partial\chi_s}{\partial t}\right|_{z=0}\right]\right\} = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Уравнения для φ_s и χ_s имеют решения вида

$$\varphi_s = \exp\left(-a_s z + \frac{ia_s^2 t}{2}\right), \quad \chi_s = \exp\left(-b_s z + \frac{ib_s^2 t}{2}\right),$$

что позволяет преобразовать систему (21) для коэффициентов $C_s^{(1,2)}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_s \left\{C_s^{(1)}(\alpha - a_s)\exp\left(i\frac{a_s^2 t}{2}\right) + \alpha C_{s-1}^{(2)}\exp\left[\frac{it}{2}(b_{s-1} + 2iv)^2\right]\right\} = 0,\\ \sum_s \left\{\beta C_{s-1}^{(1)}\exp\left[\frac{it}{2}(a_{s-1} + 2iv)^2\right] + (\beta - b_s)C_s^{(2)}\exp\left(\frac{ib_s^2 t}{2}\right)\right\} = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

При переходе от (21) к (22) во втором слагаемом первого уравнения и в первом члене второго индекс суммирования s заменен на $s - 1$.

Поскольку уравнения (22) выполняются при любых значениях t, должны быть выполнены равенства

$$a_s = b_{s-1} + 2iv, \quad b_s = a_{s-1} + 2iv.$$

Кроме того,

$$C_s^{(1)}(\alpha - a_s) + \alpha C_{s-1}^{(2)} = 0,$$
$$\beta C_{s-1}^{(1)} + (\beta - b_s)C_s^{(2)} = 0. \quad (23)$$

Положим $C_{-1}^{(1)} = C_{-1}^{(2)} = 0$, тогда $a_0 = \alpha$, $b_0 = \beta$. Константы $C_0^{(1)} = A$ и $C_0^{(2)} = B$ не определяются уравнениями (23). Из рекуррентных соотношений для a_s и b_s можно получить

$$a_1 = \beta + 2iv, \quad b_1 = \alpha + 2iv,$$
$$a_{2s+1} = \beta + 2iv(2s+1), \quad b_{2s+1} = \alpha + 2iv(2s+1), \quad (24)$$
$$a_{2s} = \alpha + 2iv \cdot 2s, \quad b_{2s} = \beta + 2iv \cdot 2s.$$

Из (23) также следует

$$C_1^{(1)} = -\frac{\alpha B}{\alpha - \beta - 2iv}, \quad C_1^{(2)} = -\frac{\beta A}{\beta - \alpha - 2iv}.$$

Рекуррентным соотношениям (23), а также начальным значениям $C_{0,1}^{(1,2)}$ удовлетворяют следующие выражения:

$$C_{2l}^{(1)} = \left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2}\right)^l \frac{A}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(1/2 + (\alpha-\beta)/4iv)}{\Gamma(1/2 + l + (\alpha-\beta)/4iv)},$$
$$C_{2l+1}^{(1)} = \frac{\alpha}{4iv}\left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2}\right)^l \frac{B}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(1/2 - (\alpha-\beta)/4iv)}{\Gamma(3/2 + l - (\alpha-\beta)/4iv)},$$
$$C_{2l}^{(2)} = \left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2}\right)^l \frac{B}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(1/2 - (\alpha-\beta)/4iv)}{\Gamma(1/2 + l - (\alpha-\beta)/4iv)}, \quad (25)$$
$$C_{2l+1}^{(2)} = \frac{\beta}{4iv}\left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2}\right)^l \frac{A}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(1/2 + (\alpha-\beta)/4iv)}{\Gamma(3/2 + l + (\alpha-\beta)/4iv)}.$$

Ряд (20) для искомой функции распределения $\Psi(x,t)$ является сходящимся при любых значениях констант α, β, x и при любых x, t. Отметим здесь, что при $\alpha = \beta$, используя формулы удвоения для Γ-функции, можно получить те же выражения для Ψ, что и в работе [15].

Более сложным, однако, при $\alpha \neq \beta$ является определение констант A и B. Эти константы зависят от параметров α, β, v и должны определяться из условия плавного перехода к случаю $v = 0$, когда

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}} \exp\left[-(\alpha+\beta)|x| - \frac{i(\alpha+\beta)^2}{2}t\right].$$

Следует также заметить, что явные выражения для ψ-функций в нестационарном случае могут быть использованы для определения вероятностей изменения зарядового состояния атомных частиц, как это сделано для случая $\alpha = \beta$ в работе [19].

Литература

1. K. Husimi, Progr. Theor. Phys. **9**, 381 (1953).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 728 (1953).
3. R. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
4. В. П. Ермаков, Унив. Изв. (Унив. Св. Владимира, Киев) **XX**(9), 1 (1880).
5. H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1966).
6. H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
7. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, D. A. Trifonov, Phys. Rev. D **2**, 1371 (1970).
8. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, Phys. Lett. D **32**, 243 (1970).
9. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, D. A. Trifonov, J. Math. Phys. **14**, 576 (1973).
10. И. А. Малкин, В. И. Манько, ЖЭТФ **31**, 386 (1970).
11. C. Groshe, Phys. Lett. A **182**, 28 (1993); Ann. Phys. **2**, 557 (1993).
12. M. Moshinsky, Amer. J. Phys. **44**, 1037 (1976).
13. W. Damert, Amer. J. Phys. **43**, 531 (1975).
14. V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, D. E. Nikonov, Phys. Lett. A **162**, 359 (1992).
15. С. К. Жданов, А. С. Чихачев, ДАН СССР **218**, 1323 (1974).
16. А. С. Чихачев, ЖЭТФ **107**, 1153 (1995).
17. H. M. Nussenzweig, in *Symmetries in Physics (Proc. of the I Intern. Symp. Held in Honor of Prof. M. Moshinsky, Mexico, 1991)*, ed. by A. Frank, K. B. Wolf, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).
18. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).
19. W. Dappen, J. Phys. B **10**, 2399 (1977).