

ОСОБЕННОСТИ СЕЛЕКТИВНОГО ОТРАЖЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ВОЗБУЖДЕННЫХ СРЕД

Б. А. Векленко, Р. Б. Гусаров, Ю. Б. Шеркунов

*Московский энергетический институт
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 1997 г.

Сечение рассеяния резонансного излучения на коллективе возбужденных атомов согласно квантовой электродинамике можно представить в виде суммы положительно определенных слагаемых. Такая структура не согласуется с формулами Френеля для коэффициента отражения излучения от термически возбужденных сред. Различие проявляется на макроскопическом уровне и свидетельствует о невозможности использования полуклассической теории излучения. Исследование корреляции процессов упругого рассеяния и вынужденного излучения проясняет причину расхождений. Возникшие при этом сингулярности требуют суммирования диаграмм Фейнмана, появляющихся начиная с шестого порядка теории возмущений. Дана оценка снизу для коэффициента отражения от плоского слоя с учетом процессов, нарушающих статистику излучения. Конкретно рассмотрен вклад процессов вынужденного излучения, вызываемого предварительно рассеянным квантом. Предлагается эксперимент, определяющий выбор теорий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение кинетики сильных электромагнитных полей в веществе потребовало обобщения стандартной теории переноса резонансного излучения [1–3] на возбужденные среды. Такое обобщение выполнено в ряде работ [4–10]. Наиболее общие результаты достигнуты на базе метода квантовых кинетических функций Грина [9–11]. Но если для однородных или квазиоднородных сред такое обобщение вполне приемлемо, то при неоднородностях, влекущих за собой эффекты отражения, или при учете границ области диффузии излучения возникают новые неучтенные физические явления [12, 13]. Дело в том, что при выводе замкнутых уравнений в стандартной технике квантовых функций Грина требуется разрыв корреляторов фотон–фотон, что ставит под сомнение корректный учет вынужденных процессов излучения. Пусть $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ — оператор уничтожения фотона в моде, определенной волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией λ . Речь идет о корректном учете корреляторов $\langle \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$, в которых все индексы (\mathbf{k}, λ) одинаковы. В стандартной технике одночастичных функций Грина такими корреляторами пренебрегают, ссылаясь на малость их статистического веса [14]. В случае термодинамического равновесия в термодинамическом пределе можно показать, что такое пренебрежение оправдано [14]. При расчете кинетических явлений надо иметь в виду, что описание каждого акта вынужденного излучения вследствие резонансности процесса влечет за собой появления δ -функции Дирака. Таким образом, указанные члены оказываются сингулярными, и пренебрежение ими становится проблематичным. Проблематичным по той же причине оказывается использование теории возмущений в целом.

Необходимость корректного учета корреляторов фотон–фотон отчетливо проявляется в явлениях селективного отражения резонансного излучения от границы разде-

ла вакуум–возбужденная среда. Такая граница может рассматриваться как предельный случай пространственной неоднородности. Процессы селективного отражения резонансного излучения от возбужденных сред неоднократно изучались ранее как экспериментальными [15–18], так и теоретическими [18–24] методами. Несмотря на оптимизм, высказанный в [18], согласие между теорией и экспериментом и даже между различными теоретическими расчетами отсутствует. В большинстве работ расчеты выполнены на базе полуклассической теории излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. В таком случае для коэффициента отражения R в отсутствие инверсной заселенности среды возникают формулы Френеля. При малых концентрациях рассеивающих частиц при этом коэффициент R , определяемый показателем преломления среды, пропорционален [25] квадрату разности концентраций рассеивателей в основном и в возбужденном состояниях, $R \propto (n_1 - n_2)^2$. Такой же результат следует из квантовой электродинамики при разрыве корреляторов фотон–фотон. В работе [12] показано, что корректный квантовоэлектродинамический учет указанных выше корреляторов для резонансного излучения меняет результат кардинальным образом. Оказывается, что коэффициент отражения не может быть выражен через показатель преломления среды и его оценка снизу пропорциональна квадрату полной концентрации рассеивающих атомов, $R \propto (n_1 + n_2)^2$.

В настоящей работе мы ставим цель на основе исследования элементарных актов рассеяния и вынужденного излучения, а также корреляции между ними вскрыть механизм возникновения столь необычных на первый взгляд закономерностей. Мы ставим цель прояснить структуру сингулярных членов и указать причину недопустимости использования теории возмущений. Таким образом, речь идет о специфических свойствах диффузии резонансного излучения в возбужденных средах. Математическая проблема заключается в том, как суммировать бесконечные ряды. Совершенно ясно, что в стационарных условиях рассеяние резонансного излучения по теории возмущений изучать нельзя. Обычно в согласии с теорией Вайскопфа–Вигнера [26] считается, что учет конечной ширины энергетических уровней атомов снимает проблему. Ниже объясняется, почему такая процедура суммирования диаграмм Фейнмана в теории переноса резонансного излучения в возбужденных средах не является достаточной, и указывается еще одна непротиворечивая процедура суммирования диаграмм.

2. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ

Некоторые свойства коэффициента отражения R можно получить из общих соображений. Обозначим через φ_i собственные функции атомов отражающей среды. Рассмотрим стационарный процесс рассеяния. Примем во внимание адиабатическую гипотезу [27] и предположим, что до рассеяния атомы находились в состоянии φ_0 . Полная волновая функция среды и электромагнитного поля Ψ может быть разложена в ряд по φ_i :

$$\Psi = f_0\varphi_0 + \sum_{i \neq 0} f_i\varphi_i. \quad (1)$$

Если нас интересует матрица плотности электромагнитного поля ρ , то из (1) следует образовать билинейную конструкцию, которую, в свою очередь, надлежит просуммировать по аргументам атомов среды. Найдем

$$\rho = \rho^{(c)} + \rho^{(n)},$$

где

$$\rho^{(c)} = \text{Sp}_a f_0 f_0^*, \quad \rho^{(n)} = \text{Sp}_a \sum_{i \neq 0} f_i f_i^*. \quad (2)$$

Матрица $\rho^{(c)}$ описывает рассеянное поле при условии, что атомы среды не изменяют своего состояния (когерентный канал рассеяния). Матрица $\rho^{(n)}$ отвечает за процессы рассеяния, при которых первоначальное состояние атомов среды изменяется (некогерентный канал). В некогерентном канале содержатся процессы спонтанного излучения, комбинационное рассеяние, а также процессы вынужденного излучения атомов. Обращаем внимание на то, что процессы вынужденного излучения и когерентного рассеяния в последовательной квантовой теории описываются разными каналами. Поскольку разным каналам отвечают разные волновые функции конечных состояний, они между собой не интерферируют.

Пусть нас интересует возникшие в результате рассеяния средние числа заполнения фотонов в моде (\mathbf{k}, λ) :

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \text{Sp}_{ph} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rho.$$

Здесь суммирование осуществляется по аргументам фотонного поля и

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Согласно выражению (2), имеем

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} + \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)},$$

причем

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} = \text{Sp}_{ph} \text{Sp}_a |\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} f_0|^2 > 0,$$

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} = \text{Sp}_{ph} \text{Sp}_a \sum_{i \neq 0} |\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} f_i|^2 > 0.$$

В работе [24] исследован когерентный канал отражения фотонов от границы раздела сред, показано, что $\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} \sim (n_1 + n_2)^2$, и сделано заключение о том, что это — оценка снизу для R , так как $\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} > 0$. Такое утверждение согласуется с проведенным выше анализом, но противоречит полуклассической теории излучения. Далее, разложим коэффициенты f_i по собственным функциям оператора числа фотонов $\hat{N}_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$f_i = \sum_N f_{iN} |N\rangle.$$

Теперь очевидно, что

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} = \text{Sp}_{ph} \text{Sp}_a \sum_{iN} N |f_{iN}|^2 > 0. \quad (3)$$

Таким образом, вклад в R некогерентного канала может быть представлен в виде разложения по числу рассеянных квантов, что аналогично разложению в методе Тамма–Данкова [28]. Обращаем внимание на тот факт, что все члены разложения (3) обязаны быть положительными.

3. РАССЕЯНИЕ СВЕТА ДВУМЯ АТОМАМИ

Проанализируем ситуацию с точки зрения теории возмущений. Рассмотрим процесс резонансного рассеяния на двух атомах. Пусть невозбужденный атом расположен в точке \mathbf{R}_1 , а возбужденный в \mathbf{R}_2 . Разумеется, в стационарных условиях основанная на \hat{S} -матрице теория возмущений здесь неприменима. Поступим следующим образом. Будем следить за членами $\pm i0$ в резонансных знаменателях, появляющимися из-за адиабатической гипотезы. Замена этих членов на конечные выражения при учете энергетических ширин γ атомов устраняет резонансные расходимости. Такая замена происходит без изменения знаков перед $i0$, что вызвало бы нарушение принципа причинности. Таким образом, члены $i0$ позволяют предвидеть общую структуру результата в более полной теории.

Итак, пусть два атома с одним валентным электроном каждый взаимодействуют с когерентной квантованной электромагнитной волной. Взаимодействие считается квазирезонансным, $|k - \omega_{21}| \ll k + \omega_{21}$, что позволяет пренебречь квадратом векторного потенциала в полном гамильтониане системы. Через ω_{21} мы обозначаем частоту резонансного перехода в атомах, $\hbar = c = 1$. В представлении вторичного квантования гамильтониан системы примем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}',$$

$$\hat{H}^0 = \sum_j \varepsilon'_j \hat{b}_j^+ \hat{b}_j + \sum_j \varepsilon_j \hat{\beta}_j^+ \hat{\beta}_j + \sum_{\mathbf{k}\lambda} k \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\hat{H}' = -\frac{e}{m} \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{e}{m} \int \hat{\varphi}^+(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\varphi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Здесь ε'_j и ε_j — разрешенные значения энергии первого и второго атомов, \hat{b}_j (\hat{b}_j^+) и $\hat{\beta}_j$ ($\hat{\beta}_j^+$) — операторы уничтожения (рождения) соответствующих этим энергетическим уровням состояний валентных электронов. Спиновыми и обменными эффектами пренебрегаем. В этих условиях для простоты все операторы можно считать принадлежащими к бозе-типу. Полевым операторам первого и второго атомов отвечают выражения

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \hat{b}_j, \quad \hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \hat{\beta}_j,$$

где ψ_j и φ_j — волновые функции электронных состояний в атомах. Оператор электромагнитного поля равен

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\lambda}{\sqrt{2kV}} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right),$$

здесь $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\lambda$ — орты линейной поляризации, $V = L_x L_y L_z$ — объем квантования.

В представлении Шредингера волновое уравнение системы имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}^0 + \hat{H}' \right) \Psi.$$

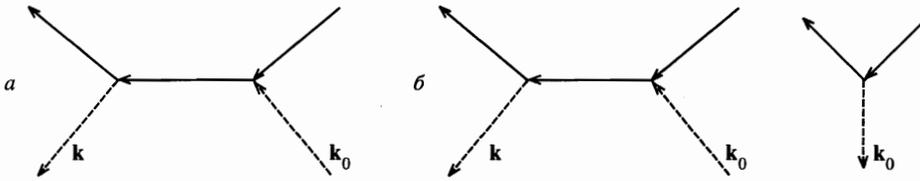


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы для когерентного (а) и некогерентного (б) каналов рассеяния

Переход к представлению взаимодействия осуществляется стандартным образом с помощью оператора $\exp(i\hat{H}^0 t)$. Теперь

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}' \Psi$$

и

$$\Psi(t) = \hat{S}(t, -\infty) \Psi^0, \quad \hat{S}(t, -\infty) = \hat{T} \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^t \hat{H}'(t) dt \right\}.$$

Для предварительного анализа ограничимся третьим порядком теории возмущений:

$$\hat{S} = 1 + \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} + \hat{S}^{(3)}.$$

Операторы $\hat{S}^{(1)}$ и $\hat{S}^{(3)}$ могут появиться лишь при описании некогерентного канала рассеяния. Если исключить процессы комбинационного рассеяния и двухфотонные процессы поглощения (излучения), то оператор $\hat{S}^{(2)}$ будет описывать лишь когерентные процессы рассеяния. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle &= \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} + \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)}, \\ \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} &= \langle \hat{S}^{(2)} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{S}^{(2)} \rangle, \\ \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} &= \langle \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(3)} | \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} | \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(3)} \rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Усреднение осуществляется по начальному состоянию системы. Как и следовало ожидать, оба члена правой части первого из выражений (4) положительно определены.

Начнем с когерентного канала. Опускаем подробности стандартной процедуры расчетов. Отметим лишь, что возникшей согласно фейнмановской диаграмме (рис. 1а) связке атомных операторов отвечает следующее аналитическое выражение:

$$\overline{\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}', t')} = i \sum_j \int \exp[-iE(t-t')] \frac{\psi_j(\mathbf{r}) \psi_j^*(\mathbf{r}')}{E - \varepsilon_j + i0} \frac{dE}{2\pi}.$$

Аналогичное выражение отвечает связке операторов $\hat{\phi}$ и $\hat{\phi}^+$. Именно знак «+» перед $i0$ оказывается в окончательном результате, который имеет вид

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} &= 4\pi^2 \left| \frac{P_{21}^\lambda(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \left| \frac{P_{21}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0V}} \right|^2 \delta^2(k - k_0) \times \\ &\times \left| \frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{R}_1]}{k - \omega_{21} + i0} + \frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{R}_2]}{\omega_{21} - k + i0} \right|^2 N_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Мы ограничились двухуровневым приближением для атомов, которые считаются тождественными в структурном отношении,

$$P_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{e}{m} \int \psi_i^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}_e \mathbf{k}^{\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

N_0 — число фотонов в рассеиваемой моде.

Наличие в ответе δ^2 не должно смущать, поскольку такая зависимость для квантовой электродинамики типична и дает возможность вычислять вероятности процессов в единицу времени. Обратим внимание на характерную особенность формулы (5). Для нерезонансных частот ($k_0 \neq \omega_{21}$) здесь появляется член $\sin^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$. Для резонансных частот ($k_0 = \omega_{21}$) зависимость оказывается иной, и появляется множитель $\cos^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$. Ниже нас будет интересовать коэффициент отражения излучения от границы раздела. Лучу, отраженному в зеркальном направлении, отвечает геометрия, при которой $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \perp (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$. Теперь очевидно, что для нерезонансных частот в соответствии с (5) возникает нулевой результат, что для френелевского отражения от возбужденной среды соответствует зависимости

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(e)} \sim (n_1 - n_2)^2 N_0, \quad k_0 \neq \omega_{21}. \quad (6)$$

Для резонансных частот вместо формулы (6) по той же причине оказывается

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(e)} \sim (n_1 + n_2)^2 N_0, \quad k_0 = \omega_{21}. \quad (7)$$

Полный анализ до исследования некогерентного канала рассеяния проводить рано. Но поскольку когерентный канал рассеяния определяет оценку снизу для коэффициента отражения, а формула (7) показывает наличие отраженного луча даже для оптически насыщенной среды ($n_1 = n_2$), то нарушение формулы Френеля налицо. Таким образом, расчет отражения резонансного излучения от возбужденных сред с помощью полуклассической теории излучения, приводящей к формулам Френеля, невозможен.

Займемся некогерентным каналом. Член $\langle \hat{S}^{(1)} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{S}^{(1)} \rangle$ нас не интересует, так как описывает поглощение или спонтанное излучение атомов. Теперь, согласно (4), в низшем порядке теории возмущений предстоит вычислить $\hat{S}^{(3)}$. Процессу рассеяния, содержащему отвечающую за селективное отражение интерференционную компоненту, соответствует диаграмма Фейнмана на рис. 1б. Ее вклад в $\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)}$ оказывается равным

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} &= \langle \hat{S}^{(1)} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{S}^{(3)} \rangle + \text{с.с.} = 8\pi^3 i \left| \frac{P_{21}^{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \times \\ &\times \left| \frac{P_{21}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0V}} \right|^2 \frac{\delta^2(k - k_0)\delta(\omega_{21} - k)}{k - \omega_{21} - i0} \exp[-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)] + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (8)$$

Этот результат примечателен во многих отношениях. Прежде всего, его сумма с когерентным каналом дает

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(e)} + \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} &= 4\pi^2 \left| \frac{P_{21}^{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \left| \frac{P_{21}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0V}} \right|^2 \times \\ &\times \left| \frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{R}_1]}{k - \omega_{21} + i0} + \frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{R}_2]}{\omega_{21} - k - i0} \right|^2 N_0 \delta^2(k - k_0), \end{aligned} \quad (9)$$

что отличается от формулы (5) всего лишь знаком перед $i0$ во втором члене. Такое различие имеет решающее значение. Прежде всего, формула (9) представляет полный результат в четвертом порядке теории возмущений. При использовании в расчетах представления Гейзенберга такой результат возникает немедленно, поскольку там нет деления на когерентный и некогерентный каналы. Этот же результат следует из полуклассической теории рассеяния. Согласно формуле (9), рассеяние в направлении вектора \mathbf{k} , отвечающего условию $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \perp (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$, отсутствует всегда. Отсюда следует вывод, что соотношение (6), а вместе с ним формулы Френеля справедливы для любых частот k_0 . Такой вывод противоречит проведенному выше анализу. Ошибочной оказывается формула (8), ведущая для резонансных частот к оценке

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} \sim -\cos [(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] < 0,$$

что противоречит положительной определенности некогерентного канала рассеяния. Вместе с формулой (8), таким образом, ошибочной оказывается и формула (9), найденная в низшем порядке теории рассеяния. Не спасает положения и учет конечной ширины энергетических уровней, не изменяющий знака $\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)}$.

Положительная определенность некогерентного канала восстанавливается, если в обеих функциях скалярного произведения в (4) учесть одинаковые члены разложения \hat{S} -матрицы. Это означает, что последовательный учет $\hat{S}^{(3)}$ требует в (4) учета членов шестого порядка теории возмущений. В свою очередь, отсюда следует, что члены шестого порядка по модулю превосходят результат четвертого порядка и содержат сингулярности, что влечет за собой неприменимость теории возмущений в целом. Учет конечных значений γ не спасает положения. Следовательно, при конечных γ члены шестого порядка продолжают содержать сингулярности для устранения которых требуется суммирование бесконечных подпоследовательностей диаграмм Фейнмана. Выход за рамки четвертого порядка теории возмущений необходим. При этом уже шестой порядок теории возмущений привносит качественно новые явления. Изучение вклада шестого порядка теории возмущений естественно начать с анализа процессов, поставляющих один фотон в рассеянную моду. При этом мы сталкиваемся с квадратом того же элемента $\hat{S}^{(3)}$, которому отвечают диаграммы Фейнмана на рис. 1б. Итог оказывается нелинейным по N_0 . Такие процессы рассматривать не будем. Среди процессов, поставляющих 2 фотона в рассеянную моду в шестом порядке теории возмущений оказываются процессы вынужденного излучения возбужденного атома, провоцируемые фотонами, предварительно рассеянными на другом атоме. Эта связка процессов линейна по N_0 . Учет этой связки, отвечающей в формуле (3) членам типа $|f_{i2}|^2$, наряду с учетом когерентного канала лишь улучшает оценку снизу общего результата для R . Физика таких процессов существенна при прогнозировании результатов отражения от инверсно заселенных сред.

Ниже рассматривается отражение света от среды плоскопараллельной конфигурации. При этом учитывается когерентный канал рассеяния и указанные выше процессы двухфотонного отражения. Для расчета двухфотонного отражения суммируются бесконечные подпоследовательности диаграмм Фейнмана.

4. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДОЙ

Будем считать, что полупространство $z > 0$ заполнено атомарным газом, состоящим из атомов с одним валентным электроном. На границу раздела падает излучение, находящееся в моде $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$. Уравнение Шредингера примем в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\hat{H}_a + \hat{H}_{ph} - \frac{e}{m} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{r} d\mathbf{R} \right] \Psi,$$

где

$$\hat{H}_a = \sum_{i\mathbf{p}} \varepsilon_i(p) \hat{b}_{i\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{i\mathbf{p}}, \quad \varepsilon_i(p) = \frac{p^2}{2M} + \varepsilon_i,$$

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} k \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

ε_i — энергия атома, находящегося в i -м энергетическом состоянии, \mathbf{p} и M — его импульс и масса. Через $\hat{b}_{i\mathbf{p}}$ ($\hat{b}_{i\mathbf{p}}^\dagger$) обозначены бозевские операторы уничтожения (рождения) атома в состоянии (i, \mathbf{p}) . Газ считается температурно-невырожденным. Далее

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{i\mathbf{p}} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}}}{\sqrt{V}} \hat{b}_{i\mathbf{p}},$$

где $\psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ — волновая функция i -го состояния атома.

Для расчета коэффициента отражения воспользуемся методом Γ -операторов [24], позволяющим разделить когерентный и некогерентный каналы рассеяния. Совокупность чисел заполнения свободного электромагнитного поля обозначим посредством вектора $\mathbf{N} = \dots, N_{\mathbf{k}\lambda}, \dots$. В пространстве чисел заполнения этому состоянию отвечает волновая функция, которая может быть представлена в виде

$$\Phi^0(\mathbf{N}|\zeta) = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \varphi(N_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}), \tag{10}$$

где $\varphi(N|\zeta)$ — волновая функция квантового осциллятора. Искомое Γ -пространство строится следующим образом. Введем в него порождающий вектор $|\rangle_\Gamma^0$ — математический вакуум. Пусть $\hat{\mathfrak{A}}(\mathbf{N})$ ($\hat{\mathfrak{A}}^\dagger(\mathbf{N})$) — оператор уничтожения (рождения) коллектива невзаимодействующих фотонов с набором чисел заполнения \mathbf{N} и $|\rangle_\Gamma^0$ — волновая функция такого состояния. Эти волновые функции образуют полный базис для разложения любой волновой функции, описывающей физические состояния. Между введенными таким образом базисными волновыми функциями и функциями (10) существует унитарное преобразование [24]. Пусть

$$\hat{\Phi}(\zeta) = \sum_{\mathbf{N}} \hat{\mathfrak{A}}(\mathbf{N}) \Phi^0(\mathbf{N}|\zeta).$$

Унитарная связь между стандартным пространством чисел заполнения и Γ -пространством осуществляет унитарный оператор [24]

$$\hat{O} = \hat{\Phi}^+|_\Gamma^0, \quad \Psi_\Gamma = \hat{O}\Psi.$$

В Γ -пространстве уравнение Шредингера приобретает вид

$$i \frac{\partial \Psi_\Gamma}{\partial t} = \left[\hat{H}_a + \sum_N \varepsilon(N) \hat{\mathbf{U}}^+(N) \hat{\mathbf{U}}(N) - \frac{e}{m} \int \hat{\Phi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\psi} \hat{\Phi} d\mathbf{r} d\mathbf{R} d\zeta \right] \Psi_\Gamma,$$

где

$$\varepsilon(N) = \sum_{k\lambda} k \left(N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad d\zeta = \prod_{k\lambda} d\zeta_{k\lambda}.$$

Среднее значение любого оператора \hat{K} электромагнитного поля может быть найдено по формуле

$$\langle K \rangle = \int \langle \hat{\Phi}^+(\zeta) \hat{K} \hat{\Phi}(\zeta) \rangle_\Gamma d\zeta,$$

где $\rangle_\Gamma = \Psi_\Gamma$. Таким образом, конструкция

$$\rho(\zeta, \zeta') = \langle \hat{\Phi}^+(\zeta') \hat{\Phi}(\zeta) \rangle_\Gamma$$

играет роль матрицы плотности электромагнитного поля в среде. Для ее расчета удобно воспользоваться в Γ -пространстве формализмом квантовых функций Грина [24] в форме, предложенной Келдышем [11]:

$$\mathcal{D}_{ll'}(\zeta, t, \zeta', t') = -i \langle \hat{T}_c \hat{\Phi}_l(\zeta, t) \hat{\Phi}_{l'}^+(\zeta', t') \rangle_\Gamma = -i \langle \hat{T}_c \hat{\Phi}_l(\zeta, t) \hat{\Phi}_{l'}^+(\zeta', t') \hat{S}_c \rangle_{0\Gamma}. \quad (11)$$

Здесь $\check{\Phi}$ — операторы поля в гейзенберговом представлении, $\bar{\Phi}$ — операторы поля в представлении взаимодействия в Γ -пространстве. Переход в (11) от одного представления к другому носит стандартный характер [24]. Индекс l описывает временной контур, исходящий ($l = 1$) из точки $t \rightarrow -\infty$, простирающийся до $t \rightarrow \infty$ и возвращающийся вновь ($l = 2$) к $t \rightarrow -\infty$, \hat{T}_c — хронологический оператор на этом контуре. Оператор \hat{S}_c имеет вид

$$\hat{S}_c = \hat{T}_c \exp \left\{ \sum_l (-1)^{l+1} \frac{ie}{m} \int \bar{\Phi}_l^+ \bar{\psi}_l^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_l \bar{\Phi}_l d\zeta d\mathbf{r} d\mathbf{R} dt \right\},$$

$$\bar{\psi} = \sum_{ip} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\hat{b}_{ip}}{\sqrt{V}} \exp[ip\mathbf{R} - i\varepsilon_i(p)t],$$

$$\bar{\Phi} = \sum_N \hat{\mathbf{U}}(N) \Phi^0(N|\zeta) \exp[-i\varepsilon(N)t].$$

В последнем члене равенства (11) усреднение проводится по начальному состоянию системы атом + поле до адиабатического включения взаимодействия между ними. В формуле (11) наряду с квантовым усреднением ниже будем подразумевать статистическое усреднение по ансамблю систем. Можно в (11) явно учесть взаимодействие атомов газа с резервуаром. Влияние резервуара через массовые операторы проявит себя в уширении энергетических уровней атомов. При этом знак мнимой части запаздывающего массового оператора определяется принципом причинности. Будем считать, что

атомный ансамбль до взаимодействия с излучением обладал гауссовским распределением. Это позволяет при упрощениях среднего произведения операторов ψ использовать термодинамический вариант теоремы Вика [14]. Упрощение произведения операторов $\hat{\Phi}$ может быть выполнено точно [24], что позволяет избежать разрыва корреляторов, составленных из этих операторов, и, тем самым, корректно учесть интересующие нас процессы вынужденного излучения. Диаграммная техника приводит к следующим результатам. Прежде всего, функция $\mathcal{D}_{ll'}$ обладает следующей структурой:

$$\mathcal{D}_{ll'} = \Delta_{ll'} - i\rho_{ll'}.$$

Для построения искомой матрицы плотности ρ достаточно знать лишь ρ_{12} , так как $\rho = i\mathcal{D}_{12}$ при $t = t'$. Для определения матриц $\Delta_{ll'}$ и $\rho_{ll'}$ возникает следующая система уравнений [24]:

$$\rho_{12} = \rho_{12}^{(c)} + \rho_{12}^{(n)}, \tag{12}$$

$$\rho_{12}^{(c)} = \left(1 + \Delta_r \hat{\mathcal{P}}_r\right) \rho_{12}^0 \left(1 + \hat{\mathcal{P}}_a \Delta_a\right), \tag{13}$$

$$\rho_{12}^{(n)} = -\Delta_r \hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)} \Delta_a, \quad \Delta_r = \Delta_r^0 + \Delta_r^0 \hat{\mathcal{P}}_r \Delta_r. \tag{14}$$

Далее, $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}$ и $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}^{(n)}$ — поляризацонные операторы, возникающие в технике функций Грина в Γ -пространстве, и

$$\Delta_r = \Delta_{11}, \quad \Delta_a = -\Delta_{22} = \Delta_r^+,$$

$$\hat{\mathcal{P}}_r = \hat{\mathcal{P}}_{11}, \quad \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_{22} = \hat{\mathcal{P}}_r^+.$$

Такая структура системы уравнений удобна для дальнейших исследований в духе замечаний разд. 2. Согласно (12), матрица плотности фотонной подсистемы распадается на сумму двух компонент. Когерентная составляющая $\rho_{12}^{(c)}$ описывает упругие процессы рассеяния, в результате которых атомы среды возвращаются в исходное (в том числе и трансляционное) квантовое состояние. Некогерентная составляющая $\rho_{12}^{(n)}$ описывает процессы, в результате которых атомы среды изменяют свое квантовое состояние. Для расчета поляризацонных операторов можно воспользоваться следующими правилами построения фейнмановских диаграмм.

1. Сплошной линии со стрелкой сопоставляется множитель $iG_{ll'}^0$. Для однородных сред

$$G_{ll'}^0 = \sum_{jj'p} \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi_{j'}^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}') \int G_{ll'}^{0jj'}(\mathbf{p}, E) \exp [i\mathbf{p}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - iE(t - t')] \frac{dE}{2\pi V}.$$

Если рассеивающие атомы среды подвержены действию резервуара, уширяющего энергетические уровни атомов, то [24]

$$\begin{aligned} G_r^{0jj'}(\mathbf{p}, E) &= \delta_{jj'} (E - \varepsilon_j(p) + i\gamma_j/2)^{-1}, \\ G_{12}^{jj'}(\mathbf{p}, E) &= -2\pi i \delta_\gamma (E - \varepsilon_j(p)) N_j(\mathbf{p}) \delta_{jj'}, \end{aligned} \tag{15}$$

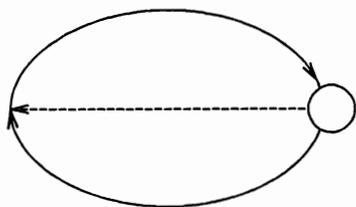


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана для $-i\hat{\mathcal{G}}_{II'}$ в Г-технике

где

$$\delta_\gamma(E) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\left(E + i\frac{\gamma}{2} \right)^{-1} - \left(E - i\frac{\gamma}{2} \right)^{-1} \right],$$

$N_j(\mathbf{p})$ — числа заполнения атомных состояний, $G_r = G_{11} - G_{12}$.

2. Штриховой линии со стрелкой сопоставляется $i\Delta_{II'}^0$.
3. Волнистой линии со стрелкой сопоставляется множитель $\rho_{II'}^0$.
4. Узлу диаграммы, обозначаемому кружком, сопоставляется множитель $(-1)^{l+1}(ie/m)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}$. Иногда узел диаграммы мы будем обозначать точкой. В таком случае множитель $(-1)^{l+1}$ опускается.
5. В каждом внутреннем узле подразумевается интегрирование по всем $\mathbf{r}, \mathbf{R}, t, \zeta$.
6. В каждом внешнем узле подразумевается интегрирование по \mathbf{g} и \mathbf{R} .

Из обращения в нуль произведения $\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{F}}$ следует, что каждая фейнмановская диаграмма может либо не содержать $\rho_{II'}^0$, либо содержать функцию $\rho_{II'}^0$ не более чем в первой степени. Например, простейшему поляризованному оператору

$$\hat{\mathcal{G}}_{l_1 l_2} = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \int \hat{\mathbf{p}}^{\nu_1} \hat{A}^{\nu_1} G_{l_1 l_2}^0(X_1, X_2) \Delta_{l_1 l_2}^0 (-1)^{l_2+1} \times \\ \times \hat{\mathbf{p}}^{\nu_2} \hat{A}^{\nu_2} G_{l_2 l_1}^0(X_2, X_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2, \tag{16}$$

где $X = \{\mathbf{r}, \mathbf{R}, t\}$, отвечает фейнмановская диаграмма, изображенная на рис. 2. Ограничимся двухуровневым приближением для атомов с учетом вырождения. Сопоставим индекс m зеemanовским подуровням их возбужденного состояния и индекс μ подуровням основного состояния. При равномерном заполнении подуровней после интегрирования в (16) по \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 в согласии с формулами (15) для однородной бесконечной среды в N-представлении находим:

$$\hat{\mathcal{G}}_r(E) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} a_r^{\mathbf{k}\lambda} (E - \hat{H}_{ph}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_r^{\mathbf{k}\lambda} (E - \hat{H}_{ph}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \right],$$

где

$$a_r^{\mathbf{k}\lambda}(E) = \frac{\pi(2j_m + 1)\gamma_r}{2\omega_{m\mu}kV} \frac{N_m}{E + \omega_{m\mu} + i\gamma/2}, \\ c_r^{\mathbf{k}\lambda}(E) = \frac{\pi(2j_m + 1)\gamma_r}{2\omega_{m\mu}kV} \frac{N_\mu}{E - \omega_{m\mu} + i\gamma/2}. \tag{17}$$

Здесь использовано правило сумм

$$\sum_{m\mu} |P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k})|^2 = \frac{\pi(2j_m + 1)\gamma_r}{\omega_{m\mu}}, \tag{18}$$

причем γ_r — вероятность спонтанного излучения атома в единицу времени, j_m — орбитальное квантовое число. Эффект Доплера опущен. При наличии границ поляриза-ционный оператор (16) определяет в когерентном канале в низшем приближении по концентрации рассеивателей вектор Пойнтинга отраженного излучения. Для плоско-параллельного слоя толщиной L он равен [24]

$$\langle s_\lambda \rangle^{(c)} = \mathbf{k} \frac{\sin^2(k_{0z}L)}{4k_{0z}^4 V} |c^{k\lambda k_0 \lambda_0}(k_0, k_0)|^2 N_0,$$

$$\mathbf{k} = \{k_{0x}, k_{0y}, -k_{0z}\}.$$

При этом предполагается, что

$$\rho_{12}^0(E) = 2\pi\delta(E - k_0 N_0) |N_{k_0 \lambda_0}\rangle \langle N_{k_0 \lambda_0}|.$$

В условиях линейного приближения коэффициент отражения находится как

$$R^{(c)} = \frac{\langle s_\lambda \rangle^{(c)}}{s^0}, \quad s^0 = \frac{k_0 N_0}{V}, \tag{19}$$

и

$$c^{k\lambda k_0 \lambda_0}(k_1, k_2) = \sum_{m\mu} [P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k})]^* P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0) \left(\frac{n_\mu}{k_1 - \omega_{m\mu} + i\gamma/2} + \frac{n_m}{\omega_{m\mu} - k_2 + i\gamma/2} \right),$$

где

$$n_\mu = \frac{N_\mu}{V}, \quad n_m = \frac{N_m}{V}, \quad \gamma = \gamma_m + \gamma_\mu.$$

Структура этого выражения аналогична структуре выражения (5). В частности, для резонансных частот $k = \omega_{m\mu}$ оказывается, что

$$R^{(c)} \sim \left| (n_\mu + n_m) \lambda^3 \frac{\gamma_2}{\gamma} \right|^2 < 1, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{20}$$

Последнее неравенство служит условием применимости теории. При множественных процессах рассеяния этот параметр возводится в соответствующую степень. Таким образом, когерентный канал рассеяния может быть исследован методами теории возмущений.

Обратимся к исследованию вклада в вектор Пойнтинга некогерентного канала рассеяния. Относительно этого канала можно сделать ряд утверждений. Перепишем уравнение, определяющее пропагатор Δ_r , в виде

$$\Delta_r^{-1} = (\Delta_r^0)^{-1} - \hat{\mathcal{P}}_r, \quad (\Delta_r^0)^{-1} = i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_{ph}. \tag{21}$$

Поддействуем на уравнения (13), (14) слева и справа соответственно операторами Δ_r^{-1} и Δ_a^{-1} . Поскольку матрица ρ_{12}^0 описывает свободное электромагнитное поле, то с помощью (21) находим

$$\Delta_r^{-1} \rho_{12}^{(c)} = (\Delta_r^0)^{-1} \rho_{12}^0 \left(1 + \hat{\mathcal{P}}_a \Delta_a \right) = 0,$$

$$\Delta_r^{-1} \rho_{12} \Delta_a^{-1} = -\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}.$$

Теперь подействуем справа на последнее уравнение оператором Δ_r и слева оператором Δ_a . В согласии с (14) будем иметь

$$\Delta_r \Delta_r^{-1} \rho_{12} \Delta_a^{-1} \Delta_a = \rho_{12}^{(n)}, \quad (22)$$

но

$$\rho_{12}(t, t') = i \mathcal{D}_{12}(t, t') = \langle \check{\Phi}^+ \check{\Phi} \rangle_{\Gamma}. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (22) показывает, что

$$\rho_{12}^{(n)} = \langle \check{Y}^+(\zeta', t') \check{Y}(\zeta, t) \rangle_{\Gamma},$$

где

$$\check{Y} = \Delta_r \Delta_r^{-1} \check{\Phi}.$$

Очевидно, что при $t = t'$ диагональные элементы $\rho_{12}^{(n)}$ положительны. Если от переменной ζ с помощью функции Φ^0 перейти к аргументам \mathbf{N} , то окажется, что

$$\rho_{12}^{(n)}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}, t) > 0.$$

Положительная определенность диагональных элементов $\rho_{12}^{(c)}$ почти очевидна. Для свободного электромагнитного поля можно записать

$$\rho_{12}^0 = \chi^0 (\chi^0)^+.$$

Тогда, согласно (13),

$$\rho_{12}^{(c)} = \chi \chi^+, \quad \chi = \left(1 + \Delta_r \hat{\mathcal{P}}_r \right) \chi^0.$$

Теперь ясно, что

$$\rho_{12}^{(c)}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}, t) = \chi(\mathbf{N}, t) \chi^+(\mathbf{N}, t) > 0.$$

Если

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (24)$$

— операторное выражение для вектора Пойнтинга и

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \text{Sp} (\hat{\mathbf{s}} \rho_{12}) = \sum_{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{s}} \rho_{12}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}, t),$$

то из (12)–(14) и (24) находим

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{s} \rangle^{(c)} + \langle \mathbf{s} \rangle^{(n)},$$

где

$$\langle \mathbf{s} \rangle^{(c)} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \langle \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{k}\lambda}^{(c)}, \quad \langle \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{k}\lambda}^{(c)} = \sum_{\mathbf{N}} \frac{N_{\mathbf{k}\lambda}}{V} \mathbf{k} \rho_{12}^{(c)}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}, t), \quad (25a)$$

$$\langle \mathbf{s} \rangle^{(n)} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \langle \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{k}\lambda}^{(n)}, \quad \langle \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{k}\lambda}^{(n)} = \sum_{\mathbf{N}} \frac{N_{\mathbf{k}\lambda}}{V} \mathbf{k} \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}, t). \quad (25b)$$

Составляющие вектора Пойнтинга, отвечающие когерентному и некогерентному каналам рассеяния, складываются векторно. Интерференционных явлений здесь нет. Наибольший интерес представляют выражения (25b), свидетельствующие о том, что составляющая вектора Пойнтинга, отвечающая некогерентному каналу, представима в виде суммы компонент по различным модам, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на сумму положительно определенных компонент, отвечающих различным конфигурациям \mathbf{N} рассеянного поля. Интерференционных членов здесь также нет. Поэтому, если в (25b) ограничить суммирование по \mathbf{N} лишь избранными конфигурациями, для модуля вектора $\langle \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{k}\lambda}^{(n)}$ получим оценку снизу.

Все сказанное в полной мере относится и к коэффициенту отражения R . Ниже при исследовании некогерентного канала рассеяния мы ограничимся процессами отражения, в результате которых в моде (\mathbf{k}, λ) отраженного луча возникают два фотона. Учет только таких процессов позволит, с одной стороны, оценить коэффициент отражения R снизу, с другой стороны, выявить закономерности, характерные для некогерентного канала рассеяния. Конкретно, мы будем иметь в виду процессы рассеяния фотонов на невозбужденных атомах и последующее вынужденное излучение возбужденных атомов, спровоцированное рассеянными квантами. Их вклад в R осуществляется, начиная лишь с шестого порядка теории возмущений. При этом, в согласии с замечаниями разд. 3, здесь следует ожидать появления особенностей, требующих суммирования бесконечной подпоследовательности диаграмм Фейнмана. Теперь ясно, что в подобно-го рода задачах вклад бесконечных подпоследовательностей фейнмановских диаграмм, первый член которых возникает лишь в шестом порядке теории возмущений, может оказаться существенным. Указанному процессу в Γ -технике функций Грина отвечают диаграммы на рис. 3. У запаздывающих и опережающих функций Грина, а также у ρ_{12}^0 стрелки опущены. Сумма выражений, соответствующих этим диаграммам, приводит к следующей формуле для коэффициента отражения:

$$R_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}^{\lambda\lambda_0(n)} = \frac{\pi^6 (2j_m + 1)^3 \gamma_r^3 n_m \delta_{\lambda\lambda_0}}{L_z \omega_{m\mu}^3 k_0^2 k_{0z}^3} \sin^2(k_{0z} L) \times \\ \times \delta(k_{0x}, k_x) \delta(k_{0y}, k_y) \delta_\gamma (2k - k_0 - \omega_{m\mu}) \delta_\Gamma^2(k_0 - k) \times \\ \times \left| \frac{n_\mu}{k - \omega_{m\mu} + i\gamma/2} \right|^2, \quad n_m \ll n_\mu. \quad (26)$$

Для поляризационного оператора $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$ использовано диагональное приближение, что отвечает бесконечно толстому рассеивающему слою. Собственно шестому порядку теории возмущений отвечает выражение (26), в котором под δ_Γ следует понимать стандартную δ -функцию Дирака. Квадрат этой функции характеризует именно ту особенность, о которой говорилось выше. Для ликвидации особенности осуществляется суммирование бесконечной подпоследовательности фейнмановских диаграмм, что символически отмечено на рис. 3 жирными штриховыми линиями. Под жирной линией

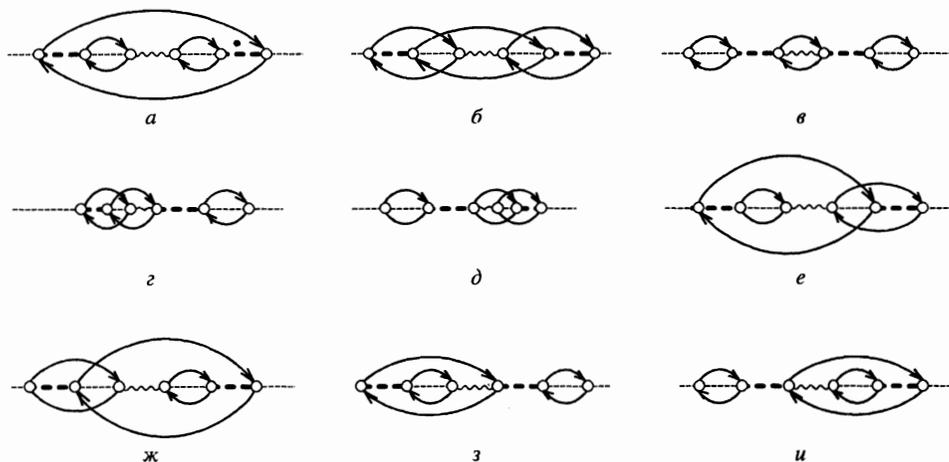


Рис. 3. Диаграммы процессов, поставляющих два фотона в моду отражения

понимается полная функция Грина рассеянного фотона (\mathbf{k}, λ), провоцирующего вынужденное излучение возбужденного атома (рис. 3а). Возможен процесс спонтанного излучения в моду (\mathbf{k}, λ), провоцирующий впоследствии вынужденное рассеяние исходного поля (\mathbf{k}_0, λ_0) (рис. 3б–д). Возможна интерференция этих процессов (рис. 3е–и). Во всех случаях функция Грина Δ_r^0 фотона, провоцирующего вынужденные процессы, заменена на Δ_r . В качестве Δ_r используется выражение, справедливое для бесконечной среды. В энергетическом пространстве замена выглядит так

$$\Delta_r^0 \rightarrow \Delta_r = \frac{1}{E - k - \hat{\mathcal{P}}_r(E)},$$

где $\hat{\mathcal{P}}_r(E)$ — поляризационный оператор (17) в N-представлении при наличии в моде (\mathbf{k}, λ) одного фотона. Соответственно под δ_r понимается выражение:

$$\delta_r(k_0 - k) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{k_0 - k - \hat{\mathcal{P}}_r(k_0)} - \frac{1}{k_0 - k - \hat{\mathcal{P}}_a(k_0)} \right].$$

Для одномодового заполнения при $n_m \ll n_\mu$ в согласии с (17), (18) находим

$$\hat{\mathcal{P}}_r(k_0) = c_r^{k\lambda}(k_0) = \frac{\pi(2j_m + 1)\gamma_r}{2\omega_{m\mu}^2} \frac{n_\mu}{k_0 - \omega_{m\mu} + i\gamma/2}.$$

Как следует из выражения (26), в отраженном луче компоненты k_x и k_y совпадают с соответствующими компонентами рассеиваемого потока, что диктуется геометрией рассматриваемой среды. Компонента k_z может несколько отличаться от $-k_{0z}$. Такое различие зависит от времени жизни возбужденного атома (γ^{-1}) и времени существования однофотонного состояния в среде $(\text{Im} \hat{\mathcal{P}}_r)^{-1}$. Из-за возникшей неоднозначности k_z отраженный луч приобретает частотно-угловое распределение.

Нас будут интересовать относительные величины интенсивностей когерентного и некогерентного каналов. Для когерентного канала в случае резонансных частот в со-

гласии с формулой (19) имеем

$$R^{(c)} = \delta_{\lambda\lambda_0} \frac{\pi^2 \gamma_r^2 (2j_m + 1)(n_\mu + n_m)^2}{k_{0z}^4 \omega_{m\mu}^2 \gamma^2} \sin^2(k_{0z} L).$$

Для некогерентного канала возможны различные ситуации. Пусть

$$|\mathcal{P}_r(k)|_{max}^2 = \left| \frac{\pi(2j_m + 1)}{\omega_{m\mu}^2} \frac{\gamma_r}{\gamma} n_\mu \right|^2 \ll \gamma^2, \quad (27)$$

т. е.

$$n_\mu \lambda^3 \frac{k_0 \gamma_r}{\gamma^2} \ll 1.$$

В согласии с формулой (26) теперь при $n_m < n_\mu$ и $k_{0z} \gg k_{0x}, k_{0y}$

$$\sum_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}^{\lambda\lambda_0(n)} = \frac{4n_m}{n_\mu} R^{(c)}. \quad (28)$$

Таким образом, при $n_m \ll n_\mu$ вкладом некогерентного канала можно пренебречь. При $n_m \sim n_\mu$ его необходимо учитывать. И если при этом вклад в $R^{(n)}$ осуществляют члены теории возмущений, начиная с шестого, их общий результат из-за отмеченных особенностей после суммирования диаграмм оказывается пропорциональным e^4 . Несмотря на то что по мере увеличения n_m вклад некогерентного канала, согласно (28), становится сопоставимым с вкладом когерентного канала, в реальных условиях термического возбуждения это вряд ли возможно. Дело в том, что при выполнении неравенства (27) свет, когерентно отраженный от поверхности под зеркальным углом, теряется среди диффузно отраженного излучения. Зеркально отраженная компонента становится заметной при [29]

$$n_\mu \lambda^3 \frac{\gamma_r}{\rho} \sim 1.$$

Учет эффекта Доплера, способствующий выполнению неравенства (27), вряд ли может изменить ситуацию, во всяком случае в видимой области спектра. По мере роста n_μ неравенство (27) нарушается. При экспериментально легко достижимом неравенстве, обратном (27), имеем

$$\sum_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}^{\lambda\lambda_0(n)} \propto \frac{n_m}{(2j_m + 1)n_\mu} R^{(c)} \frac{\gamma^2}{k_0 \gamma_r n_\mu \lambda^3}.$$

В этих условиях интегральная относительная роль двухфотонных процессов несущественна.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку коэффициент отражения в когерентном канале, $R^{(c)} \propto (n_\mu + n_m)^2$, зависит лишь от полной концентрации рассеивателей, но не от n_μ и n_m отдельно, то $dR^{(c)}/dn_m = 0$. Учет некогерентного канала при малых n_m приводит к неравенству

$$\frac{dR}{dn_m} = \frac{d}{dn_m} (R^{(c)} + R^{(n)}) = \frac{dR^{(n)}}{dn_m} \geq 0, \quad (29)$$

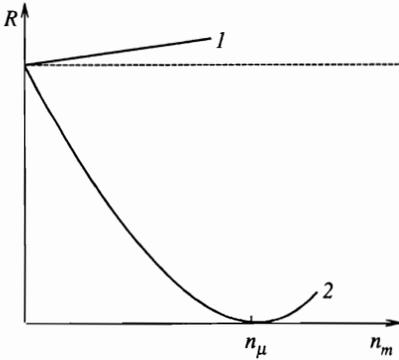


Рис. 4. Зависимость коэффициента селективного отражения от степени возбуждения среды: 1 — квантовая теория отражения; 2 — полуклассическая теория отражения

т. е. к росту полного коэффициента селективного отражения с ростом концентрации возбужденных рассеивателей. Как показал анализ, в реальных условиях в выражении (29) практически реализуется равенство, и полный коэффициент фактически теряет линейную зависимость от n_m . Вместе с тем, в полуклассической теории излучения имеем

$$\frac{dR}{dn_m} < 0, \quad \text{при } n_m < n_\mu,$$

поскольку в этой теории $R \propto (n_\mu - n_m)^2$.

Предсказания полуклассической теории излучения и последовательной квантовой электродинамики сопоставлены на рис. 4. Налицо качественное расхождение между ними, что свидетельствует не в пользу полуклассической теории. До настоящего времени выполненные экспериментальные исследования [15–18] преследовали цель достижения $R > 1$ и были проведены на инверсно заселенных средах $n_m > n_\mu$. Рассмотренная нами более простая область термического возбуждения осталась вне поля зрения экспериментаторов. Но уже здесь, в условиях сильнеоднородных сред, вынужденное излучение ведет себя нетривиальным образом. По мере роста n_m расхождение между теориями будет возрастать, и в области инверсной заселенности расчеты должны носить исключительно квантовоэлектродинамический характер.

Литература

1. С. Kenty, Phys. Rev. **42**, 823 (1932); **43**, 181 (1933).
2. Л. М. Биберман, ЖЭТФ **17**, 416 (1947).
3. Т. Holstein, Phys. Rev. **72**, 1212 (1947).
4. И. М. Петров, Ю. А. Матюгин, В. П. Чеботарев, Письма в ЖЭТФ **10**, 296 (1969); Опт. и спектр. **38**, 356 (1970).
5. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **58**, 1090 (1970).
6. И. М. Петров, Ю. А. Матюгин, С. Г. Раутиан, В. П. Чеботарев, ЖЭТФ **58**, 1243 (1970).
7. А. П. Казанцев, В. С. Смирнов, В. П. Яковлев, ЖЭТФ **82**, 1738 (1982).
8. А. П. Казанцев, О. Г. Меликян, В. П. Яковлев, ЖЭТФ **89**, 450 (1985).
9. А. А. Пантелеев, В. А. Росляков, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **97**, 1777 (1990).
10. Ю. К. Земцов, А. Ю. Сечин, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **110**, 1654 (1996).

11. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 47, 1515 (1964).
12. Б. А. Векленко, Изв. Вузов, Физика, № 9, 71 (1983).
13. Б. А. Векленко, Г. Б. Ткачук, Изв. Вузов, Физика, № 2, 89 (1987).
14. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1962).
15. Ch. I. Köester, IEEE 2(9), 580 (1966).
16. С. А. Лебедев, В. А. Кизель, Б. Я. Коган, КЭ 3, 2446 (1976).
17. Б. Б. Бойко, Н. Н. Уварова, КЭ 8, 2506 (1981).
18. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, *Отражение света от усиливающих и нелинейных сред*, Наука и техника, Минск (1988).
19. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов, Письма в ЖЭТФ 16, 298 (1972).
20. А. А. Колоколов, Письма в ЖЭТФ 71, 660 (1975).
21. Г. Н. Винокуров, В. И. Жулин, КЭ 9, 553 (1982).
22. Б. Б. Бойко, И. З. Джилавдари, Н. С. Петров, ЖПС, 25, 148 (1976).
23. А. Б. Зимин, ЖПС 40, 1005 (1984).
24. Б. А. Векленко, ЖЭТФ 96, 457 (1989).
25. Р. Шумейкер, в кн. *Лазерная и когерентная спектроскопия*, под ред. Дж. Стейнфельда, Мир, Москва (1982).
26. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, ИИЛ, Москва (1956).
27. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
28. В. П. Силин, В. Я. Файнберг, УФН 61, 568 (1955).
29. L. M. Vibergerman, Pure and Appl. Chem. 13, 393 (1966).