ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 2, стр. 409–431

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ МЮОН–АНТИМЮОН: ВРЕМЕНА ЖИЗНИ И СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ

*С. Г. Каршенбойм**

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева 198005, Санкт-Петербург, Россия

В. Г. Иванов

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук 196140, Пулково, Ленинградская обл., Россия

У. Д. Йентшура†, Г. Зофф†

Институт теоретической физики, Технический университет 01062, Дрезден, Германия

Поступила в редакцию 19 июня 1997 г.

Рассмотрены свойства атомной системы, состоящей из мюона и антимюона. Найдены выражения для вероятности распада и сверхтонкого расщепления низших уровней с учетом ведущих радиационных поправок, имеющих относительный порядок α. Результаты для времен жизни и энергии основного состояния составили $\tau(1^3S_1) = 1.7907(8) \cdot 10^{-12}$ с, $\tau(1^1S_0) = 0.59547(33) \cdot 10^{-12}$ с, и $E_{\rm hfs}(1s) = 4.23284(35) \cdot 10^7$ МГц. Вычислены относительные вероятности для различных каналов распада, и, в частности, для уровня 1^3S_1 получено $\Gamma(\mu\mu \to ee\gamma)/\Gamma(\mu\mu \to ee) \approx 15\%$. Обсуждаются возможные приложения.

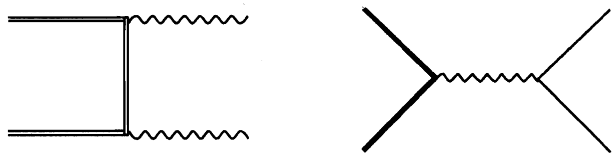
1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению спектра в чисто лептонной системе, состоящей из связанных мюона и антимюона[1)]. Мы подробно обсуждаем ее свойства: времена жизни, каналы распада и сверхтонкое расщепление низших уровней. Прежде всего отметим, что данная атомная система может быть исследована стандартными методами физики элементарных частиц. В самом деле, димюоний может быть получен в распадах и столкновениях элементарных частиц или в ядерных столкновениях. Отметим, что атомные каналы распадов и процессов рассеяния уже наблюдались ранее. Так, связанная система $\pi\mu$ была зарегистрирована в распаде $K_L^0 \to (\pi\mu\text{-атом}) + \nu$ [1], а затем в работе [2] удалось увеличить число событий и провести более надежные измерения. Ультрарелятивистский позитроний в конечном состоянии был обнаружен в протон-углеродных соударениях [3]. В качестве главного источника атомов предполагался распад $\pi^0 \to \mathrm{Ps} + \gamma$ внутри мишени, и после дополнительных экспериментов [4]

*E-mail: sgk@onti.vniim.spb.su

†U. D. Jentschura, G. Soff, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany.

1) Мы будем называть эту систему димюонием, различая состояния с нулевым полным спином $S = 0$ (парадимюоний, PM) и с единичным $S = 1$ (ортодимюоний, OM). Название мюоний сохраняется за атомом, составленным из электрона и антимюона.



а *б*

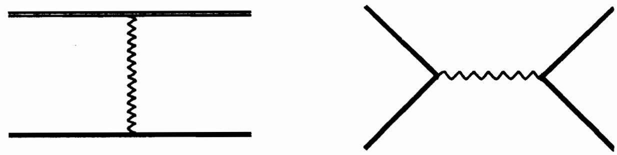
Рис. 1. Распад димюония в главном приближении: *а* — парадимюоний; *б* — ортодимюоний. Здесь и далее мы приводим только по одной диаграмме каждого типа. Двойная фермионная линия отвечает мюону, одинарная — электрону. Так, например, в случае диаграммы *а* необходимо симметризованным образом учитывать две диаграммы с разными фотонами

в этом удалось убедиться. Недавно в экспериментах с протонным пучком и танталовой мишенью был получен пионий [5]. Для полноты изложения следует также упомянуть о наблюдении кулоновского взаимодействия в конечном состоянии протон-протонного рассеяния [6]. В последнем случае взаимодействие наблюдалось в каналах $\pi^+\pi^-$, $p\pi^-$ и K^+K^-, однако при малом числе событий было невозможно определить, были ли эти состояния непрерывного или дискретного спектра.

Рождение связанных состояний системы $\mu^+\mu^-$ является более редким процессом, чем рождение адронных атомов, и поэтому трудно ожидать, что удастся получить достаточное для спектроскопических исследований количество атомов. Как правило, вероятность рождения пропорциональна волновой функции в нуле и, следовательно, величине δ_{l0}/n^3. Ясно, что в этом случае могут быть получены только низшие s-состояния. Их времена жизни находятся в пикосекундном (10^{-12} с) интервале, т.е. они того же порядка, что и времена жизни ряда нейтральных мезонов (ср., например, [7]: $\tau(K^0_L) = 89.3(1)\cdot 10^{-12}$ с, $\tau(D^0) = 0.415(4)\cdot 10^{-12}$ с, $\tau(B^0) = 1.56(6)\cdot 10^{-12}$ с, $\tau(B^0_S) = 1.61(10)\cdot 10^{-12}$ с), для которых оно измерено с процентной точностью. Продукты распада также характерны для распада частиц: главная мода для парадимюония — аннигиляция в два гамма кванта (рис. 1*а*), а в случае ортодимюония доминирует конверсия в электрон-позитронную пару посредством виртуальной однофотонной аннигиляции (рис. 1*б*). В обоих случаях энергия конечных частиц в системе центра масс атома составляет[2)] 106 МэВ.

Недавний прогресс в наблюдении различных атомных состояний в столкновениях [3, 5] и распадах [1, 2, 4], а также характерные схемы распада димюония, позволяют надеяться, что димюоний также может быть зарегистрирован в недалеком будущем. С точки зрения экспериментальной физики высоких энергий, димюоний представляет собой семейство нейтральных скалярных (парадимюоний, состояния $1s$ и $2s$) и векторных (ортодимюоний, состояния $1s$ и $2s$) бозонов. Исследование димюонных атомных состояний может быть интересно для экспериментаторов как модель поиска экзотических нейтральных частиц с массой и временем жизни, характерными для обычных частиц, но с аномально слабым взаимодействием с ними. Следует заметить, что многие модели предусматривают новые нейтральные частицы, или очень тяжелые и взаимодействующие с веществом, или, напротив, с нормальной массой, но слабовзаимодействующие с обычными частицами. Нетрудно видеть, что димюоний как раз обладает свойствами нейтральных экзотических частиц второго типа. Учитывая, что поиск подобных частиц

[2)] Мы используем релятивистскую систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$ и $\alpha = e^2$.



а *б*

Рис. 2. Сверхтонкое расщепление в димюонии в главном приближении: «пружинка» обозначает обмен поперечным фотоном (*а*); *б* — виртуальная однофотонная аннигиляция (волнистой линией обозначен обычный фотон)

становится в последнее время одним из основных направлений эксперимента, мы полагаем, что указанные выше свойства димюония делают его хорошей тестовой частицей.

Система $\mu^+\mu^-$ может представлять также интерес с точки зрения проверки квантовой электродинамики (КЭД). Во-первых, как и в случае обычных мюонных атомов, имеется возможность проверить КЭД при пространственно-подобных импульсах с величинами порядка массы электрона (характерный атомный импульс составляет $\alpha m_\mu/2 \simeq 0.75 m_e$). В обычных мюонных атомах существенную роль играют эффекты, связанные со структурой ядра, которые отсутствуют в чисто лептонной системе. Ожидаемая сравнительно невысокая точность измерений времен жизни и сверхтонкого расщепления частично может быть скомпенсирована тем, что возникают поправки к волновым функциям, которые более чувствительны к деталям потенциалов, чем интегральные величины, такие как энергия. С другой стороны, при вычислении сверхтонкого расщепления (рис. 2*б*) и ширины распада (рис. 1*б*) ортодимюонной системы необходимо учесть аннигиляционную диаграмму, вклад которой пропорционален фотонному пропагатору. Измеряя время жизни и сверхтонкое расщепление ортодимюония, можно тем самым экспериментально исследовать поляризацию вакуума при большом (в единицах электронной массы) времениподобном импульсе, но ниже пионного порога.

Наиболее интересные величины, с нашей точки зрения, это времена жизни, для нахождения которых с процентной точностью необходимо учитывать радиационные поправки, а также отношения парциальных ширин разных каналов распада, которые могут быть непосредственно использованы при детектировании. Полные и парциальные ширины обсуждаются в разд. 3 и 4. Их рассмотрение предваряется исследованием сверхтонкого расщепления состояний $1s$ и $2s$. Дело в том, что, с одной стороны, часть диаграмм для сверхтонкого расщепления и распада ортодимюония похожи друг на друга, а с другой — имеется аналогия между сверхтонким расщеплением в димюонии и позитронии, который неоднократно исследовался ранее. Обсуждение результатов приведено в конце статьи.

Перед тем как перейти к основной части работы, кратко напомним известные результаты, полученные для экзотических атомов. Наиболее детально ранее были исследованы различные вопросы, связанные с рождением, спектром и распадом пиония (см. работы [8, 9] и ссылки в них). Был исследован также ряд других экзотических атомов, содержащих мезоны (см., например, [8, 10, 11]). Собственно димюоний обсуждался только в нескольких работах. В работах [10] наряду с другими атомными состояниями в распадах элементарных частиц был рассмотрен процесс $\eta \to (\mu^+\mu^-\text{-атом}) + \gamma$. В работе [8] изучались процессы с образованием димюония в реакции $\pi^- + p \to (\mu^+\mu^-\text{-атом}) + n$ и при рассеянии фотона в поле ядра. Некоторые радиационные поправки к распаду тяжелых лептониев в ортосостоянии рассматривались в работе [12], причем была найдена лишь часть вкладов относительного порядка α (см. подробнее в разд. 3). Вместе с тем следует отметить, что часть результатов для сверхтонкого расщепления в позитронии [13, 14] может быть использована в случае димюония и для вычисления ширины распада ортодимюония.

2. СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ДИМЮОНИИ

Обсуждение сверхтонкого расщепления в димюонии удобно начать с результатов, полученных для позитрония. Ведущий вклад имеет порядок $\alpha^4 m$ и происходит от двух диаграмм, представленных на рис. 2: обмена поперечным фотоном (*а*) и виртуальной аннигиляции (*б*). Результат для димюония отличается заменой массы электрона на массу мюона:

$$E^{(0)}_{hfs}(ns) = E_F/n^3, \tag{1}$$

где энергия Ферми E_F определена как[3)]

$$E_F \simeq \frac{7}{12}\,\alpha^4 m_\mu \simeq 0.175 \ \text{эВ} = 4.23 \cdot 10^7 \ \text{МГц}. \tag{2}$$

Коэффициент $7/12$ складывается из $1/3$ (поперечный обмен) и $1/4$ (аннигиляция).

Ведущие радиационные поправки порядка $\alpha^5 m$ происходят от диаграмм, представленных на рис. 3, причем вклады *а–д* имеют одинаковый вид для позитрония и димюония, тогда как остальные графики специфичны для димюония. Результаты для сверхтонкого расщепления основного состояния в позитронии были найдены в [13], позднее в [14] они были подтверждены и было показано, что для ns-уровней вся зависимость от состояния сводится к масштабному фактору n^{-3}, возникающему из квадрата шредингеровской волновой функции к начале координат, $|\varphi_{ns}(0)|^2$. Результат имеет вид [13, 14]

$$\Delta E^{\mathrm{Ps}}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{32}{21} - \frac{6}{7}\ln 2 + \frac{3}{7}\,\pi\, i\right]\,\frac{E_F}{n^3}\,. \tag{3}$$

Как отмечено выше, результат происходит от пяти первых диаграмм на рис. 3, включающих аномальный магнитный момент (*а*), двухфотонный обмен (*б*), вершинную поправку к аннигиляции (*в*), поляризационную вставку в аннигиляционный фотон (*г*) и двухфотонную аннигиляцию (*д*). Все вклады по отдельности представлены в табл. 1. Для последующего обсуждения приведем здесь в явном виде вклады двух из них: вершинная поправка приводит к результату (мы явно выделили комбинаторный фактор 2)

$$\Delta E^{\mathrm{V}}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\,[-2\cdot 2]\;\frac{3}{7}\,\frac{E_F}{n^3}, \tag{4}$$

а вставка поляризации вакуума лептонов, составляющих атом, (т. е. электронов для позитрония и мюонов для димюония) приводит к поправке

$$\Delta E^{\mathrm{P}\mu}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{8}{9}\right]\cdot\frac{3}{7}\,\frac{E_F}{n^3}. \tag{5}$$

[3)] Имея в виду отношение $E = h\nu$, мы приводим результаты для сверхтонкого расщепления в терминах ν.

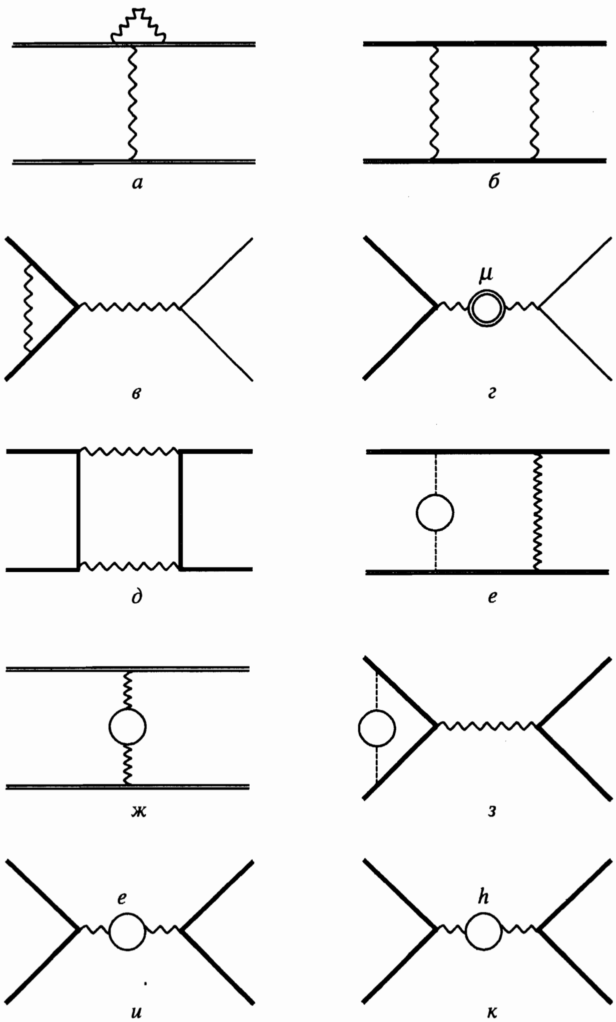


Рис. 3. Однопетлевые радиационные поправки к сверхтонкому расщеплению в димюонии: *а* — вклад аномального магнитного момента; *б* — двухфотонный обмен; *в* — вершинная поправка для аннигиляции; *г* — мюонная поляризация вакуума; *д* — виртуальная двухфотонная аннигиляция; *е* — поперечный обмен с юлинговской поправкой к волновой функции (кулоновский фотон обозначается пунктирной линией); *ж* — поляризация вакуума в поперечном фотоне; *з* — однофотонная аннигиляция с поправкой к волновой функции ; *и* — электронная поляризация вакуума в аннигиляционном фотоне; *к* — адронная поляризация вакуума. В ряде случаев (*б*, *в*) необходимо вычесть вклады предыдущего порядка

Знак мнимой части в (3) объясняется тем, что сверхтонкое расщепление является разностью энергий ортопозитрония и парапозитрония и мнимая часть отвечает вероятности распада последнего (за счет двухфотонной аннигиляции) [15]

$$\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PM}}(ns) = \frac{\alpha^5 m_\mu}{2n^3}. \tag{6}$$

Таблица 1

Поправки порядка $\alpha^5 m$ к сверхтонкому расщеплению уровней $1s$ и $2s$ даны в относительных единицах: $\Delta E(ns) = (\alpha/\pi) C E_F/n^3$. Индексация вкладов отвечает рис. 3. Вклады выше разделительной черты (*а–д*) такие же, как в позитронии, остальные специфичны для димюония

Вклад	$C(1s)$	$C(2s)$
а	0.571	0.571
б	−0.857	−0.857
в	−1.714	−1.714
г	−0.381	−0.381
д	0.263	0.263
е	0.605	0.523
ж	0.345	0.355
з	0.454	0.393
и	1.483	1.483
к	−0.080(9)	−0.080(9)
Сумма	0.689(9)	0.556(9)

Соответствующее время жизни равно $\tau^{(0)}_{\rm PM}(ns) = n^3 \cdot 0.6021 \cdot 10^{-12}$ с.

Обсуждение специфичных вкладов начнем с эффектов, связанных с потенциалом Юлинга. Как отмечено выше, ведущий вклад (1) пропорционален величине $|\varphi_{ns}(0)|^2$, которая должна измениться вследствие поправок к потенциалу. Вакуумная поляризация в мюонных атомах с малым зарядом ядра является нерелятивистским эффектом.

Вставка поляризации вакуума отвечает замене в фотонном пропагаторе

$$\frac{1}{q^2+i0} \to \frac{1}{q^2+i0} I_P(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{s_0}^{\infty} ds\, \rho(s)\, \frac{1}{q^2-s+i0}. \tag{7}$$

Строго говоря, вставка поляризации вакуума всегда поперечна, т. е. пропорциональна величине $g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/q^2$, и, следовательно, правило (7) применимо только в калибровке Ландау. Однако нетрудно убедиться, что надлежащим выбором продольной части фотонного пропагатора, добавляя члены порядка α, можно обеспечить применимость (7) в любой ковариантной калибровке (подробнее см. [16]).

В случае электронной поляризации параметр $s = \lambda^2$ и интеграл от спектральной функции $\rho(s)$ могут быть представлены в виде

$$\lambda = \frac{2m_e}{\sqrt{1-v^2}} \tag{8}$$

и

$$I_{\rm Pe}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\, \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\, \frac{q^2}{q^2-\lambda^2+i0}. \tag{9}$$

В итоге поляризационная вставка в кулоновский фотон описывается нерелятивистским потенциалом

$$V_U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\,\frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\,\frac{\alpha e^{-\lambda r}}{r}. \tag{10}$$

Потенциал Юлинга (10) приводит к сдвигу энергии уровней (лэмбовскому сдвигу) и поправкам к волновой функции. Сдвиги энергии уровней

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(1s) &= -\frac{\alpha}{\pi}\left[0.15...\right]E_0 = -0.49\,\text{эВ},\\ \mathscr{L}(2s) &= -\frac{\alpha}{\pi}\left[0.072...\right]\frac{E_0}{4} = -0.058\,\text{эВ},\\ \mathscr{L}(2P) &= -\frac{\alpha}{\pi}\left[0.00172...\right]\frac{E_0}{4} = -0.0014\,\text{эВ} \end{aligned} \tag{11}$$

следует сравнить с аналогом постоянной Ридберга для димюония

$$E_0 = \frac{\alpha^2 m_\mu}{4} = 1406.6133(5)\,\text{эВ},$$

для вычисления которой использованы следующие значения физических констант: $\alpha^{-1} = 137.0359895(61)$ и $m_\mu = 105.658389(91)$ эВ [7].

Нетрудно убедиться, что вклады, отвечающие графикам на рис. 3*e* и *з*, можно найти, учитывая возмущение величины $|\varphi_{ns}(0)|^2$, которая непосредственно входит в ведущие вклады (рис. 2). Поправка имеет относительный порядок α и зависит от состояния (ср. [17]). Искомая величина имеет вид

$$\frac{\Delta|\varphi_{ns}(0)|^2}{|\varphi_{ns}(0)|^2} = 2\int d^3r\,\overline{G}_{ns}(0,\mathbf{r};E_{ns})\,V_U(\mathbf{r})\varphi_{ns}(\mathbf{r}), \tag{12}$$

где

$$\overline{G}_{ns}(E_{ns}) = \sum_{n'\neq n}\frac{|\psi_{n's}\rangle\langle\psi_{n's}|}{E_{ns}-E_{n's}} \tag{13}$$

— редуцированная нерелятивистская кулоновская функция Грина, вернее ее s-волновая часть. Проще всего вычислить возникший интеграл при помощи явного выражения для функции Грина (см., например, [18]):

$$\overline{G}_{1s}(E_{1s};0,\mathbf{r}) = \frac{\alpha m_r^2}{4\pi}\,\frac{e^{-\rho}}{\rho}\left[4\rho\Big(\ln(2\rho)+C\Big)+4\rho^2-10\rho-2\right] \tag{14}$$

и

$$\overline{G}_{2s}(E_{2s};0,\mathbf{r}) = -\frac{\alpha m_r^2}{4\pi}\,\frac{e^{-\rho/2}}{2\rho}\left[4\rho(\rho-2)\Big(\ln\rho+C\Big)+\rho^3-13\rho^2+6\rho+4\right], \tag{15}$$

где мы ввели обозначение для безразмерного радиуса $\rho = \alpha m_r r$, а $C = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Мы также учли то обстоятельство, что нерелятивистская задача всегда решается в терминах приведенной массы m_r.

Не составляет труда найти интеграл по радиусу аналитически и провести последующее интегрирование по вспомогательному параметру v численно. Результаты имеют вид

$$\frac{\Delta|\varphi_{1s}(0)|^2}{|\varphi_{1s}(0)|^2} = \frac{\alpha}{\pi}\left[1.059...\right] \tag{16}$$

и

$$\frac{\Delta|\varphi_{2s}(0)|^2}{|\varphi_{2s}(0)|^2} = \frac{\alpha}{\pi}\left[0.916...\right]. \tag{17}$$

Обычно поляризация вакуума приводит к малым численным вкладам, в чем можно, например, убедиться в случае лэмбовских сдвигов (11). Однако в случае волновых функций в нуле вклады оказываются сравнительно большими. Следует заметить, что волновые функции всегда более чувствительны к деталям потенциала. Однако более важно, что частное значение волновой функции не является интегральной величиной, как энергия (11) или матричный элемент для вероятности атомного перехода [17], где поправки имеют нормальный порядок величин. Оно может меняться достаточно сильно в зависимости от формы потенциала.

Понять происхождение больших численных величин вкладов можно, представляя функцию Грина в виде суммы по состояниям

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{ns}(0) &= \int d^3r\,\overline{G}_{ns}(E_{ns},0,\mathbf{r})V_U(r)\,\varphi_{ns}(\mathbf{r}) = \\ &= \int d^3r \sum_{n\neq n'} \frac{\varphi_{n's}(0)\,\varphi^*_{n's}(\mathbf{r})}{E_{ns}-E_{n's}}\,V_U(\mathbf{r})\,\varphi_{ns}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{18}$$

и пренебрегая в знаменателе $E_{ns} - E_{n's}$ энергией связи промежуточного состояния n'. Нетрудно убедиться, что (18) легко суммируется и результат при замене $E_{ns} - E_{n's} \to$ $\to E_{ns}$ оказывается равным расходящейся величине

$$\frac{V_U(0) - \langle ns|\,V_U\,|ns\rangle}{E_{ns}}\,\varphi_{ns}(0).$$

Напомним, что потенциал Юлинга $V_U(r)$ (10) обратно пропорционален радиусу, а весовая функция содержит логарифмическую расходимость.

Появление расходимости означает, что пренебрежение энергией промежуточного состояния недопустимо. С другой стороны, ясно, что, например, для уровня $1s$ при оценке вклада дискретного спектра упомянутой энергией можно пренебречь и это всегда оправдано. Это рассуждение указывают на то, что состояния непрерывного спектра вносят существенный вклад, причем сумма по состояниям должна медленно убывать с ростом волнового числа. Действительно, явные расчеты показывают, что за большую численную величину ответственны состояния непрерывного спектра с численно большой энергией (первое слагаемое в скобках отвечает дискретному спектру, второе — непрерывному):

$$\frac{\Delta|\varphi_{1s}(0)|^2}{|\varphi_{1s}(0)|^2} = \frac{\alpha}{\pi}\,[0.07 + 0.98] \tag{19}$$

и

$$\frac{\Delta|\varphi_{2s}(0)|^2}{|\varphi_{2s}(0)|^2} = \frac{\alpha}{\pi}\,[-0.26 + 1.17]\,. \tag{20}$$

Учет поправки к волновой функции немедленно приводит к вкладам графиков на рис. 3*е* и *з* (см. табл. 1). Отметим, что полученные результаты зависят от состояния. Еще один зависящий от состояния вклад происходит от вакуумной поляризации в поперечном фотоне (рис. 3*ж*). Соответствующий вклад пропорционален величине

$$\mathcal{M}_{nl} = \langle nl|\nabla^2 V_U|nl\rangle. \tag{21}$$

Интеграл по радиусу легко найти аналитически, а по параметру v — численно. Результаты для уровней $1s$ и $2s$ представлены в табл. 1.

Заметим, что зависящие от состояния вклады более чувствительны к потенциалу, чем лэмбовский сдвиг. В случае поправок к волновой функции это проявляется в доминировании высокочастотных промежуточных состояний, а для поляризации вакуума в поперечном фотоне вклад пропорционален производной от потенциала.

Теперь приступим к вычислению вкладов, связанных со вставкой поляризации вакуума в аннигиляционный фотон. Вклад мюонной поляризации уже найден выше и необходимо рассмотреть электронную (рис. 3*и*) и адронную (рис. 3*к*) поляризации. Электронную поляризацию вакуума легко учесть, воспользовавшись известной асимптотикой поляризационного оператора при больших импульсах:

$$I_{\mathrm{Pe}}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{-q^2}{m_e^2} - \frac{5}{9}\right] = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{q^2}{m_e^2} - \frac{5}{9} - \frac{\pi}{3}\,i\right]. \tag{22}$$

Соответствующий вклад равен ($q^2 = (2\,m_\mu)^2$)

$$\Delta E_{\mathrm{Pe}}(ns) = \frac{3}{7}\,\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{(2\,m_\mu)^2}{m_e^2} - \frac{5}{9} - \frac{\pi}{3}\,i\right]\frac{E_F}{n^3}. \tag{23}$$

Наличие мнимой части указывает на конечное время жизни ортодимюония, определяемое распадом ($\mu^+\mu^-$-атом) $\to e^+e^-$ (рис. 1*б*):

$$\Gamma^{(0)}_{\mathrm{OM}}(ns) = \frac{\alpha^5\,m_\mu}{6\,n^3}. \tag{24}$$

Время жизни составляет $n^3\cdot 1.806\cdot 10^{-12}$ с [8]. Следует подчеркнуть одно из важных различий между позитронием и димюонием: времена жизни парасостояния и ортосостояния в димюонии одного порядка (ср. (6) и (24), рис. 1), тогда как ортопозитроний

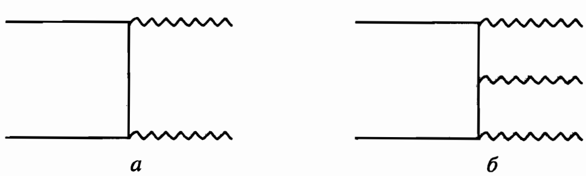


Рис. 4. Распад позитрония в главном приближении: *а* — парапозитроний; *б* — ортопозитроний

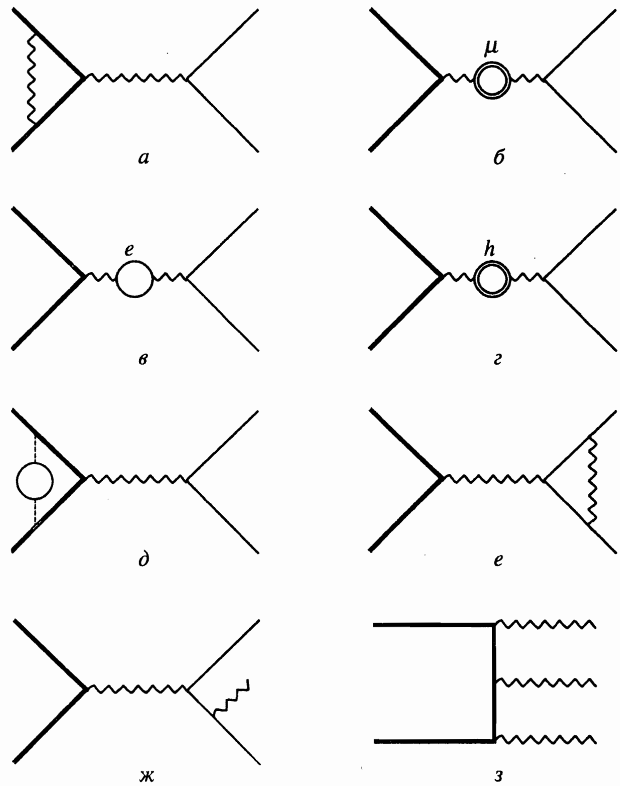


Рис. 5. Однопетлевые радиационные поправки к амплитуде распада ортодимюония: *а* — вершинная поправка для аннигиляции связанной мюонной пары; *б* — мюонная поляризация вакуума; *в* — электронная поляризация вакуума; *г* — адронная поляризация вакуума в виртуальной аннигиляции; *д* — виртуальная аннигиляция с юлинговской поправкой к волновой функции; *е* — вершинная поправка для рождения свободной электронной пары; *ж* — рождение пары с тормозным излучением; *з* — трехфотонная аннигиляция. При вычислении графиков *а* необходимо вычесть вклад предыдущего порядка

(рис. 4*б*), распадающийся на три гамма-кванта [19], живет существенно дольше парапозитрония, который распадается на два фотона (см. (6), рис. 4*а*). Различие возникает потому, что в димюонии имеется дополнительная мода распада в электрон-позитронную пару, которая и оказывается доминирующей (24).

Обсудим теперь адронный вклад в поляризацию вакуума. Рассмотрим для этого приближение, использованное в [20] при вычислении вклада адронной поляризации в сверхтонкое расщепление в мюонии. Метод заключается в следующем: в дисперсионном интеграле (7) спектральная функция аппроксимируется суммой следующих слагаемых: пионного вклада, найденного при помощи формфактора [21], вкладов ω- и ϕ-мезонов в полюсном приближении и фона выше 1 ГэВ. Параметры для вычислений (массы частиц, константы взаимодействий, параметры, входящие в формфактор, параметризация фона) были взяты из [7, 22]. Более подробное обсуждение дано в Приложении 1, а окончательный результат для адронной поляризации приведен в табл. 1.

В этой же таблице собраны вклады отдельных слагаемых в сверхтонкое расщепле-

Таблица 2

Поправки порядка $\alpha^6 m$ к ширине распада ортодимюония ($1s$ и $2s$) представлены в относительных единицах $\Delta\Gamma_{\rm OM}(ns) = (\alpha/\pi)C\,\Gamma^{(0)}_{\rm OM}(ns)$. Обозначения вкладов отвечают рис. 5

а	-4.00	-4.00
б	6.92	6.92
в	-1.78	-1.78
г	$-0.37(4)$	$-0.37(4)$
д	1.06	0.92
е + *ж*	0.75	0.75
з	1.16	1.16
Сумма	3.74(4)	3.60(4)

ние. Полный результат для поправки составил

$$\Delta E_{hfs}(1s) = \frac{\alpha}{\pi}\,0.689(9)E_F \tag{25}$$

и

$$\Delta E_{hfs}(2s) = \frac{\alpha}{\pi}\,0.556(9)\frac{E_F}{8}\,. \tag{26}$$

3. ВРЕМЯ ЖИЗНИ ОРТОДИМЮОНИЯ

Ведущий вклад (см. рис. 1*б*) был найден выше:

$$\Gamma^{(0)}_{\rm OM}(ns) = \frac{\alpha^5\,m_\mu}{6\,n^3}.$$

Как уже упоминалось, существует тесная аналогия между рядом вкладов однопетлевых поправок в сверхтонкое расщепление и в ширину распада ортодимюония, диаграммы для амплитуды которого представлены на рис. 5. Легко видеть, что в данном приближении существуют три канала распада ортодимюония с конечными продуктами: ee, $ee\gamma$, 3γ. Начнем с конверсии в электрон-позитронную пару (рис. 5*а–е*). Основные результаты собраны в табл. 2. Заметим, что результаты в таблице представлены для ширины, в которую входит квадрат амплитуды, что отвечает удвоению поправки. Первые пять поправок (рис. 5*а–д*) дают одинаковые вклады в относительных единицах как в аннигиляционную часть сверхтонкого расщепления (которая составляет 3/7 от полного вклада), так и в ширину распада ортодимюония. Однако могут быть разные комбинаторные факторы. Для ширины все комбинаторые факторы равны двойке, тогда как для сверхтонкого расщепления все вклады, кроме вершины, не удваиваются.

Вычисление диаграмм, представленных на рис. 5*е*, приводит к инфракрасной расходимости, которая сокращается в сумме с графиками на рис. 5*ж*, отвечающими другому каналу распада (ОМ $\to ee\gamma$). В полную вероятность распада, которая и определяет

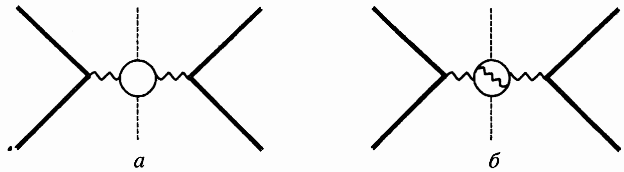


Рис. 6. Некоторые диаграммы для ширины распада ортодимюония как мнимой части энергии: *а* — ведущий вклад; *б* — учет свободной электронной вершины и тормозного излучения

время жизни состояния, входит инфракрасно конечная сумма вкладов рис. 5*е* и *ж*, и поэтому вначале найдем суммарный вклад. Будем искать ширину как мнимую часть энергии. При этом ведущий вклад отвечает графику рис. 6*а*, а искомая поправка — рис. 6*б*. Выше, обсуждая вклад электронной поляризации в сверхтонкое расщепление (см. (22), (23)), мы отметили, что мнимая часть полностью определяется коэффициентом при логарифме. Асимптотика двухпетлевой поляризации вакуума при больших импульсах также хорошо известна (см., например, [23]):

$$I^{(2)}_{Pe}(q^2) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{4}\ln\frac{-q^2}{m_e^2} + \left(\zeta(3) - \frac{5}{24}\right)\right] = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{4}\ln\frac{q^2}{m_e^2} + \left(\zeta(3) - \frac{5}{24}\right) - \frac{\pi}{4}i\right], \quad (27)$$

где $\zeta(3) = 1.2020569...$ — дзета-функция Римана и, разумеется, при вычислении необходимо положить $q^2 = 4m_\mu^2$. Нетрудно понять, что относительная величина поправки в точности равна отношению коэффициентов при логарифме в формулах (22) и (27), т. е. $(3/4)\alpha/\pi$.

В парциальные ширины, отвечающие отдельным модам распада, инфракрасно расходящиеся вклады входят по отдельности. Для обеспечения их конечности необходимо добавить к вкладу вершины вероятность тормозного излучения мягких фотонов (подробнее см., например, [24]). Полагая, что все характерные импульсы в конечном состоянии порядка массы мюона и известны с точностью порядка процента, можно заключить, что частота обрезания фотонов, разделяющая регистрируемые и мягкие фотоны, порядка электронной массы, $\Delta\omega \sim m_e$. В этом случае достаточно найти ведущий вклад в дважды логарифмическом приближении, так как уже первая степень логарифма зависит от деталей регистрации фотонов с частотой порядка m_e и является превышением точности. Выражение для вершинной функции непосредственно приведено в [24], а вклад тормозного излучения отличается только знаком:

$$\Delta\Gamma^{ee\gamma}_{\rm OM}(ns) = 2\,\frac{\alpha}{\pi}\,\ln^2\frac{m_\mu}{m_e}\,\Gamma^{(0)}_{\rm OM}(ns), \quad (28)$$

что составляет около 13%. Точность этого вычисления определяется неизвестными вкладами, содержащими на одну степень логарифма меньше ($\ln(m_\mu/m_e) \approx 5.3$). Как правило, численные коэффициенты при неведущих логарифмах больше, чем при ведущих, и мы оцениваем погрешность как 30% от величины вклада (28).

Ширина трехфотонного распада в ортопозитронии, найденная в [19], после замены массы электрона на массу мюона имеет вид

$$\Delta\Gamma^{3\gamma}_{\rm OM}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{4}{3}\left(\pi^2 - 9\right)\,\Gamma^{(0)}_{\rm OM}(ns)\,. \quad (29)$$

Результаты для поправки порядка $\alpha^6 m$ к ширине распада собраны в табл. 2. Окончательное выражение имеет вид

$$\Delta\Gamma_{\mathrm{OM}}(1s) \simeq \frac{\alpha}{\pi}\left\{1.90 + 0.68(4) + 1.16\right\}\Gamma^{(0)}_{\mathrm{OM}}(1s) = \frac{\alpha}{\pi}\,3.74(4)\Gamma^{(0)}_{\mathrm{OM}}(1s)\,. \tag{30}$$

Мы выделили здесь три типа вкладов. Первое слагаемое в фигурных скобках отвечает вкладам графиков на рис. 5*а–в* и *е*,

$$\left(\frac{4}{3}\ln\frac{2m_\mu}{m_e} - \frac{221}{36}\right),$$

найденным аналитически, второе соответствует поправкам (рис. 5*г* и *д*), полученным численно, а третье — трехфотонному обмену. Как мы отметили во Введении, ранее предпринималась попытка определить радиационные поправки [12], однако в упомянутой работе был найден только первый (аналитический) вклад, который почти вдвое меньше окончательного ответа. Что касается второго вклада, то была учтена только юлинговская поправка к волновой функции, причем при ее вычислении исходное выражение содержало свободные функции Грина мюона и антимюона без учета кулоновского взаимодействия, что, конечно, неправильно. Вклад адронной вакуумной поляризации, так же как третье слагаемое в фигурных скобках, был пропущен. Следует также заметить, что второй (численный) вклад является единственным зависящим от состояния. Так, например, в случае уровня $2s$ имеем

$$\Delta\Gamma_{\mathrm{OM}}(2s) \simeq \frac{\alpha}{\pi}\left\{1.90 + 0.54(4) + 1.16\right\}\Gamma^{(0)}_{\mathrm{OM}}(2s) = \frac{\alpha}{\pi}\,3.60(4)\Gamma^{(0)}_{\mathrm{OM}}(2s)\,. \tag{31}$$

4. ВРЕМЯ ЖИЗНИ ПАРАДИМЮОНИЯ

Обсудим теперь распад парадимюония. Ведущий вклад в его ширину аналогичен соответствующему вкладу для парапозитрония [15]

$$\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PM}}(ns) = \frac{\alpha^5 m_\mu}{2n^3}\,.$$

Поправки к этому выражению описываются диаграммами на рис. 7. Вклад, соответствующий радиационным поправкам связанной мюон-антимюонной пары (рис. 7*а*), также полностью аналогичен поправке для позитрония [25]:

$$\Delta\Gamma_{rad}(ns) = -\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{20-\pi^2}{4}\,\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PM}}(ns)\,. \tag{32}$$

Другая поправка к двухфотонному распаду отвечает юлинговской поправке к волновой функции (рис. 7*б*). Она зависит от состояния и пропорциональна величине (16), (17). Результаты приведены в табл. 3. Окончательно поправка к двухфотонной ширине имеет вид

$$\Delta\Gamma^{2\gamma}_{\mathrm{PM}}(1s) = \frac{\alpha}{\pi}\,(-1.47)\,\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PM}}(1s) \tag{33}$$

и

$$\Delta\Gamma^{2\gamma}_{\mathrm{PM}}(2s) = \frac{\alpha}{\pi}\,(-1.61)\,\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PM}}(2s)\,. \tag{34}$$

Таблица 3

Поправки порядка $\alpha^6 m$ к ширине распада уровней $1s$ и $2s$ в парадимюонии приведены в относительных единицах $\Delta\Gamma_{PM}(ns) = (\alpha/\pi) C\,\Gamma^{(0)}_{PM}(ns)$. Нумерация вкладов отвечает рис. 7

Вклад	$C(1s)$	$C(2s)$
а	−2.53	−2.53
б	1.06	0.92
в	6.26	6.26
Сумма	4.79	4.65

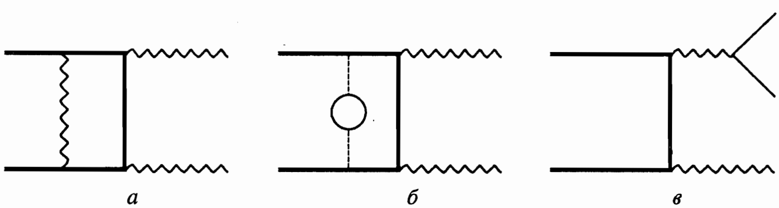


Рис. 7. Радиационные поправки относительного порядка α к амплитуде распада парадимюония: *а* — однопетлевая поправка для аннигиляции связанной мюонной пары; *б* — двухфотонная аннигиляция с юлинговской поправкой к волновой функции; *в* — рождение электрон-позитронной пары. При вычислении диаграмм *а* необходимо вычесть вклад предыдущего порядка

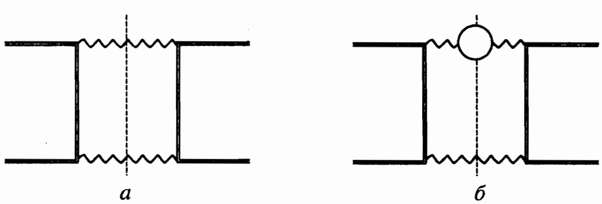


Рис. 8. Некоторые диаграммы для ширины распада парадимюония как мнимой части энергии: *а* — ведущий вклад; *б* — распад с рождением пары и фотона

Третья диаграмма рис. 7 отвечает другому каналу распада: один из фотонов превращается в электрон-позитронную пару, и окончательное состояние оказывается трехчастичным: $ee\gamma$. Вычисление удобно проводить, определяя ширину как мнимую часть энергии. При этом ведущий вклад отвечает мнимой части графиков на рис. 8*а*, а интересующая нас поправка — мнимой части графиков на рис. 8*б*. Снова воспользуемся для поляризационной вставки дисперсионным интегралом (9). Можно поменять порядок вычисления интеграла и мнимой части. В результате имеем

$$\Delta\Gamma^{ee\gamma}_{\rm PM}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\,\frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\,\Gamma^{(0)}(\lambda,0)\,, \tag{35}$$

где $\Gamma^{(0)}(\lambda,0)$ — ширина распада парадимюония на реальный и виртуальный фотоны с массой (8), или в пределе $m_\mu \gg m_e$

$$\Delta\Gamma^{ee\gamma}_{\rm PM}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{9}\right)\Gamma^{(0)}(0,0) + \frac{1}{3}\int\limits_{4m_e^2}^{\infty}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}\,\Gamma^{(0)}(\lambda,0)\right\}. \tag{36}$$

Заметим, что реальная ширина двухфотонного распада равна

$$\Gamma^{(0)}_{\rm PM} = \frac{1}{2}\,\Gamma^{(0)}(0,0)\,. \tag{37}$$

Комбинаторный фактор связан с тем, что на самом деле в распаде PM $\to 2\gamma$ имеются два тождественных безмассовых фотона, тогда как при вычислении $\Gamma^{(0)}(\lambda,0)$ в пределе $\lambda = 0$ предполагается, что фотоны различны. Нетрудно видеть, что если пренебречь массой фотона λ в $\Gamma^{(0)}(\lambda,0)$, то интеграл по дисперсионной переменной разойдется при больших значениях λ (т. е. $v \simeq 1$). Расходимость обрезается в ширине $\Gamma^{(0)}(\lambda,0)$ кинематически: распад возможен лишь в случае $\lambda < 2m_\mu$. В результате вместо расходимости получаем логарифмический вклад в ширину. Вычисление постоянного слагаемого дано в Приложении 2. Результат имеет вид

$$\Delta\Gamma^{ee\gamma}_{\rm PM}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{4}{3}\ln\frac{2m_\mu}{m_e} - \frac{16}{9}\right)\frac{1}{n^3}\Gamma^{(0)}_{\rm PM}(1s)\,, \tag{38}$$

что составляет 1.5% от полной ширины.

Окончательно для парапозитрония получаем

$$\Delta\Gamma_{\rm PM}(1s) = \frac{\alpha}{\pi}\,4.79\Gamma^{(0)}_{\rm PM}(1s) \tag{39}$$

и

$$\Delta\Gamma_{\rm PM}(2s) = \frac{\alpha}{\pi}\,4.65\Gamma^{(0)}_{\rm PM}(1s)\,. \tag{40}$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде всего приведем выражения для времен жизни и сверхтонкого расщепления низших уровней с учетом ведущих радиационных поправок:

$$\tau_{\rm OM}(1s) = 1.7907(8)\cdot 10^{-12}\,\text{с}, \tag{41}$$

$$\tau_{\rm OM}(2s) = 14.331(6)\cdot 10^{-12}\,\text{с}, \tag{42}$$

$$\tau_{\mathrm{PM}}(1s) = 0.59547(33) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{c}, \tag{43}$$

$$\tau_{\mathrm{PM}}(2s) = 4.7653(26) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{c}\,. \tag{44}$$

Вклады отдельных слагаемых приведены в табл. 2 и 3. Вклады следующего порядка оцениваются на уровне 5% от однопетлевых вкладов. Аннигиляционные времена жизни состояний димюония следует сравнить со временем жизни мюона ($\tau_\mu = 2.20 \cdot 10^{-6}$ с) и атомными временами жизни более высоких состояний. Так, например, аннигиляционная ширина уровня $2p$ отличается от ширин s-состояний лишним фактором α^2, и поэтому его время жизни полностью определяется однофотонным переходом[4)] $2p \to 1s$:

$$\tau(2p \to 1s) = 15.4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{c}\,, \tag{45}$$

и оказывается того же порядка, что и приведенные выше аннигиляционные времена для уровней $1s$ и $2s$.

Отметим, что поправки относительного порядка α для ширин и для сверхтонкого расщепления имеют противоположные знаки по сравнению с позитронием. В случае сверхтонкого расщепления (табл. 1) это связано с большим вкладом вставки электронной поляризации вакуума в аннигиляционный фотон. Как мы объяснили выше, логарифмический вклад имеется также и при распаде парадимюония, и он также связан с асимптотикой поляризационного оператора.

Мы полагаем, что димюоний может быть исследован средствами экспериментальной физики высоких энергий, и свойства его низших состояний как (составных) частиц представлены в табл. 4. Для ортодимюония мы добавили также оценку для канала распада ОМ $\to ee\gamma\gamma$, который появляется в следующем порядке теории возмущений. Заметим, что один из каналов распада, возникающий как поправка первого порядка в теории возмущений (ОМ $\to ee\gamma$), составляет 15% и поэтому может быть использован для детектирования одновременно с главным распадом.

Сверхтонкое расщепление в димюонии могло бы также быть измерено средствами физики элементарных частиц как интерференция ортосостояния и парасостояния в поле инфракрасного лазера. Результаты для сверхтонкого расщепления имеют вид

$$E_{hfs}(1s) = 4.23284(35) \cdot 10^{7}\,\mathrm{МГц}, \tag{46}$$

$$E_{hfs}(2s) = 5.28940(34) \cdot 10^{6}\,\mathrm{МГц}\,. \tag{47}$$

Измерение времен жизни и сверхтонкого расщепления с процентной точностью позволит проверить КЭД. Поправки составляют около 1% для ширин и на порядок меньше для сверхтонкого расщепления. При обсуждении различных КЭД-вкладов следует помнить, что часть поправок для сверхтонкого расщепления и распада пара-состояния одинаковы для димюония и позитрония, тогда как другие дают вклад только для димюония. Позитроний является хорошо исследованной системой (см. Приложение 3), и поэтому измерения для димюония дают возможность проверить специфичные для него

[4)] Мы учли зависимость радиационной ширины от массы ядра, которая приводит в нерелятивистском приближении к результату $(1 + Zm/M)^2(m_r^3/m^3)\Gamma_\infty$, где Γ_∞ — вероятность для ядра с бесконечной массой [26].

Таблица 4

Основные свойства низших состояний димюония как составных частиц. Включены моды распада с относительной вероятностью не менее 1%

Состояние	Масса, МэВ	J^{PC}	τ, с	Канал распада	$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, %
РМ $1s$	211.3154	0^{-+}	$0.59547(33)\cdot 10^{-12}$	$\gamma\gamma$	98.5
				$ee\gamma$	1.5
$2s$	211.3164	0^{-+}	$4.7653(26)\cdot 10^{-12}$	$\gamma\gamma$	98.5
				$ee\gamma$	1.5
ОМ $1s$	211.3154	1^{--}	$1.79073(23)\cdot 10^{-12}$	ee	86(4)
				$ee\gamma$	13(4)
				$ee\gamma\gamma$	~ 1
$2s$	211.3164	1^{--}	$14.3305(19)\cdot 10^{-12}$	ee	86(4)
				$ee\gamma$	13(4)
				$ee\gamma\gamma$	~ 1

КЭД-вклады, которые составляют около 0.7% для сверхтонкого расщепления и 1.7% для ширины распада парадимюония. Для проверки КЭД можно также измерять парциальные ширины, которые для некоторых (не главных) каналов достигают 15% от полной ширины. Измерение обсуждаемых величин позволит проверить КЭД для больших (по сравнению с массой электрона) времениподобных импульсов и измерить при $q^2 = 4m_\mu^2$ адронную вакуумную поляризацию, вклад которой составляет около 0.1% от ширины распада ортодимюония.

В заключение сформулируем основные свойства димюония, которые представляют интерес с экспериментальной точки зрения. Спектр состояний димюония представляет собой семейство нейтральных частиц, интерферирующих в поле инфракрасного лазера. Времена жизни находятся в пикосекундном диапазоне, а продуктами распада являются ультрарелятивистские электроны и позитроны и жесткие гамма-кванты (см. табл. 4). Таким образом, связанная система $\mu^+\mu^-$ может быть хорошей тестовой частицей для отработки методики регистрации экзотических нейтральных элементарных частиц, слабо взаимодействующих с нормальным веществом.

Часть данной работы была выполнена во время пребывания одного из авторов (С. Г. К) в Дрездене и он благодарит Институт физики комплексных систем им. Макса Планка и Технический университет за поддержку. Работа была частично поддержана грантами DFG SO333/1-2 (У. Д. Й. и Г. З.) и №95-02-03977 Российского фонда фундаментальных исследований (С. Г. К и В. Г. И).

6. ДОПОЛНЕНИЕ

Когда статья была принята к печати, наше внимание было обращено на работу [34]. Мы благодарны В. В. Репко (W. W. Repko) за сообщение об этой работе. Полученная в ней оценка вклада в сверхтонкое расщепление вставки адронной поляризации вакуума находится в согласии с нашим более точным вычислением. Мы также хотели бы отметить, что образование димюония наряду с упомянутыми во Введении работами [8, 10] рассматривается также в [35].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вклад адронной поляризации в сверхтонкое расщепление

Вклад адронной поляризации в сверхтонкое расщепление и ширину распада ортодимюония удобно представить в виде

$$\Delta E_{hadr}(ns) = \frac{\alpha}{\pi} C \frac{E_F}{n^3} = \frac{3}{7}\frac{\alpha}{\pi} C'_{hadr}\frac{E_F}{n^3}, \tag{48}$$

$$\Delta\Gamma_{hadr}(ns) = 2\,\frac{\alpha}{\pi}\,C'_{hadr}\,\Gamma^{(0)}_{\text{OM}}(ns)\,. \tag{49}$$

Коэффициент C'_{hadr} равен отношению свободного фотонного пропагатора и поправки со вставкой поляризации вакуума при времениподобном импульсе $q^2 = (2m_\mu)^2$.

Поправка к пропагатору представляется при помощи дисперсионного интеграла (7). Следуя [20], выделим в спектральной функции $\rho(s)$ π-мезонный вклад. Он имеет вид

$$\rho_{\pi\pi}(s) = \frac{(s - 4\,m_\pi^2)^{3/2}}{12\,s^{5/2}}\,|F_\pi(s)|^2\,, \tag{50}$$

где $F_\pi(s)$ — формфактор π-мезона, который необходим ввиду сильного взаимодействия внутри пионной петли. Формфактор используется в параметризации работы [21]:

$$F_\pi(s) = (m_\rho^2 + d m_\rho\Gamma_\rho)\left\{(m_\rho^2 - s) + \left(\Gamma_\rho\frac{m_\rho^2}{k_\rho^3}\left[k(s)^2\left(h(s)-h_\rho\right) + k_\rho^2 h'(m_\rho^2)(m_\rho^2 - s)\right]\right) - \right.$$
$$\left. - \,i\left[m_\rho\Gamma_\rho\left(\frac{k(s)}{k_\rho}\right)^3\frac{m_\rho}{\sqrt{s}}\right]\right\}^{-1}, \tag{51}$$

где введены вспомогательные обозначения

$$d = \frac{3}{\pi}\frac{m_\pi^2}{k_\rho^2}\ln\left(\frac{m_\rho + 2\,k_\rho}{2\,m_\pi}\right) + \frac{m_\rho}{2\pi\,k_\rho} - \frac{m_\pi^2\,m_\rho}{\pi\,k_\rho^3} \approx 0.48, \tag{52}$$

$$k(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_\pi^2}, \tag{53}$$

$$h(s) = \frac{2}{\pi}\,\frac{k(s)}{\sqrt{s}}\,\ln\frac{\sqrt{s} + 2\,k(s)}{2\,m_\pi}, \tag{54}$$

$h'(s)$ — производная $h(s)$ по s, $k_\rho = k(m_\rho^2)$ и $h_\rho = h(m_\rho^2)$. При вычислении вклада пионной петли использовались величины $\Gamma_\rho = 150.7(1.2)$ МэВ, $m_\rho = 768.5(6)$ МэВ [7]. Результат составил

$$C'_{\pi\pi} = 4\,m_\mu^2 \int\limits_{4\,m_\pi^2}^{\infty} ds\, \frac{\rho_{\pi\pi}(s)}{4\,m_\mu^2 - s} = -0.128\,. \tag{55}$$

Нетрудно убедиться, что величина вклада определяется ρ-мезонным полюсом. Действительно, в полюсном приближении

$$\rho_\rho(s) = \frac{4\pi^2}{f_\rho^2}\,\delta(s - m_\rho^2)$$

и результат при $f_\rho^2/4\pi = 2.2$ [22],

$$C'_\rho = -0.116, \tag{56}$$

близок к полученному ранее.

Необходимо далее добавить к (55) вклад других резонансов (ω и ϕ). Это можно сделать в полюсном приближении. Соответствующие параметры равны $f_\omega^2/4\pi = 18(2)$, $f_\phi^2/4\pi = 11(2)$ [20, 22], $m_\omega = 782$ МэВ, $m_\phi = 1019$ МэВ [7]. Результаты представлены в табл. 5.

Теперь необходимо добавить нерезонансный вклад. Мы оцениваем вклад фона следующим образом: весовая функция определяется как

Таблица 5

Вклады адронной поляризации вакуума в сверхтонкое расщепление и ширину ортодимюония: $\pi\pi$ — вклад пионной петли с учетом взаимодействия; ω и ϕ — вклады соответствующих резонансов в полюсном приближении; фон отвечает нерезонансным вкладам в дисперсионный интеграл выше 1 ГэВ. Поправки представлены в терминах C'_{hadr} (см. (48), (49))

Вклад	C'
$\pi\pi$	$-0.128(13)$
ω	$-0.014(3)$
ϕ	$-0.012(2)$
фон (1–4 ГэВ)	$-0.028(6)$
фон (выше 4 ГэВ)	0.04
Сумма	$-0.186(22)$

$$\rho_>(s) = \frac{R(s)}{3s}, \tag{57}$$

где

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}, \tag{58}$$

а значение вспомогательной функции $R(s)$ полагается равным $R \simeq 2$ при $\sqrt{s}$ между 1 и 4 ГэВ и $R \simeq 4$ — выше 4 ГэВ (см., например, [7]).

Все результаты для адронной поляризации представлены в табл. 5. Они составили

$$\Delta E_{hadr}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\Big[-0.080(9)\Big]\frac{E_F}{n^3}, \tag{59}$$

или 0.02% для сверхтонкого расщепления и

$$\Delta\Gamma_{hadr}(ns) = \frac{\alpha}{\pi}\Big[-0.37(4)\Big]\Gamma^{(0)}_{\text{OM}}(ns), \tag{60}$$

или 0.09% для ширины распада ортопозитрония.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Распад парадимюония на фотон и электрон-позитронную пару

Как мы уже отметили выше, для вычисления вероятности распада PM $\to ee\gamma$ необходимо найти интеграл (36). Рассмотрим величину

$$C_{ee\gamma} = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{9}\right)\frac{\Gamma^{(0)}(0,0)}{\Gamma^{(0)}_{\text{PM}}} + \frac{1}{3}\int\limits_{4m_e^2}^{\infty}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}\frac{\Gamma^{(0)}(\lambda,0)}{\Gamma^{(0)}_{\text{PM}}}\right\}, \tag{61}$$

или

$$C_{ee\gamma} = 2\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{9}\right) + \frac{1}{3}\int\limits_{4m_e^2}^{\infty}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}\frac{\Gamma^{(0)}(\lambda,0)}{\Gamma^{(0)}(0,0)}\right\}. \tag{62}$$

Обсудим теперь амплитуду излучения двух фотонов, один из которых безмассовый (обозначим его 4-импульс через k_ν). Трехмерными импульсами мюона и антимюона в системе центра масс атома можно пренебречь, и, действуя стандартным способом, нетрудно убедиться, что амплитуда пропорциональна величине

$$\frac{\gamma_i(\gamma_j k_j)\gamma_l}{2k_0 m},$$

где индексы у всех γ-матриц чисто пространственные. Так как фотон реален, эта величина зависит не от величины импульса $\mathbf{k}$, а только от его направления. Зависимость от «массы» λ одного из фотонов содержится теперь только в фотонных пропагаторах и интегралах по энергии и величине импульса, которые при переходе к мнимой части снимаются δ-функциями:

$$X(\lambda)=\int k_0\int d|\mathbf{k}|\,\mathbf{k}^2\,\delta(k^2)\,\delta(k_1^2)\,\theta(k_0)\,\theta(2m_\mu-k_0),$$

где $k_1=\Big(2m_\mu-k_0,\,-\mathbf{k}\Big)$ — импульс массивного фотона:

$$k_1^2=4m_\mu^2-4m_\mu k_0+k^2.$$

Кинематика излучения полностью определяется δ-функциями и отвечает условию

$$|\mathbf{k}|=m_\mu-\frac{\lambda^2}{4m_\mu},$$

которое приводит к результату

$$X(\lambda)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{\lambda^2}{4m_\mu^2}\right)\theta(2m_\mu-\lambda).$$

Следует также отметить, что нет никаких других интегрирований: кинематика фиксирует все, кроме направления излучения, однако, так как фотоны летят в противоположных направлениях, нет никакого относительного угла и после усреднения по поляризациям гамма-квантов суммирование по углам оказывается тривиальным. В итоге получаем однократный интеграл

$$C_{ee\gamma}=2\,\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{9}\right)+\frac{1}{3}\int\limits_{4m_e^2}^{\infty}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}\,\frac{X(\lambda)}{X(0)}\right\}=$$

$$=2\,\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{9}\right)+\frac{1}{3}\int\limits_{4m_e^2}^{4m_\mu^2}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{\lambda^2}{4m_\mu^2}\right)\right\},\qquad(63)$$

вычисление асимптотики которого не составляет труда и приводит к результату (38).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Сверхтонкое расщепление и распад позитрония

Здесь мы обсудим текущее состояние теории и эксперимента для сверхтонкого расщепления основного состояния позитрония и для распада парапозитрония. Распад ортопозитрония происходит уже в главном приближении не так, как в димюонии, и поэтому его сравнение с димюонием не представляет интереса.

Сверхтонкое расщепление основного состояния в позитронии описывается выражением [27, 28]

$$E^{\rm Ps}_{hfs}(1s)=\left(1-2.1179\,\frac{\alpha}{\pi}+0.357\,\alpha^2\ln\frac{1}{\alpha}+[-0.84(6)+C_2]-1.5\,\alpha^3\ln^2\frac{1}{\alpha}\right)E_F,\qquad(64)$$

где энергия Ферми определена в тексте статьи, а неизвестный коэффициент C_2 отвечает двухпетлевой поправке к однофотонной аннигиляции и связанным с ней вкладом. Численно теоретическое выражение приводит к результату [27][5)]

[5)] Частное сообщение Г. Адкинса (G. Adkins) и П. Лабелля (P. Labelle).

$$E^{\mathrm{Ps}}_{hfs}(1s) = [203395.3(7) + 4.0\,C_2]\ \text{МГц}. \tag{65}$$

Это следует сравнить с экспериментальными результатами, составляющими 203387.0(16) МГц [29], 203384.9(12) МГц [30] и 203389.1(7) МГц [31]. Погрешность измерения находится на уровне $\alpha^2 E_F$. В настоящее время завершается вычисление коэффициента C_2[6)].

Распад парапозитрония. Ширина распада парапозитрония вычислена и измерена не со столь высокой точностью. Теоретическое выражение имеет вид [32]

$$\Gamma_{\mathrm{PP}}(1s) = \Gamma^{(0)}_{\mathrm{PP}}(1s)\left(1 - 2.533\,\frac{\alpha}{\pi} + 2\,\alpha^2 \ln\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{(0)}_{\mathrm{PP}}(1s), \tag{66}$$

где ведущий член определен аналогично (6). Поправки порядка α^2 неизвестны. Экспериментальный результат [33] имеет погрешность $2\cdot 10^{-4}$ в относительных единицах и находится в согласии с теоретическим.

Литература

1. R. Coombes, R. Flexer, A. Hall et al., Phys. Rev. Lett. **37**, 249 (1976).
2. S. H. Aronson, R. H. Bernstein, G. J. Bock et al, Phys. Rev. Lett. **48**, 1078 (1982); Phys. Rev. D **33**, 3180 (1986).
3. Г. Д. Алексеев, А. И. Барановский, О. Е. Горчаков и др., ЯФ **40**, 139 (1984); Л. Г. Афанасьев, Н. И. Балалыкин, О. Е. Горчаков и др., ЯФ **50**, 7 (1989).
4. L. G. Afanasyev, A. S. Chvyrov, V. V. Karpukhin et al., Phys. Lett. B **236**, 116 (1990); Л. Г. Афанасьев, О. Е. Горчаков, В. В. Карпухин и др., ЯФ **51**, 1040 (1990).
5. L. G. Afanasyev, A. S. Chvyrov, O. E. Gorchakov et al., Phys. Lett. B **308**, 200 (1993); L. G. Afanasyev, A. S. Chvyrov, O. E. Gorchakov et al., Phys. Lett. B **338**, 478 (1994).
6. L. R. Wiencke, M. D. Church, E. E. Gottschalk et al., Phys. Rev. D **46**, 3709 (1992); J. Uribe, E. P. Hartouni, D. A. Jensen et al., Phys. Rev. D **49**, 4373 (1994); L. R. Wiencke, Ph. D. Thesis, Columbia University (1993).
7. R. M. Barnett, C. D. Carone, D. E. Groom et al., Phys. Rev D **54**, 1 (1996).
8. С. М. Биленький, Н. В. Хьеу, Л. Л. Неменов, Ф. Г. Ткебучава, ЯФ **10**, 812 (1969).
9. S. Wycech and A. M. Green, Nucl. Phys. A **562**, 446 (1993); З. К. Силагадзе, Письма в ЖЭТФ **60**, 673 (1994); V. Lyubovitskij and A. Rusetsky, Phys. Lett. B **389**, 181 (1996); О. Е. Горчаков, А. В. Купцов, Л. Л. Неменов, Д. Ю. Рябиков, ЯФ **59**, 2015 (1996).
10. Л. Л. Неменов, ЯФ **15**, 1047 (1972); Г. А. Козлов, ЯФ **48**, 265 (1988).
11. Л. Л. Неменов, ЯФ **16**, 125 (1972); **41**, 981 (1985).
12. J. Malefant, Phys. Rev. D **36**, 863 (1987).
13. R. Karplus and A. Klein, Phys. Rev. **87**, 848 (1952).
14. T. Fulton and P. C. Martin, Phys. Rev. **95**, 811 (1954).
15. J. A. Wheeler, Ann. New Acad. Sci. **95**, 219 (1946).
16. С. Г. Каршенбойм, ЯФ **56**, 115 (1993).
17. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **112**, 805 (1997).
18. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **109**, 1219 (1996); V. G. Ivanov and S. G. Karshenboim, Phys. Lett. A **210**, 313 (1996).
19. A. Ore and J. Powell, Phys. Rev. **75**, 1696 (1949).

6) Г. Адкинс (G. Adkins), частное сообщение.

20. J. R. Sapirstein, E. A. Terray, and D. R. Yennie, Phys. Rev. D **29**, 2290 (1984).
21. G. J. Gounaris and J. J. Sakurai, Phys. Rev. Lett. **21**, 244 (1968).
22. T. H. Bauer, R. D. Spital, D. R. Yennie, and F. M. Pipkin, Rev. Mod. Phys. **50**, 261 (1978).
23. Ю. Швингер, *Частицы. Источники. Поля.* Т. 2. Мир, Москва (1976).
24. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
25. I. Harris and L. M. Brown, Phys. Rev. **105**, 1656 (1957).
26. Z. Fried and A. D. Martin, Nuovo Cim. **29**, 574 (1963).
27. С. Г. Каршенбойм, ЯФ **56**, 155 (1993).
28. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **103**, 1105 (1993); G. S. Adkins, Y. M. Aksu, and M. H. T. Bui, Phys. Rev. A **47**, 2640 (1993).
29. A. P. Mills and G. H. Bearman, Phys. Rev. Lett. **34**, 246 (1975).
30. P. O. Egan, V. W. Hughes, and M. H. Yam, Phys. Rev. A **15**, 251 (1977).
31. M. Ritter, P. O. Egan, V. W. Hughes, and K. A. Woodle, Phys. Rev. A **30**, 1331 (1984).
32. I. B. Khriplovich and A. S. Yelkhovsky, Phys. Lett. B **246**, 520 (1990).
33. A. H. Al-Ramadhan and D. W. Gidley, Phys. Rev. Lett. **72**, 1632 (1994).
34. D. A. Owen and W. W. Repko, Phys. Rev. A **5**, 1570 (1972).
35. E. Holvik and H. A. Olsen, Phys. Rev. D **35**, 2124 (1987); В. Л. Любошиц, ЯФ **45**, 1099 (1987).