

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

*А. И. Белоусов, С. А. Верзиков, Ю. Е. Лозовик**

*Институт спектроскопии Российской академии наук
142092, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 июня 1997 г.

Бозонная решеточная модель Хаббарда используется для изучения роли квантовых флуктуаций фаз и локальной плотности сверхтекучей компоненты в установлении глобального сверхпроводящего состояния системы мезоскопических джозефсоновских контактов или гранул. При различных средних числах заполнения узлов n_0 (числах куперовских пар на гранулу) квантовым методом Монте-Карло проводится расчет плотности сверхтекучей компоненты и флуктуаций числа частиц на узлах двумерной решетки. Для системы сильно взаимодействующих бозонов граница упорядоченного сверхпроводящего состояния лежит выше соответствующей границы ее квазиклассического предела — квантовой XY-модели — и приближается к ней с ростом n_0 . При слабом взаимодействии бозонов (малых квантовых флуктуациях фазы) относительные флуктуации модуля параметра порядка бозонной модели Хаббарда существенны при $n_0 < 10$, а в области существенных квантовых флуктуаций фазы — при $n_0 < 8$, что определяет область мезоскопичности системы. Сравнение результатов компьютерного эксперимента с теоретическими расчетами показывает, что теория среднего поля дает качественно верную оценку различия фазовых диаграмм квантовой XY-модели и модели Хаббарда. Для количественной оценки этого различия используется разложение свободной энергии и термодинамических средних модели Хаббарда по степеням $1/n_0$ с использованием метода функционального интегрирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов микролитографии привело к значительным успехам в исследовании мезоскопических систем [1], развитию одноэлектроники [2] и появлению новых фундаментальных концепций в теории сверхпроводящих фазовых переходов в квантовых точках [3]. Представляет большой интерес также изучение свойств протяженных систем из мезоскопических объектов. К системам такого рода можно отнести, например, решетки мезоскопических джозефсоновских контактов, системы, состоящие из ультрамалых гранул, либо сверхтекучий гелий в пористой среде [4а].

Гранулированные сверхпроводники и системы джозефсоновских контактов, как правило, описывают при помощи различных модификаций квантовой XY-модели (см. ниже, (2)). Однако такое описание корректно, если при рассматриваемых условиях флуктуации модуля сверхпроводящего или сверхтекучего параметра порядка несущественны [4б]. Для исследования роли флуктуаций модуля параметра порядка в мезоскопических системах необходимо использовать другие, в некотором смысле более общие модели.

*E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

В настоящей работе в качестве такой модели рассматривается система взаимодействующих бозонов на квадратной решетке $N \times N$ с расстоянием d между узлами. Один узел в такой модели соответствует одной поре с гелием и т. п. Гамильтониан системы выбирается в виде

$$\hat{H} = \frac{t}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (2a^\dagger_i a_i - a^\dagger_i a_j - a^\dagger_j a_i) + \frac{U}{2} \sum_i (a^\dagger_i a_i - n_0)^2. \quad (1)$$

Здесь операторы $a^\dagger_i (a_i)$ — операторы рождения (уничтожения) бозона на узле $i = \overline{1, N^2}$, подчиняющиеся обычным бозевским коммутационным соотношениям. Первый член в гамильтониане соответствует «кинетической» энергии частиц, энергия t перескока частицы массы m может быть записана как $t = \hbar^2/md^2$. Сумма $\sum_{\langle i,j \rangle}$ берется по всем неповторяющимся парам $\langle i,j \rangle$ соседних узлов решетки. Второй член в (1) описывает взаимодействие частиц с характерной энергией $U > 0$. Качественно такой гамильтониан может также приближенно описывать систему мезоскопических сверхпроводящих гранул, причем в такой постановке задачи мы отвлекаемся от интересного самого по себе вопроса о переходе в сверхпроводящее состояние отдельной гранулы (см., например, [5] и цитируемую литературу), во многом напоминая задачу о сверхтекучести в атомных ядрах.

Система с гамильтонианом (1) имеет богатую фазовую диаграмму [6, 7], содержащую фазу моттовского изолятора (при $T = 0$) [6, 8], нормального металла и сверхпроводящую фазу. В данной работе мы будем интересоваться системой (1) при целочисленном заполнении, когда среднее число бозонов на узле $n_0 = \langle a^\dagger_i a_i \rangle$ — целое. При этом условии, при $T = 0$, бозонная модель Хаббарда лежит в том же классе универсальности (см. [6–9]), что и квантовая XY-модель:

$$\hat{H}_{XY} = J \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)) - \frac{U}{2} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)^2, \quad (2)$$

где фазы параметра порядка $\varphi_i \in [0, 2\pi)$. При конечных температурах требование целочисленности среднего числа заполнения $n_0 = k$ смягчаются. В этом случае поведение системы будет непрерывным образом зависеть от среднего числа заполнения, причем ее критические свойства останутся неизменными в полосе $n_0 = k \pm \delta n_0$, ширина $2\delta n_0$ которой должна уменьшаться с понижением температуры.

Состояние системы (2), имеющей при конечных температурах сверхпроводящую и нормальную (металлическую) фазы, описывается двумя безразмерными управляющими параметрами: температурой в единицах константы связи $T = k_b T/J$ и безразмерным квантовым параметром $q = \sqrt{U/J}$, который определяет характерную величину нулевых флуктуаций фазы. Соответствующими безразмерными управляющими параметрами для модели Хаббарда (1) при $J = tn_0$ являются безразмерная температура $T = k_b T/tn_0$ и квантовый параметр $q = \sqrt{U/tn_0}$.

Модель (2) может быть получена из (1) пренебрежением относительными флуктуациями модуля параметра порядка $\Phi_i = \Delta_i e^{j\varphi_i}$, что справедливо (при $U \neq 0$) в случае больших плотностей n_0 частиц (см. ниже). Таким образом, решеточная бозонная модель Хаббарда действительно может рассматриваться как более общая при изучении эффектов упорядочения в системе гранулированных сверхпроводников, тонких пленках и т. п. В этой связи представляет интерес последовательное исследование влияния

квантовых флуктуаций параметра порядка на установление глобального сверхпроводящего состояния и, в частности, сравнение фазовых диаграмм двух модельных систем (1) и (2) на плоскости $\{q, T\}$.

Весьма интересным представляется также вопрос о возможности обнаружения в системах типа (1) явлений возвратной сверхпроводимости, когда в некоторой области изменения квантового параметра q разупорядочение наступает не только с повышением, но и с понижением температуры T . В рамках квантовой XU -модели возможность существования возвратных эффектов связывалась с адекватным заданием области определения фаз параметра порядка [10], эффектами утечки или учета взаимных емкостей гранул массива [11, 12]. В настоящей работе показано, что учет флуктуаций модуля в рамках модели (1) не приводит к появлению возвратности, по крайней мере в исследованной области изменения управляющих параметров.

Изложение материала организовано следующим образом.

В разд. 2 проводится сравнение фазовых диаграмм систем (1) и (2), полученных в приближении среднего поля. Разложением свободной энергии, среднеквадратичных флуктуаций и плотности сверхтекучей компоненты бозонной модели Хаббарда по параметру $1/n_0$ получены поправки к аналогичным величинам, рассчитанным в рамках квантовой XU -модели и определен количественный критерий возможности отделения флуктуаций модуля параметра порядка от флуктуаций его фазы.

В разд. 3 приведено краткое описание использованного квантового метода моделирования Монте-Карло бозонной решеточной системы и квантовой XU -модели.

В разд. 4 проводится обсуждение и сравнение результатов теоретического рассмотрения и компьютерного эксперимента.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ БОЗОННОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА И КВАНТОВОЙ XU -МОДЕЛИ

2.1. Приближение среднего поля

Приближение среднего поля [10] состоит в замене исходного гамильтониана системы, который может быть записан в виде (см. (1), (2))

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i^0 + \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{V}_{ij}, \quad (3)$$

гамильтонианом среднего поля, зависящим от вариационного параметра α :

$$\hat{H}_{mf}(\alpha) = \sum_i \hat{H}_i^0 + \alpha \sum_i \hat{V}_i, \quad (4)$$

где оператор среднего поля \hat{V} определяется условием

$$\frac{\text{tr}(V_{ij} \exp(-\beta \hat{H}_{mf}))}{\text{tr}(\exp(-\beta \hat{H}_{mf}))} \equiv \langle \hat{V}_{ij} \rangle_{mf} = \frac{1}{K} \langle \hat{V}_i \rangle_{mf} \langle \hat{V}_j \rangle_{mf}.$$

Постоянная K зависит от конкретного вида энергий взаимодействия \hat{V}_{ij} , \hat{V}_i . Значение параметра α определяется при помощи вариационного принципа Гиббса–Боголюбова

из требования минимума пробной свободной энергии

$$F^t(\alpha) \equiv F_{mf}(\alpha) + \langle \hat{H} - \hat{H}_{mf}(\alpha) \rangle_{mf}.$$

Обращение вариационного параметра α в нуль свидетельствует о разупорядоченности системы, и в приближении среднего поля линия $\alpha(q, T) = 0$ может рассматриваться в качестве оценки границы упорядоченной фазы.

Проводя несложные вычисления, можно показать, что на границе упорядоченного состояния имеет место следующее общее соотношение:

$$1 = -\frac{z}{K} \int_0^\beta dt \langle \hat{V}(t) \hat{V}(0) \rangle_{mf}, \tag{5}$$

$$\hat{V}(t) = e^{t\hat{H}} \hat{V} e^{-t\hat{H}},$$

где z — число ближайших соседей ($z = 4$ для двумерной квадратной решетки).

Для квантовой XY-модели с гамильтонианом (2) естественно выбрать

$$\hat{V}_i = -zJ \cos \varphi_i / 2,$$

когда

$$K = -Jz^2/4, \quad \alpha = 2 \langle \cos \varphi_i \rangle_{mf}.$$

Применение формулы (5) дает известное [10] уравнение для определения границы упорядоченной фазы $T = T^c(q)$:

$$\frac{q^2}{z} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\exp(-q^2 n^2 / 2T) - \exp(-q^2 (n+1)^2 / 2T)) / (2n+1)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-q^2 n^2 / 2T)}. \tag{6}$$

Решение этого уравнения показано на рис. 1 сплошной линией.

Для применения изложенного выше метода к решеточной модели Хаббарда требуется рассматривать систему в рамках большого канонического ансамбля, когда

$$\hat{H}_i^0 = \frac{U}{2} (a_i^\dagger a_i - n_0)^2 + \frac{zt}{2} a_i^\dagger a_i - \mu a_i^\dagger a_i, \tag{7}$$

$$V_{ij} = -\frac{t}{2} (a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i),$$

где μ — химический потенциал системы. Выбор

$$\hat{V}_i = -zt(a_i^\dagger + a_i)/4$$

приводит к

$$K = -tz^2/4, \quad \alpha = \langle a_i^\dagger + a_i \rangle_{mf}.$$

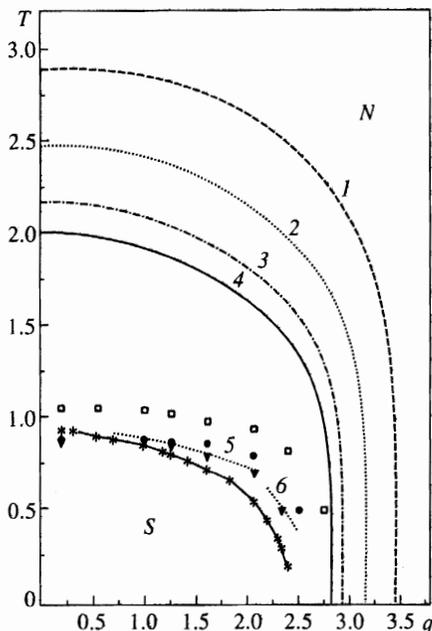


Рис. 1. Фазовая диаграмма модели Хаббарда (1) и квантовой XY-модели (2). *S* — сверхпроводящее состояние, *N* — нормальное состояние. Результаты расчета по теории среднего поля: $n_0 = 1$ (1); 2 (2); 6 (3); 4 — квантовая XY-модель ($n_0 = \infty$). Результаты $(1/n_0)$ -разложения: $n_0 = 6$ (5); 14 (6). Здесь и далее символы обозначают результаты квантовых расчетов Монте-Карло: пустые — $N = 6$, закрашенные — $N = 4$, с точкой внутри — $N = 10$; квадраты — $n_0 = 1$, треугольники — $n_0 = 2$, кружки — $n_0 = 3$, ромбы — $n_0 = 4$, перевернутые треугольники — $n_0 = 6$, звездочки — квантовая XY-модель

Уравнение (5) в данном случае имеет вид

$$\frac{q^2}{z} = \frac{\sum_{n=-n_0}^{\infty} (n+n_0+1) (\exp(-q^2(n-\eta)^2/2T) - \exp(-q^2(n+1-\eta)^2/2T)) / (2n+1-2\eta)}{n_0 \sum_{n=-n_0}^{\infty} \exp(-q^2(n-\eta)^2/2T)}, \quad (8)$$

$$\eta = \frac{\mu}{U} - \frac{z}{2q^2 n_0}.$$

Химический потенциал μ находится из уравнения

$$\sum_{n=-n_0}^{\infty} n \exp(-q^2(n-\eta)^2/2T) = 0, \quad (9)$$

которое соответствует выбору среднего числа частиц на узел, равного n_0 . Отметим, что в пределе $n_0 \rightarrow \infty$ имеем $\eta = 0$ и выражение (8), как нетрудно видеть, переходит в (6).

Решая уравнения (8) и (9) совместно, получаем оценку границы упорядоченной фазы, показанную на рис. 1. Для сравнения приведены графики для средних чисел заполнения $n_0 = 1, 2, 6$. Как видно из рис. 1, для любых взаимодействий U оценка границы упорядоченного состояния модели Хаббарда, проведенная по теории среднего поля, лежит выше соответствующей границы XY-модели и приближается к ней с увеличением среднего числа заполнения n_0 узлов решетки. Расчет в рамках приближения среднего поля показывает, что приближенное совпадение двух фазовых диаграмм происходит при $n_0 \geq 25$.

2.2. Вычисление поправок методом функционального интегрирования

Попытаемся уточнить качественную оценку разности фазовых диаграмм моделей (1) и (2), полученную в приближении среднего поля. Для этого воспользуемся методом функционального интегрирования.

Статистическая сумма модели (1) может быть записана через функциональный интеграл по комплексному бозе-полю Φ в виде [9]

$$\begin{aligned}
 Z_h &= \text{tr} (e^{-S}) = \int D(\Phi, \Phi^*) e^{-S(\Phi, \Phi^*)}, \\
 S(\Phi, \Phi^*) &= \int_0^\beta \left[\sum_i \dot{\Phi}_i \Phi_i^* + \frac{t}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (|\Phi_i|^2 + |\Phi_j|^2 - \Phi_i^* \Phi_j - \Phi_j^* \Phi_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{U}{2} \sum_i (|\Phi_i|^2 - n_0)^2 \right] d\tau, \\
 \Phi_i &= \Phi_i(\tau), \quad \Phi_i^* = \Phi_i^*(\tau).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Проводя в (10) замену переменных $\Phi_i = \sqrt{n_0 + \delta n_i} e^{j\varphi_i}$, где n_0 — целое число, и учитывая периодичность функций $\Phi_i(\tau)$, $\Phi_i^*(\tau)$ по мнимому времени, имеем

$$\begin{aligned}
 Z_h &= \int D(\delta n, \varphi) e^{-S(\delta n, \varphi)}, \\
 S(\delta n, \varphi) &= \int_0^\beta \left[\frac{U}{2} \sum_i (\delta n_i)^2 + \tilde{j} \sum_i \delta n_i \dot{\varphi}_i + \right. \\
 &\quad \left. + t n_0 \sum_{\langle i,j \rangle} \left(1 + \frac{\delta n_i + \delta n_j}{2n_0} - \sqrt{\left(1 + \frac{\delta n_i}{n_0}\right) \left(1 + \frac{\delta n_j}{n_0}\right)} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right) \right] d\tau, \\
 \delta n_i &= \delta n_i(\tau), \quad \varphi_i = \varphi_i(\tau).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Увеличение среднего числа частиц на узле при фиксированных $J = t n_0$ и U приводит (11) к виду статистической суммы квантовой XY -модели. Действительно, при $n_0 \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
 Z_h &\rightarrow \int D(\delta n, \varphi) \exp \left\{ - \int_0^\beta \left[\tilde{j} \sum_i \delta n_i \dot{\varphi}_i + J \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)) + \frac{U}{2} \sum_i (\delta n_i)^2 \right] d\tau \right\} = \\
 &= Z_n \int D(\varphi) \exp \left\{ - \int_0^\beta \left[\sum_i \frac{\dot{\varphi}_i^2}{2U} + J \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)) \right] d\tau \right\} = Z_n Z_{XY}, \tag{12}
 \end{aligned}$$

где множитель Z_n появился в результате интегрирования (11) по флуктуациям модуля параметра порядка, которое в использованном приближении может быть отделено от интегрирования по фазам. Из (12) видно, что критическое поведение системы взаимодействующих бозонов на решетке (в исследуемом пределе $n_0 \rightarrow \infty$) определяется флуктуациями фаз φ_i и совпадает с критическим поведением квантовой XY -модели.

Интересуясь степенью близости бозонной модели Хаббарда при больших, но конечных средних числах заполнения n_0 к квантовой XY-модели (12), проведем разложение свободной энергии, плотности сверхтекучей компоненты и среднеквадратичных флуктуаций чисел частиц модели (1) по степеням $1/n_0$ до второго порядка включительно. Полученные поправки к соответствующим величинам, найденным по квантовой XY-модели (12), могут служить количественной мерой отличия фазовых диаграмм рассматриваемых систем.

Для свободной энергии F , среднеквадратичных флуктуаций числа частиц δn^2 и доли сверхтекучей компоненты ν_s (модуля спиральности γ в случае XY-модели) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_h &= F_{xy} - \frac{1}{\beta} \ln(Z_n) + \frac{1}{2n_0^2} F^{(2)} + \dots, \\ \delta n_h^2 &= \delta n_{xy}^2 + \frac{1}{2n_0^2} \Psi^{(2)} + \dots \\ \nu_s &= \gamma + \frac{1}{2n_0^2} \Gamma^{(2)} + \dots \end{aligned} \tag{13}$$

Поправки первого порядка равны нулю вследствие инвариантности действия (12) XY-модели относительно операции обращения «времени».

После интегрирования по переменным $\{\delta n_i\}$ и выполнения дискретизации «времени» для поправок $F^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$, $\Gamma^{(2)}$ в (13) получаем выражения, пригодные для их последующей оценки траекторным квантовым методом Монте-Карло по квантовой XY-модели (2). Для поправки к свободной энергии имеем

$$\begin{aligned} \beta F^{(2)} \equiv \langle \tilde{F}^{(2)} \rangle_{xy} &= \left\langle \frac{1}{4q^2} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\left(2 - \frac{PT}{q^2} (\dot{\varphi}_i^p - \dot{\varphi}_j^p)^2 \right) \cos(\varphi_i^p - \varphi_j^p) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4q^4} \sum_{p=0}^{P-1} \left(\sum_i \dot{\varphi}_i^p \square_i^p \right)^2 - \frac{1}{4PTq^2} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i (\square_i^p)^2 \right\rangle_{xy} \end{aligned} \tag{14}$$

Определяя (см. (26)) $\delta n_{xy}^2 \equiv \langle \tilde{\Psi} \rangle_{xy}$, для поправки $\Psi^{(2)}$ к среднеквадратичным флуктуациям числа частиц в XY-модели имеем

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)} &= \langle \tilde{\Psi} \rangle_{xy} \langle \tilde{F}^{(2)} \rangle_{xy} - \langle \tilde{\Psi} \tilde{F}^{(2)} \rangle_{xy} - \frac{4T}{q^2 N^2} \langle \tilde{F}^{(2)} \rangle_{xy} - \\ &- \frac{1}{2q^2 N^2 P} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \left[(\square_i^p)^2 + \frac{2PT}{q^2} (\square_i^p \dot{\varphi}_i^p)^2 + TP(4 - \square_i^p) \right] \right\rangle_{xy} \end{aligned} \tag{15}$$

Вводя величину $\tilde{\Gamma}$ такую, что $\gamma \equiv \langle \tilde{\Gamma} \rangle_{xy}$ (см. (23)), для поправки $\Gamma^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= \langle \tilde{\Gamma} \rangle_{xy} \langle \tilde{F} \rangle_{xy} - \langle \tilde{\Gamma} \tilde{F} \rangle_{xy} - \frac{1}{4N^2 P q^2} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i Y_i^p \square_i^p \right\rangle_{xy} - \\ &- \frac{T}{8N^2 q^2} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(2 - \frac{PT}{q^2} (\dot{\varphi}_i^p - \dot{\varphi}_j^p)^2 \right) X_{ij} \right\rangle_{xy} + \frac{T}{4N^2 q^2} \left\langle \left[\sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \dot{\varphi}_i^p S_i^p \right]^2 \right\rangle_{xy} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4N^2Pq^2} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i (S_i^p)^2 \right\rangle_{xy} + \frac{T}{4N^2q^4} \left\langle \left[\sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \dot{\varphi}_i^p Y_i^p \right] \left[\sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \dot{\varphi}_i^p \square_i^p \right] \right\rangle_{xy}, \quad (16)$$

$$X_{ij}^p = \cos(\varphi_i^p - \varphi_j^p) - \frac{2}{PT} \sin(\varphi_i^p - \varphi_j^p) \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{\langle i,j \rangle} \sin(\varphi_i^p - \varphi_j^p),$$

$$Y_i^p = X_{ii+x}^p + X_{ii-x}^p + X_{ii+y}^p + X_{ii-y}^p,$$

$$S_i^p = \sin(\varphi_i^p - \varphi_{i+x}^p) + \sin(\varphi_i^p - \varphi_{i-x}^p) + \sin(\varphi_i^p - \varphi_{i+y}^p) + \sin(\varphi_i^p - \varphi_{i-y}^p).$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\dot{\varphi}_i^p = \left[\varphi_i^{p+1} - \varphi_i^p \right]_{[-\pi, \pi]}, \quad \varphi_i^p = \varphi_i^0,$$

$$\square_i^p = 4 - \cos(\varphi_i^p - \varphi_{i+x}^p) - \cos(\varphi_i^p - \varphi_{i-x}^p) - \cos(\varphi_i^p - \varphi_{i+y}^p) - \cos(\varphi_i^p - \varphi_{i-y}^p), \quad (17)$$

где $[f]_{[a,b]}$ обозначает приведение величины f к интервалу $[a, b]$.

Зная величину коэффициента $\Gamma^{(2)}$ разложения (13) для доли сверхтекучей компоненты модели Хаббарда как функцию управляющих параметров $\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(2)}(q, T)$, можно оценить поправку к линии $T_{xy}^c(q)$ фазовых переходов квантовой XY-модели при больших, но конечных средних числах заполнения n_0 . Соответствующей оценкой сверху для температур $T_h^c(q; n_0)$ сверхпроводящего перехода модели Хаббарда является линия

$$T_h^c(q; n_0) \leq T_{xy}^c(q) \left(1 + \frac{\nu_s(q, T_{xy}^c) - \gamma(q, T_{xy}^c)}{\gamma(q, T_{xy}^c)} \right) = T_{xy}^c(q) \left(1 + \frac{\pi \Gamma^{(2)}(q, T_{xy}^c)}{4n_0^2 T_{xy}^c(q)} \right). \quad (18)$$

Оценка (18) может быть легко получена в предположении, что на линиях $T_{xy}^c(q)$ и $T_h^c(q; n_0)$ топологического фазового перехода Костерлица–Таулесса выполняются соотношения для «универсального скачка» доли сверхтекучей компоненты [13]:

$$\gamma(q, T_{xy}^c) = 2T_{xy}^c/\pi, \quad \nu_s(q, T_h^c) = 2T_h^c/\pi.$$

Величины $\Gamma^{(2)}(q, T)$ и $\gamma(q, T)$ как средние по квантовой XY-модели можно легко оценить при помощи квантового расчета Монте-Карло (см. разд. 3)¹⁾, что позволяет определить семейство фазовых диаграмм бозонной модели Хаббарда (1) при различном среднем числе бозонов на грануле n_0 . Соответствующие результаты приведены на рис. 1. Оценки по формуле (18) показывают, что в области $0.7 < q < 1.5$ линия фазовых переходов модели Хаббарда достигает своего предельного положения — линии фазовых переходов квантовой XY-модели — при $n_0 = 8 \pm 1$. При больших величинах квантового параметра, $q > 1.7$, поправка $\Gamma^{(2)}$ значительно возрастает, так что в рамках данного приближения фазовые диаграммы приблизительно совпадают при $n_0 > 16 \pm 2$, однако непосредственный численный расчет модели (1) приводит к выводу (см. ниже), что эта оценка сильно завышена.

В заключение этого раздела необходимо сделать следующее замечание. Все проведенные выше расчеты, исходящие из представления (10) статистической суммы бозонной системы Хаббарда, как нетрудно видеть, проводились для большого канонического

¹⁾ Не представляет трудностей их теоретическая оценка, например, при помощи различного рода самосогласованных приближений [14].

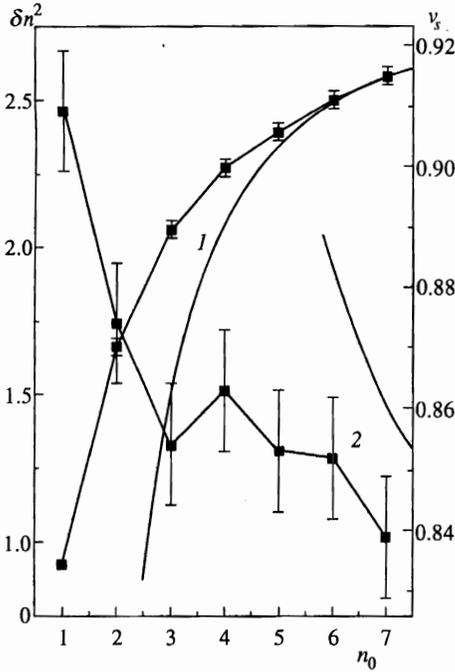


Рис. 2. Сравнение теоретических оценок (сплошные линии) для флуктуаций модуля параметра порядка δn^2 (1) и доли сверхтекучей компоненты ν_s (2), полученных с использованием разложения (13), с результатами расчетов квантовым методом Монте-Карло. $q = 0.5, T = 0.6$. Неуказанные статистические ошибки меньше размера соответствующего символа

ансамбля при равном нулю химическом потенциале. Это позволило провести все необходимые оценки аналитически, отвлекаясь от ограничений на полное число частиц при вычислении функциональных интегралов по флуктуациям модуля параметра порядка. Для того чтобы обосновать возможность сопоставления результатов данного раздела с результатами расчетов Монте-Карло, необходимо показать, что отклонение среднего числа частиц на узел, рассчитанного с использованием отмеченных выше условий, от n_0 мало по сравнению с самим n_0 . Это отклонение в первом порядке по $1/n_0$ имеет вид

$$\delta n = \frac{1}{n_0} \Delta^{(1)} + \dots, \tag{19}$$

где для величины $\Delta^{(1)}$ имеет место выражение, пригодное для его последующей оценки траекторным квантовым методом Монте-Карло по квантовой XY-модели:

$$\Delta^{(1)} = \frac{T}{2N^2 q^4} \left\langle \left[\sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \varphi_i^p \right] \left[\sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \varphi_i^p \square_i^p \right] - \frac{q^2}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \square_i^p \right\rangle_{xy}. \tag{20}$$

Как показывает расчет, в области $q > 0.7, T < 1$ величина $\Delta^{(1)}$ не превышает 0.08 и, следовательно, использование при выводе коэффициентов разложений (13) большого канонического распределения с нулевым химическим потенциалом оправдано. В качестве иллюстрации на рис. 2 приводится сравнение теоретических оценок среднеквадратичных флуктуаций числа частиц $\delta n^2(n_0)$ и доли сверхтекучей компоненты $\nu_s(n_0)$, рассчитанных по формулам (13)–(16), с результатами расчетов квантовым методом Монте-Карло для точки $\{q, T\} = \{0.5, 0.6\}$, в которой $\Delta^{(1)} = -0.5 \pm 0.1$. Из рисунка видно,

что при $n_0 > 5$ экспериментальные данные, полученные с помощью компьютерного моделирования, удовлетворительно описываются разложением (13).

Напротив, в области $q < 0.4$, которой соответствуют малые флуктуации фазы и большие флуктуации модуля параметра порядка, оценки по формуле (20) дают большие отклонения δn среднего числа бозонов на узлах решетки от n_0 и использованный выше подход неприменим.

3. КВАНТОВЫЙ МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО. ИЗМЕРЯЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Использование квантовых траекторных методов Монте-Карло основывается на применении процедуры дискретизации Троттера, в которой все термодинамические средние операторов D -мерной квантовой системы оцениваются по классической $D + 1$ -мерной, образованной размножением исходной вдоль оси мнимого времени, причем бальцмановским весом конфигурации соответствующей классической системы служит произведение матричных элементов высокотемпературной матрицы плотности, вычисляемых приближенно [15]. При этом выбор представления, в котором проводится оценка матричных элементов и типа разбиения гамильтониана, определяется соображениями удобства.

Для исследования свойств модели Хаббарда (1) на плоскости управляющих параметров $\{q, T\}$ мы использовали квантовый метод Монте-Карло в модификации «шахматная доска» (подробное изложение процедуры троттеровской дискретизации и организации шага Монте-Карло при использовании разбиения этого типа см. в [16]). В этом методе степенями свободы дискретизованной системы являются числа заполнения $\{n_i^p\}$ узлов трехмерной решетки $N \times N \times 4P$, образованной $4P$ -кратным размножением исходной $N \times N$ вдоль оси мнимого времени.

Свойства квантовой XY -модели (2) удобно исследовать в фазовом представлении, когда степенями свободы дискретизованной трехмерной классической системы являются N^2P фаз $\{\varphi_i^p\}$ [17, 18]. Для увеличения эффективности расчетов шаг Монте-Карло был организован при помощи многосеточной модификации процедуры Метрополиса (см. [18] и цитируемую литературу).

Использованная процедура дискретизации Троттера законна при достаточно больших числах P , когда все термодинамические средние, вычисленные по дискретизованной системе, имеют погрешность порядка $O(P^{-2})$. Нетрудно показать, что безразмерными параметрами, определяющими ошибку дискретизации, являются в случае системы (1) величина $\epsilon_h = \max \{1/(T^2 P^2 n_0), q^2/(T^2 P^2)\}$, тогда как для системы (2) имеем $\epsilon_{xy} = q^2/(T^2 P^2)$. Для каждой расчетной точки $\{q, T\}$ число разбиений P выбиралось таким образом, чтобы $\epsilon_h, \epsilon_{xy} < 0.05$. Для контроля сходимости проводилось сравнение результатов расчета для различных P . Найдено, что ошибки дискретизации во всей исследуемой области управляющих параметров не превышали 3%.

Исследование свойств системы проводилось вдоль линий $q = \text{const}$ и $T = \text{const}$, при этом движение осуществлялось из упорядоченной фазы в неупорядоченную. Изложенные в работе результаты получены усреднением по 3–5 начальным конфигурациям, образованным $4P$ -кратным размножением (P -кратным в случае XY -модели) произвольной конфигурации бозонов (или фаз для XY -модели) на решетке $N \times N$.

3.1. Измеряемые величины

Основное внимание было уделено расчету плотности сверхтекучей компоненты ν_s . При исследовании решеточной модели Хаббарда эта величина находилась двумя способами.

1) Через флуктуации «winding number» [7, 16]:

$$\nu_s = \frac{T \langle W_x^2 + W_y^2 \rangle_h}{2}, \quad (21)$$

$$W_x = \sum_{p=0}^{4P} \sum_{i_y=1}^N (-1)^{i_x+p} n_i^p, \quad W_y = \sum_{p=0}^{4P} \sum_{i_x=1}^N (-1)^{i_y+p} n_i^p,$$

где n_i^p обозначает число бозонов на узле i (с координатами $\{i_x, i_y\}$) слоя p дискретизованной классической системы.

2) Через корреляционную функцию парамагнитного тока $\hat{J}^{(p)}$ [19]:

$$\nu_s = -\frac{1}{n_0 N^2} \langle \hat{T}_x \rangle_h - \frac{1}{n_0^2 N^2 T P} \sum_{\tau=0}^{P-1} \langle \hat{J}_x^{(p)}(\tau) \hat{J}_x^{(p)}(0) \rangle_h, \quad (22)$$

$$\hat{T}_x = -\frac{1}{2} \sum_i (a^\dagger_{i+x} a_i + a^\dagger_i a_{i+x}),$$

$$\hat{J}_x^{(p)} = -\frac{\tilde{J}}{2} \sum_i (a^\dagger_{i+x} a_i - a^\dagger_i a_{i+x}), \quad \hat{J}_x^{(p)}(\tau) = \exp(\tau \beta \hat{H}/P) \hat{J}_x^{(p)} \exp(-\tau \beta \hat{H}/P).$$

Мы нашли, что результаты расчетов по формулам (21) и (22) совпадают в пределах статистических ошибок во всей исследованной области управляющих параметров.

Отметим, что при замене $a_i \rightarrow \sqrt{n_0} e^{i\varphi_i}$ (22) переходит в выражение для модуля спиральности («helicity modulus») γ квантовой XY-модели [17]:

$$\gamma \equiv \langle \vec{\Gamma} \rangle_{xy} = \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_i \cos(\varphi_{i+x}^0 - \varphi_i^0) \right\rangle_{xy} - \frac{1}{N^2 P T} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{i,j} \sin(\varphi_{i+x}^0 - \varphi_i^0) \sin(\varphi_{j+x}^p - \varphi_j^p) \right\rangle_{xy}. \quad (23)$$

Как отмечалось авторами [20], температурная производная плотности сверхтекучей компоненты $\partial(\beta\nu_s)/\partial\beta$ дает дополнительную информацию о природе фазового перехода при температуре $T = T^c(q)$: в рамках перехода Костерлица–Таулесса величина $\partial(\beta\nu_s)/\partial\beta$ с ростом размера системы ведет себя как дельта-функция Дирака $\delta(T - T^c)$. Следовательно, положение пика производной плотности сверхтекучей компоненты не должно зависеть от размера системы. Это наблюдение весьма полезно, так как вследствие значительных временных затрат при исследовании модели Хаббарда приходится ограничиваться системами малого размера ($N \sim 4 - 10$).

Для нахождения производной $\partial(\beta\nu_s)/\partial\beta$ необходимо оценить разность средних энергий систем, отличающихся сдвигом фаз $\pi/2$ (вдоль одного из направлений) на границе:

$$\frac{\beta(E(\pi/2) - E(0))}{n_0 \beta t} \sim \nu_s + \beta \frac{\partial \nu_s}{\partial \beta}. \quad (24)$$

Можно показать, что если рассматривать бозоны на узлах решетки в модели Хаббарда как куперовские пары заряда $2e$ в сверхпроводящих гранулах, то такой сдвиг фаз реализуется в схеме «квантования потока», когда через центр тора, на поверхности которого лежит система, пропускается $1/8$ кванта потока²⁾, приводя к появлению у куперовских пар калибровочной фазы [20].

Еще одной наблюдаемой величиной были среднеквадратичные флуктуации числа бозонов на узлах решетки

$$\delta n_h^2 = \frac{1}{4PN^2} \left\langle \sum_{p=0}^{4P-1} \sum_i (n_i^p - n_0)^2 \right\rangle_h. \quad (25)$$

Соответствующей величиной для квантовой XY -модели является

$$\delta n_{xy}^2 \equiv \langle \tilde{\Psi} \rangle_{xy} = \frac{T}{N^2 q^2} \left\langle \sum_{p=0}^{P-1} \sum_i \left[1 - \frac{PT}{q^2} (\dot{\varphi}_i^p)^2 \right] \right\rangle_{xy}. \quad (26)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3 приведены зависимости доли сверхтекучей компоненты модели Хаббарда от температуры $\nu_s(T)$ для величин квантового параметра $q = 0.2$ (рис. 3а, классическая область для XY -модели) и $q = 2.0$ (рис. 3б). Для сравнения на рисунке также показаны зависимости модуля спиральности (23) квантовой XY -модели. Анализируя данные, полученные для систем различных размеров N и средних чисел заполнения n_0 , можно видеть, что для системы сильно взаимодействующих бозонов (при $q = 2.0$) результаты численного эксперимента качественно согласуются с результатами теоретических расчетов, проведенных в разд. 2. Действительно, как видно из рис. 1 и рис. 3б, граница упорядоченного сверхпроводящего состояния модели (1) приближается к соответствующей границе квантовой XY -модели со стороны больших температур. Положение этой границы (температуру $T^c(q)$ перехода в нормальное состояние) можно оценить из соотношения для универсального скачка доли сверхтекучей компоненты (модуля спиральности в случае XY -модели) $\nu_s(T^c) = 2T^c/\pi$. Определенная по универсальному скачку температура фазового перехода Костерлица–Таулесса хорошо согласуется с положением пика температурной производной сверхтекучей плотности (24), которое не зависит (в пределах статистических ошибок расчетов) от размера системы и, как видно из рис. 4, понижается с ростом среднего числа заполнения n_0 .

Имея результаты расчетов модуля спиральности и доли сверхтекучей компоненты для систем конечного размера, более точную оценку температуры T^c топологического фазового перехода можно было бы получить, применяя процедуру масштабирования с использованием ренормгруппы Костерлица [21]. В рамках этой процедуры производится отображение исходной системы на систему двумерного кулоновского газа с эффективной температурой $T_{CG} = T/(2\pi\nu_s^{(0)}(T))$, где $\nu_s^{(0)}(T)$ — доля сверхтекучей компоненты

²⁾ Таким образом, для нахождения производной от плотности сверхтекучей компоненты необходимо вычислить среднюю энергию системы (1) в поле вида $\mathbf{A} = (A, 0, 0)$. Авторами разработана необходимая для этого модификация алгоритма.

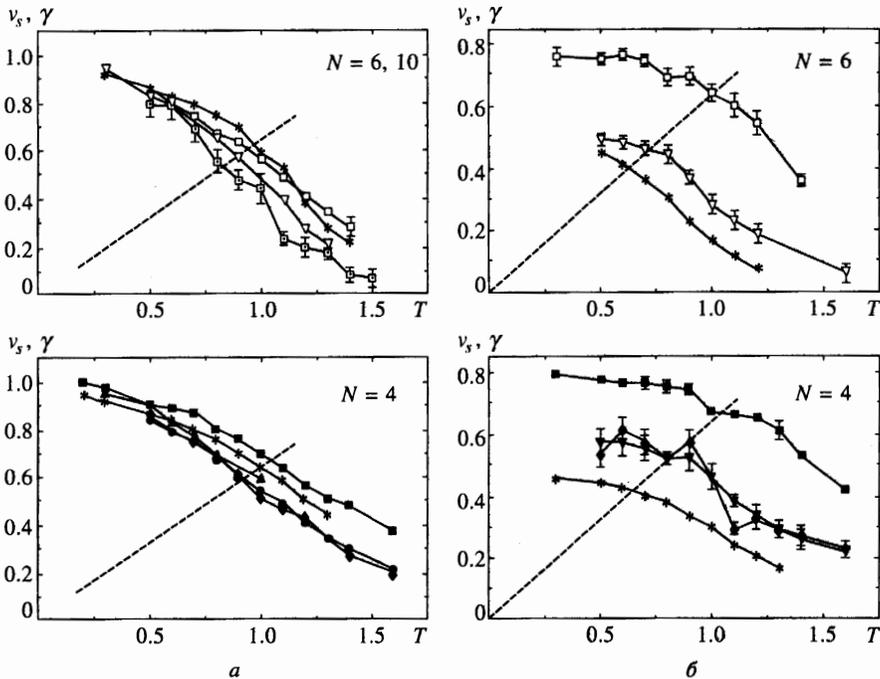


Рис. 3. *a* — Зависимости доли сверхтекучей компоненты ν_s (модуля спиральности γ в случае XU -модели) от температуры T при $q = 0.2$. Прерывистой линией показана зависимость $2T/\pi$. Линии соединены для удобства рассмотрения. *б* — Зависимости доли сверхтекучей компоненты ν_s (модуля спиральности γ в случае XU -модели) от температуры T при $q = 2.0$

в отсутствие вихрей (доля локальной сверхтекучей плотности). Таким образом, знание $\nu_s^{(0)}$ как функции управляющих параметров $\{q, T\}$ необходимо для проведения экстраполяции на систему бесконечного размера и определения истинной температуры перехода $T^c(q)$. Эта задача решена [22] для случая двумерной классической XU -модели, для которой имеет место $\nu_s^{(0)} = \langle \cos(\varphi_i - \varphi_{i+x}) \rangle$. Можно предположить, что это соотношение остается справедливым и при небольших значениях q в квантовой XU -модели. Однако при $q \geq 1$, когда квантовые флуктуации играют значительную роль, использование данного соотношения некорректно хотя бы потому, что, как показывает моделирование,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \nu_s / \nu_s^{(0)} = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma / \langle \cos(\varphi_i - \varphi_{i+x}) \rangle \neq 1.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для бозонной модели Хаббарда.

При использовании описанной выше процедуры масштабирования квантовых моделей обычно используются подходы, когда а) либо доля локальной сверхтекучей плотности полагается равной единице: $\nu_s^{(0)}(T) = 1$ [21], б) либо постулируется, что $\nu_s^{(0)}(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \nu_s(T)$ [7]. Очевидно, что оба этих подхода оправданы лишь при малых температурах $T \ll 1$. Именно поэтому мы считаем более последовательным оценивать положение границы упорядоченного сверхпроводящего состояния либо по универсальному скачку сверхтекучей плотности (что дает неплохие результаты уже для систем размера

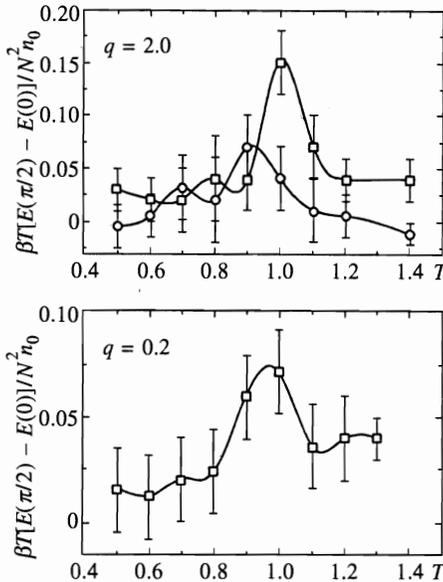


Рис. 4. Результаты расчета температурной производной сверхтекучей плотности (24) в методе квантования потока при $q = 0.2, 2.0$

$N > 10$ [17, 18]), либо по положению пика ее температурной производной. Следует отметить, что использование последнего метода дает гораздо большие статистические ошибки (см. рис. 3, 4).

Из рис. 3а видно, что температура перехода в сверхпроводящее состояние системы слабозаимодействующих бозонов (при $q = 0.2$) оказалась ниже температуры упорядочения в квантовой ХУ-модели. Эта тенденция сохраняется и при увеличении размера системы. Использованный выше теоретический подход не помогает в понимании причины такого поведения, так как, как указывалось в разд. 2.2, в области $q < 0.4$, когда взаимодействие слабо подавляет флуктуации модуля параметра порядка, теоретические оценки (13)–(20) работают плохо, что выражается в больших величинах поправок $\Psi^{(2)}, \Gamma^{(2)}$ и $\Delta^{(2)}$.

На рис. 5 показаны результаты расчетов доли сверхтекучей компоненты ν_s бозонной модели Хаббарда и модуля спиральности γ квантовой ХУ-модели как функций квантового параметра q при $T = 0.5, N = 6$. Определяя точку фазового перехода q^c по пересечению зависимостей $\nu_s(q)$ и $\gamma(q)$ с линией $2T/\pi = 1/\pi$, находим, что граница сверхпроводящего состояния модели Хаббарда проходит в области больших q и приближается к линии фазового перехода ХУ-модели с ростом числа заполнения n_0 .

На вставке рис. 5 показаны результаты расчета температурной производной сверхтекучей плотности (24), полученные по схеме «квантования потока». Положение пика производной ($q \approx 2.35$ при $n_0 = 3$) неплохо согласуется с критической точкой $q^c|_{n_0=3} \approx 2.4$, определенной по универсальному скачку сверхтекучей плотности.

Графики зависимостей относительных флуктуаций числа частиц на узлах системы от температуры показаны на рис. 6, 7. В частности, рис. 7 может служить иллюстрацией важной роли взаимодействия бозонов в переходе модели Хаббарда (1) к квантовой ХУ-модели (2). Действительно, при конечных числах заполнения n_0 спектр оператора $\hat{n}_i - n_0$ можно считать неограниченным, если относительные флуктуации числа частиц

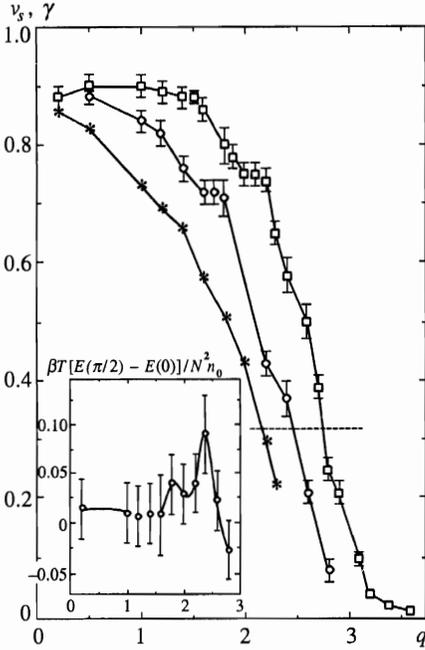


Рис. 5. Зависимости доли сверхтекучей компоненты ν_s (модуля спиральности γ в случае XY-модели) от величины квантового параметра q при $T = 0.5$. Прерывистой линией показана линия $1/\pi$. На вставке приведены результаты расчета температурной производной сверхтекучей плотности (24) в методе квантования потока

малы: $\delta n^2/n_0^2 \ll 1$. Тогда оператор числа частиц $\hat{n}_i - n_0$ можно считать сопряженным оператору фазы $\hat{\varphi}_i$, как это обычно и делается при рассмотрении джозефсоновских и гранулированных систем в терминах модели (2). Увеличение взаимодействия бозонов (квантового параметра q) приводит к подавлению относительных флуктуаций модуля параметра порядка, что подтверждается рис. 7. Отметим, что при больших q флуктуации числа частиц модели Хаббарда (25) больше соответствующих флуктуаций квантовой XY-модели (26) и приближаются к ней с увеличением числа заполнения n_0 . На вставке рис. 7 показана зависимость относительных флуктуаций $\delta n_h^2/n_0^2$ от величины квантового параметра q при $T = 0.5$. Рисунок показывает, что увеличение взаимодействия и числа заполнения n_0 существенно подавляет относительные флуктуации модуля параметра порядка.

С ростом температуры T при фиксированной величине квантового параметра q наблюдается увеличение относительных флуктуаций числа частиц (см. рис. 6), характерное для перехода в нормальное (металлическое в случае массива гранул) состояние, причем, как видно из рисунка, при $q = 0.2$ числа заполнения $n_0 = 4$ недостаточно для значительного подавления относительных флуктуаций модуля параметра порядка, однако уже при $q = 2.0$ наблюдается резкое падение относительных флуктуаций вследствие возросшей роли взаимодействия.

В заключение еще раз отметим, что при конечных температурах критическое поведение исследованной бозонной решеточной модели Хаббарда совпадает (в отличие от системы при $T = 0$) с критическим поведением квантовой XY-модели в некоторой области изменения среднего числа заполнения n_0 узлов системы. Следовательно, результаты эксперимента над системой сверхпроводящих гранул на изолирующей подложке не должны качественно отличаться от результатов исследования гранулирован-

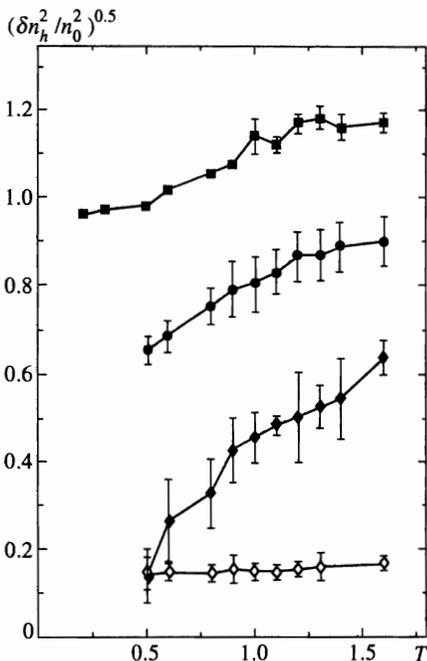


Рис. 6

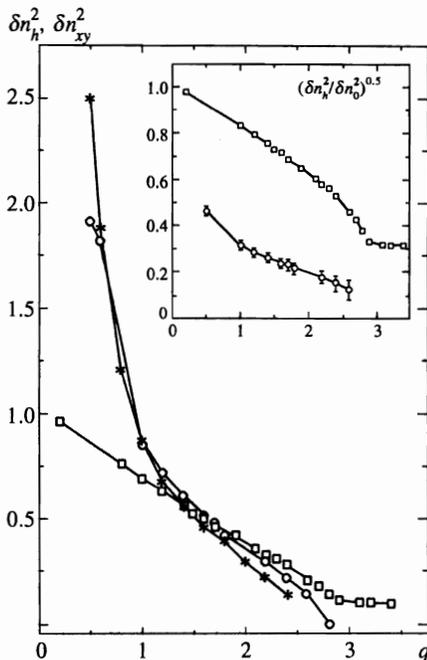


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость относительных флуктуаций числа бозонов на узлах решетки от температуры T при $q = 0.2$ ($N = 4$, закрашенные символы) и $q = 2.0$ ($N = 6$, открытые символы)

Рис. 7. Зависимость среднеквадратичных флуктуаций модуля параметра порядка от величины квантового параметра q при $T = 0.5$. На вставке показаны относительные флуктуации модуля при различных средних числах заполнения n_0

ной системы в рамках большого канонического ансамбля, когда управление химическим потенциалом пары может осуществлять, например, напряжение, приложенное к проводящей подложке.

Подводя итоги, изложим основные результаты работы. В рамках бозонной решеточной модели Хаббарда проводится анализ влияния квантовых флуктуаций фазы и модуля параметра порядка на характер упорядочения в двумерных мезоскопических джозефсоновских и гранулированных системах. Теоретический расчет по методу среднего поля и применение метода функционального интегрирования показывают, что рассматриваемые модели имеют одинаковое критическое поведение на плоскости $\{q, T\}$ безразмерных управляющих параметров, причем квантовая XY -модель (2) может рассматриваться в качестве квазиклассического предела бозонной (1) при $n_0 \gg 1$ и $U \neq 0$. В этом случае подавление относительных флуктуаций модуля параметра порядка взаимодействием позволяет в указанной области приближенно считать операторы числа частиц \hat{n}_i и фазы $\hat{\varphi}_i$ канонически-сопряженными: $\hat{n}_i - n_0 = \hat{j}\partial/\partial\varphi_i$. Проведение численных оценок квантовым методом Монте-Карло показывает, что в области $q < 1$, которая

является «классической» для квантовой ХУ-модели и областью сильных флуктуаций модуля параметра порядка для модели Хаббарда (1), последняя переходит в квантовую ХУ-модель (2) при $n_0 \geq 10$, тогда как в области $q \sim 2$ значительных квантовых флуктуаций фаз параметра порядка соответствующий предел достигается уже при $n_0 \sim 8$. Во всей исследованной области изменения управляющих параметров $0.2 < q < 3.8$, $0.2 < T < 1.6$ эффектов возвратной сверхтекучести (сверхпроводимости) или низкотемпературной нестабильности не обнаружено.

Работа частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований и Программы «Физика твердотельных наноструктур».

Литература

1. Y. Imry and U. Sivan, *Sol. St. Comm.* **92**, 83 (1994).
2. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, in *Modern problems in condensed matter sciences* ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, North-Holland (1985), Vol. 10, p. 1.
3. А. Ф. Андреев, Письма в ЖЭТФ **63**, 963 (1996); Письма в ЖЭТФ **64**, 618 (1996).
- 4а. M. H. W. Chan, K. I. Blum, J. D. Reppy et al., *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1950 (1988); D. V. Haviland, Y. Liu, and A. M. Goldman, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2180 (1989).
- 4б. C. Bruder, R. Fazio et al., *Phys. Scripta* **42**, 159 (1992).
5. A. L. Dobryakov, Yu. E. Lozovik et al., *Appl. Phys. A* **54**, 100 (1992).
6. M. C. Cha, M. P. A. Fisher, S. M. Girvin et al., *Phys. Rev. B* **44**, 6883 (1991).
7. W. Krauth, N. Trivedi, and D. Ceperley, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2703 (1991); W. Krauth and N. Trivedi, *Europhys. Lett.* **14**, 627 (1991).
8. В. А. Кашурников, А. В. Красавин, Б. В. Свистунов, Письма в ЖЭТФ **64**, 92 (1996).
9. M. P. A. Fisher and G. Grinstein, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 208 (1988); M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
10. E. Simanek, *Phys. Rev. B* **23**, 5762 (1983); *Phys. Rev. B* **32**, 500 (1985).
11. R. S. Fishman and D. Stroud, *Phys. Rev. B* **37**, 1499 (1988); E. Roddick and D. Stroud, *Phys. Rev. B* **48**, 16600 (1993).
12. J. B. Kim and M. Y. Choi, *Phys. Rev. B* **52**, 3624 (1995).
13. P. Minnhagen, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001 (1987).
14. Yu. E. Lozovik and S. G. Akopov, *J. Phys. C* **14**, L31 (1981); S. G. Akopov and Yu. E. Lozovik, *J. Phys. C* **15**, 4403 (1982); С. А. Верзаков, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **39**, 818 (1997).
15. R. M. Fye, *Phys. Rev. B* **33**, 6271 (1986).
16. A. Blaer and J. Han, *Phys. Rev. A* **46**, 3225 (1992).
17. M. Jacobs, J. V. Jose, M. A. Novotny, and A. M. Goldman, *Phys. Rev. B* **38**, 4562 (1988).
18. A. I. Belousov and Yu. E. Lozovik, *Sol. St. Commun.* **100**, 421 (1996); А. И. Белоусов, Ю. Е. Лозовик, Матем. Модел. **9**(4), 39 (1997).
19. G. G. Batrouni, B. Larson, R. T. Scalettar, and J. Tobochnik, J. Wang, *Phys. Rev. B* **48**, 9628 (1993).
20. F. F. Assaad, W. Hanke, and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. B* **50**, 12835 (1994).
21. D. M. Ceperley and E. L. Pollock, *Phys. Rev. B* **39**, 2084 (1989).
22. P. Olsson, *Phys. Rev. B* **52**, 4511 (1995).