ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1899–1914 ©1997

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ВИХРИ-СКИРМИОНЫ ПРИ НЕЧЕТНОМ ЗАПОЛНЕНИИ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ

С. В. Иорданский, С. Г. Плясунов

Институт теоретической физики им. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 19 июня 1997 г.

Методом градиентного разложения вычисляются число частиц, энергия и другие физические величины при наличии вихря-скирмиона. В отличие от других работ на эту тему не используется приближение спроектированных на один уровень Ландау функций. Учет других уровней Ландау приводит к простой физической картине и существенно меняет выражение для энергии вихря. Показано, что образование одного вихря термодинамически выгодно и они должны спонтанно образовываться вблизи нечетных заполнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теории макроскопических спиновых возбуждений типа скирмионов вблизи нечетного заполнения уровней Ландау в двумерных системах в условиях квантового эффекта Холла посвящено большое количество теоретических работ. В работе [1] использовался феноменологический подход теории Черна–Саймона и было показано, что такие возбуждения должны существовать, и вычислена их энергия. Затем в работе [2] было проведено численное определение энергии и волновой функции методом Хартри–Фока в приближении функций, спроектированных на один уровень Ландау. В работе [3] в рамках той же модели использовался метод градиентного разложения для скирмиона большого размера и аналитически были найдены выражения для энергии и числа частиц. Результаты этой работы были уточнены в статье [4], где также была развита техника вычислений в любом порядке градиентного разложения. В той же модели было вычислено эффективное действие [5] с топологическим членом (см. также дискуссию в [6]). Вопрос об экспериментальном обнаружении таких возбуждений актуален до сих пор, так как первые свидетельства их существования, полученные методом ЯМР [7], подверглись критике в более поздней работе [8].

Использование приближения функций, спроектированных на один уровень Ландау, обычно оправдывается большой величиной циклотронной энергии $\hbar\omega_c$ по сравнению с кулоновским взаимодействием порядка $e^2/kl_{\mathscr{H}}$, где $l^2_{\mathscr{H}} = c\hbar/e\mathscr{H}$, а k — диэлектрическая постоянная. Существующие вычисления весьма громоздки и содержат ряд трудно доказываемых допущений. Окончательные выражения для энергии и плотности возникают после утомительных вычислений без появления прямой физической интерпретации результатов. В настоящей работе мы покажем, что приближения спроектированных функций недостаточно для адекватного описания скирмиона. Учет ближайших уровней Ландау приводит к существенному изменению энергии и возникновению простой физической картины, объясняющей основные результаты. Предварительные результаты были опубликованы ранее [9], и настоящая работа является более полной с обоснованием результатов путем соответствующего градиентного разложения.

Скирмионы соответствуют неоднородному вращению спиноров — операторов вторичного квантования для электронов — с помощью неоднородной матрицы поворота $U(\mathbf{r})$. При этом исходные спиноры ψ преобразуются через новые спиноры χ согласно соотношению $\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})$. Матрица $U(\mathbf{r})$ параметризуется тремя эйлеровыми углами:

$$U(\mathbf{r}) = U_z(\gamma(\mathbf{r}))U_y(\beta(\mathbf{r}))U_z(\alpha(\mathbf{r})),$$

где

$$U_z(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_z,$$

$$U_y(\beta) = \cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}\sigma_y,$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — матрицы Паули. На больших расстояниях от кора при конечной величине g-фактора электронов средний спин должен быть направлен по магнитному полю. Поэтому угол β, который мы отсчитываем от направления магнитного поля, при $r \to \infty$ должен быстро (можно показать, что экспоненциально) стремится к нулю. Предполагается, что матрица $U(\mathbf{r})$ не имеет сингулярностей при любых $\mathbf{r}$, что соответствует отсутствию особенностей у матриц

$$A_k = -iU^+\frac{\partial U}{\partial x_k} = \Omega_k^l(\mathbf{r})\sigma_l,$$

где $k = x, y$ и $l = x, y, z$, матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выражения для Ω_k^l легко получить непосредственным дифференцированием $U(\mathbf{r})$:

$$\Omega_k^z = \frac{1}{2}(\partial_k\alpha + \cos\beta\,\partial_k\varphi)$$

$$\Omega_k^x = \frac{1}{2}(\sin\beta\cos\alpha\,\partial_k\varphi - \sin\alpha\,\partial_k\beta), \qquad (1)$$

$$\Omega_k^y = \frac{1}{2}(\cos\alpha\,\partial_k\beta + \sin\beta\sin\alpha\,\partial_k\varphi).$$

Нетривиальная топология, порождаемая матрицей $U(\mathbf{r})$, связана со свойствами отображений $\alpha(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ пробегает окружность большого радиуса. При этом степень отображения двумерной плоскости на сферу, параметризуемую углами φ и β, совпадает со степенью отображения окружности на окружность, т. е. вихревым числом, характеризующим вихревую особенность $\varphi(\mathbf{r})$. Для того чтобы $\Omega_k^l(\mathbf{r})$ были несингулярны, точечная особенность $\varphi(\mathbf{r})$ должна совпадать с особенностью $\alpha(\mathbf{r})$ и находиться в точке, где $\cos\beta = -1$. Таким образом, в матрице U должны быть представлены все три угла Эйлера, а соответствующий спинор $\psi(\mathbf{r})$ имеет вихревую особенность на больших расстояниях с целым квантованием из-за однозначности волновых функций. Поэтому правильнее говорить о несингулярных вихрях, кор которых задается скирмионом, по аналогии с ^{3}He [10], причем в отличие от ^{3}He, вихревые числа являются любыми целыми, а не только четными. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int \operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}^z d^2r = Q$$

является топологическим инвариантом и выражается непосредственно через изменение фазы спинора ψ при обходе контура большого радиуса.

При преобразовании с матрицей U исходный лагранжиан электронов с парным взаимодействием в магнитном поле:

$$L = \int \left[i\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\psi^+(-i\partial_k - A_{0k})^2\psi \right] d^2r dt + \\ + \frac{1}{2}\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi^+(\mathbf{r})\psi^+(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) d^2r' d^2r dt - gH\int \psi^+\sigma_z\psi d^2r dt, \tag{2}$$

переходит в лагранжиан для спиноров χ:

$$L' = \int i\chi^+ \left[\frac{\partial \chi}{\partial t} - \Omega_t^l\sigma_l\chi - \frac{1}{2m}(i\partial_k - A_{0k} + \Omega_k^l\sigma_l)^2\chi \right] d^2r dt - \\ - \frac{1}{2}\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi^+(\mathbf{r})\chi^+(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}) d^2r' d^2r dt + g\mathscr{H}\int U^+\sigma_z U\chi d^2r dt. \tag{3}$$

Мы считаем, что матрица U зависит также и от времени; Ω_t^l — величина соответствующая (1), но с дифференцированием по времени; A_0 — векторный потенциал постоянного магнитного поля. Лагранжиан (3) легко получить непосредственным дифференцированием с использованием производных от тождества $U^+U = 1$.

Размеры кора вихря-скирмиона определяются кулоновским взаимодействием, которое стремится увеличить область с изменением плотности заряда и большими производными U, и зеемановской энергией, которая, наоборот, стремится уменьшить область с невыгодной ориентацией спина. На расстояниях, где изменение зеемановской энергии сравнивается с кулоновской, набирается фактически вся кулоновская энергия и в дальнейшем не меняется. На больших расстояниях остаются зеемановская энергия и энергия, связанная с неоднородностью направления спина, баланс которых приводит к экспоненциальному уменьшению отклонения направления спина от оптимального. При малой величине g-фактора область кора будет весьма велика и производные матрицы U будут соответственно малы, что позволяет использовать градиентное разложение для вычисления физических величин. Мы будем рассматривать именно такой случай, интересуясь в первую очередь топологически инвариантными членами, вклад которых остается неизменным при деформациях матрицы U. Это позволяет не рассматривать зеемановскую энергию или учитывать ее в первом порядке теории возмущений.

Эффективное действие, зависящее от матрицы U, определяется путем интегрирования по фермионам соответствующего выражения для статсуммы и имеет вид [11] $S = i\,\mathrm{Sp}\ln G$, где G — электронная функция Грина, под шпуром понимается суммирование как по спиновым, так и пространственно-временным переменным. Это действие мы получим путем разложения по градиентам U с использованием хартри-фоковского приближения, которое будет оправдано позже.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА В ПРИБЛИЖЕНИИ ХАРТРИ–ФОКА

Для вычисления функции Грина мы будем использовать приближение Хартри–Фока, справедливое в случае нечетного заполнения уровней Ландау с точностью до величин порядка $V_{int}/\hbar\omega_c$, предполагаемых малыми. Такой подход позволяет записать гамильтониан в хартри-фоковском приближении:

$$H = \int \chi^+ \left[\Omega_t^l \sigma_l + \frac{1}{2m}(-i\partial_k - A_{0k} + \Omega_k^l \sigma_l)^2\right] \chi d^2r +$$
$$+ \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\langle \chi^+(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\rangle \chi^+(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r}) d^2r' d^2r -$$
$$- \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\langle \chi^+(\mathbf{r}')\sigma_l \chi(\mathbf{r})\rangle \chi^+(\mathbf{r})\sigma_l \chi(\mathbf{r}') d^2r d^2r' \qquad (4)$$

(член, описывающий взаимодействие, превратился в сумму обменного и прямого взаимодействий, малая зеемановская энергия опущена). В прямом взаимодействии для кулоновского потенциала следует считать отсутствующей фурье-компоненту с нулевым импульсом, что соответствует наличию компенсирующего фона (см., например, [11]).

Будем предполагать, что все средние близки к своим однородным значениям для полностью заполненного уровня Ландау. Ограничимся рассмотрением модели однородного обмена, когда разницей $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ можно пренебречь, что формально соответствует радиусу взаимодействия для $V(\mathbf{r})$ малому по сравнению с магнитной длиной. По-видимому, переход к локальному обменному члену мало существен и топологические члены от него не зависят, однако его использование существенно упрощает все выкладки. Окончательные результаты легко распространяются и на случай нелокального обмена. Надо также отметить, что при вычислении энергии электронов, принадлежащих одному уровню Ландау, возникает модель с гамильтонианом такого вида. В результате мы приходим к модели с гамильтонианом

$$H = \int \left[\chi^+ \Omega_t^l \sigma_l \chi^+ + \frac{1}{2m}\chi^+(-i\partial_k - A_{0k} + \Omega_k^l \sigma_l)^2 \chi - \gamma\rho\chi^+\sigma_l n_l \chi^+ + V_0 \rho \chi^+ \chi\right] d^2r, \qquad (5)$$

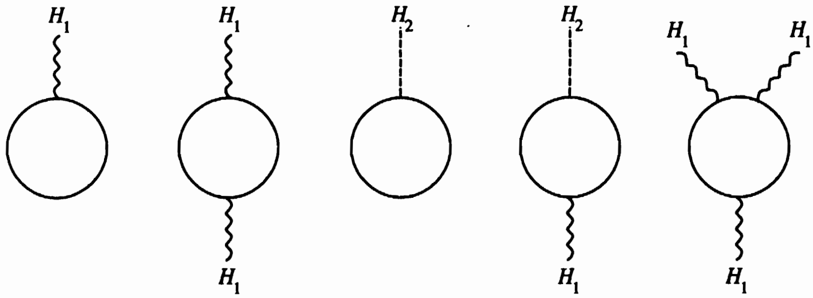
где γ и V_0 — константы обменного и прямого взаимодействия, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении среднего спина, ρ — средняя плотность. Предполагая малость скоростей вращения Ω_μ^l и их производных, $\partial\Omega \sim \Omega^2$, будем вычислять функцию Грина, используя теорию возмущений, полагая $H = H_0 + H_1 + H_2$, где

$$H_0 = \int \chi^+ \left[\frac{1}{2m}(-i\partial_k - A_{0k})^2 - \gamma\rho\sigma_l n_l - \mu\right] \chi d^2r, \qquad (6)$$

$$H_1 = \frac{1}{m}\int \chi^+[\Omega_k^l \sigma_l(-i\partial_k - A_{0k}) + \Omega_t^l \sigma_l]\chi d^2r, \qquad (7)$$

$$H_2 = \frac{1}{2m}\int \chi^+ \left[(\Omega_k^l \sigma_l)^2 - i\frac{\partial\Omega_k^l}{\partial r_k}\sigma_l\right] \chi d^2r. \qquad (8)$$

Мы используем большой канонический ансамбль и вводим химический потенциал μ. Несущественная постоянная прямого взаимодействия положена равной нулю, как это имеет место для случая кулоновского взаимодействия.



Функция Грина для затравочного гамильтониана является функцией Грина невзаимодействующих электронов в постоянном магнитном поле, причем мы предполагаем, что на последнем занятом уровне Ландау s заполнен только нижний спиновый подуровень. В дальнейшем ограничимся, для простоты, случаем, когда занят первый уровень с $s = 0$, так что функция Грина имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -i\langle T\chi(\mathbf{r}, t)\chi^+(\mathbf{r}', t')\rangle = \sum_{p,s} \int g_s(\omega) e^{i\omega(t'-t)} \Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi^*_{sp}(\mathbf{r}') \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (9)$$

Здесь T — символ временного упорядочения для ферми-операторов, суммирование идет по всем s и p, спиновые матрицы $g_s(\omega)$ соответствуют заполнению уровня $s = 0$ для спинов, направленных по среднему спину, совпадающему с осью z. Остальные состояния не заполнены. Нормированные функции $\Phi_{sp}(\mathbf{r})$ соответствуют собственным функциям уровней Ландау. Используется калибровка Ландау. Мы будем работать в системе единиц, где внешнее магнитное поле $\mathscr{H} = 1$, магнитная длина $l_{\mathscr{H}} = 1$ и $\hbar = 1$.

Для гамильтониана (6) матрицы $g_s(\omega)$ легко находятся:

$$g_0(\omega) = \frac{1}{\omega + (\gamma\rho - i\delta)\sigma_z + \mu}, \qquad (10)$$

$$g_s(\omega) = \frac{1}{\omega + \gamma\rho\sigma_z - s/m + \mu + i\delta}, \qquad (11)$$

где $\delta \to 0$, в химический потенциал включена энергия нулевого уровня $1/2m$.

Выражение (9) позволяет развить теорию возмущений для полной функции Грина $G = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots$ Соответствующие диаграммы для действия S показаны на рисунке. Для вычислений удобно представить оператор, входящий в (7), в виде

$$\frac{1}{m}\Omega^l_k \sigma_l(-i\partial_k - A_{0k}) = \frac{1}{m}(\Omega^l_+\pi^- + \Omega^l_+\pi^+)\sigma_l. \qquad (12)$$

Оператор $\pi^+\Phi_{sp} = \sqrt{2(s+1)}\Phi_{(s+1)p}$ повышает индекс Ландау, а оператор $\pi^-\Phi_{sp} = \sqrt{2s}\Phi_{(s-1)p}$ понижает индекс Ландау, что непосредственно следует из свойств осцилляторных функций, причем

$$\Omega^l_+ = -\frac{i\Omega^l_x + \Omega^l_y}{2}, \quad \Omega^l_- = \frac{i\Omega^l_x - \Omega^l_y}{2}. \qquad (13)$$

Найдем поправку первого порядка по Ω к функции Грина:

$$
\begin{aligned}
G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') = \int e^{-i\omega(t-t')} g_s(\omega)\Phi_{s,p}(\mathbf{r})\Phi^*_{s,p}(\mathbf{r}_1) \times \\
\times \left\{ \frac{1}{m}\left[\Omega^l_+(\mathbf{r}_1)\pi^- + \Omega^l_-(\mathbf{r}_1)\pi^+\right] + \Omega^l_t(\mathbf{r}_1)\right\} \sigma_l g_{s'}(\omega') \times \\
\times\, e^{-i\omega'(t_1-t')}\Phi_{s'p'}(\mathbf{r}_1)\Phi^*_{s'p'}(\mathbf{r}')\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}d^2r_1dt_1.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Нас интересует гриновская функция $G(\mathbf{r},\mathbf{r};t,t+\delta)$, определяющая плотность. В этом случае отличны от нуля будут только члены с $s=0$, $s'=1$, $s=1$, $s'=0$ и $s=s'=0$, прочие обращаются в нуль из-за аналитических свойств g_s при $s>0$, причем можно пренебречь отличием t_1 от t из-за быстрой осцилляции одной из гриновских функций с точностью до членов порядка m. Мы не будем сначала рассматривать член с Ω^l_t, который легко считается. Подынтегральное выражение в (14) быстро убывает с ростом $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$ свыше магнитной длины, поэтому можно разложить $\Omega(\mathbf{r}_1)$ по разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, ограничиваясь линейными членами. Выполняя суммирование по p, получим следующее выражение

$$
\begin{aligned}
G_1(\mathbf{r},\mathbf{r},t,t+\delta) = \frac{\sqrt{2}}{m}\int g_0\sigma_l g_0 e^{i\omega\delta}\frac{\partial\Omega^l_-}{\partial r_k}R_{00}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)R_{10}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r})d^2r_1\frac{d\omega}{2\pi} + \\
+ \frac{\sqrt{2}}{m}\int g_0(\omega)\sigma_l g_1 e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}\int R_{00}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)R_{01}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r})(r_1-r)_k\frac{\partial\Omega^l_-}{\partial r_k}d^2r_1 + \\
+ \frac{1}{m}\int g_1(\omega)\sigma_l g_0(\omega)e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}\int R_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)R_{10}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r})(r_1-r)_k\frac{\partial\Omega^l_+}{\partial r_k}d^2r_1.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Мы ввели функции

$$
R_{00}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2}{4}\right], \tag{16}
$$

$$
R_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2}{2}\right]\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2}{4}\right], \tag{17}
$$

$$
R_{10}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1-x-i(y_1-y)}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2}{4}\right], \tag{18}
$$

$$
R_{01}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{x-x_1-i(y_1-y)}{\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2}{4}\right]. \tag{19}
$$

При интегрировании по $\mathbf{r}_1$ член без производных от Ω пропадает из-за нечетности подынтегрального выражения. Интегралы в (15) легко вычисляются, и мы получаем, используя (13), (11), (10),

$$
\begin{aligned}
G'_1(\mathbf{r},\mathbf{r},t,t+\delta) = \frac{1}{4m\gamma}\frac{\sigma_l-\sigma_z\sigma_l\sigma_z}{2}(\operatorname{div}\mathbf{\Omega}^l - i\operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^l) + \\
+ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sigma_z\sigma_l-\sigma_l\sigma_z}{4}\operatorname{div}\mathbf{\Omega}^l - i\frac{(1+\sigma_z)\sigma_l+\sigma_l(1+\sigma_z)}{4}\operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^l\right],
\end{aligned}
$$

где мы учли только основную, не зависящую от спина, часть $g_1 \sim m$. В выражении (14) для G_1 в члене, содержащем Ω_t^l нужно учитывать только случай $s = s' = 0$, так как другие комбинации дают величины порядка m, которыми мы пренебрегаем. Вклад дают только члены с полюсом первого порядка по ω, который легко считается:

$$G_1'' = -\frac{i}{2\pi}\Omega_t^l \frac{\sigma_l - \sigma_z\sigma_l\sigma_z}{4\gamma\rho}.$$

В итоге окончательное выражение имеет вид

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t+\delta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sigma_z\sigma_l - \sigma_l\sigma_z}{4}\operatorname{div}\mathbf{\Omega}^l - i\frac{(1+\sigma_z)\sigma_l + \sigma_l(1+\sigma_z)}{4}\operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^l\right] - $$
$$- i\Omega_t^l \frac{\sigma_l - \sigma_z\sigma_l\sigma_z}{8\pi\gamma\rho} + \frac{1}{4m\gamma}\frac{\sigma_l - \sigma_z\sigma_l\sigma_z}{2}(\operatorname{div}\mathbf{\Omega}^l - i\operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^l). \tag{20}$$

Для плотности $\rho = -i\operatorname{Sp} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t, t+\delta)$ получим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi}(1 - \operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^z). \tag{21}$$

Этот результат был впервые получен из феноменологических соображений в работе [1]. В рамках неспроектированных функций этот факт имеет простую физическую интерпретацию: нижний уровень Ландау в локальном «эффективном» магнитном поле $\mathcal{H}_{eff} = 1 - \operatorname{rot}\mathbf{\Omega}^z$ заполнен полностью, что соответствует плотности $\rho = 1/2\pi l^2(\mathcal{H}_{eff})$, где $l(\mathcal{H}_{eff})$ — магнитная длина в эффективном поле.

Однако, хотя вычисления проводились в первом порядке по Ω, результат содержит производные, что соответствует второму порядку. Поэтому необходимо вычислить поправку второго порядка к функции Грина, имеющую в символических обозначениях вид

$$G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t, t+\delta) = \frac{1}{m^2}G_0(\Omega_+^l\pi^- + \Omega_-^l\pi^+)\sigma_l G_0(\Omega_+^{l'}\pi^- + \Omega_-^{l'}\pi^+)\sigma_{l'}G_0 + G_0H_2G_0.$$

Так как эта величина второго порядка, то можно не учитывать производных от Ω. Вклад от последнего члена равен нулю, так как с этой точностью в выражении для G_2 нужно учитывать только состояния с $s = 0$, что приводит к полюсу второго порядка в плотности, и интегрирование по ω дает нуль. В первом члене имеются два типа вкладов $g_0g_1g_0$ и $g_1g_0g_1$, где g соответствует одной из трех гриновских функций в этом выражении. Интегралы по пространственным переменным и p легко вычисляются и мы получаем

$$G_2 = \frac{1}{m^2 2\pi}\int [g_0\sigma_l g_1\sigma_{l'}g_0\Omega_+^l\Omega_-^{l'} + g_1\sigma_l g_0\sigma_{l'}g_1\Omega_-^l\Omega_+^{l'}]e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}d^2r\,dt.$$

В поправку второго порядка к плотности входит шпур от этого выражения. Переставляя матрицы под знаком шпура мы получим в первом члене в квадратных скобках квадрат диагональной матрицы $g_0^2(\omega)$, имеющей полюс второго порядка. Используя обычное правило для нахождения вычета в полюсе в верхней полуплоскости, получаем

$$\operatorname{Sp} G_2 = \frac{1}{2\pi m^2}\int\left[-2g_1^2\Omega_+^l\Omega_-^l + 2g_1^2\Omega_+^l\Omega_-^l\right]d^2r\,dt = 0.$$

Таким образом, с точностью до второго порядка включительно, плотность дается выражением (21), совпадающим с полученным в приближении [1].

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИЯ, ЭНЕРГИИ И ЧИСЛА ЧАСТИЦ

Для вычисления действия используем формулу $S = i\,\mathrm{Sp}\ln G$, пользуясь теорией возмущений для G и оставляя только часть, зависящую от матрицы поворота:

$$S = i\,\mathrm{Sp}\left[H_1G_0 + \frac{1}{2}H_1G_0H_1G_0 + H_2G_0 + \frac{1}{2}(H_2G_0H_1G_0 + H_1G_0H_2G_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}H_1G_0H_1G_0H_1G_0 + \ldots\right].$$

В этом разделе мы ограничимся вторым порядком теории возмущений. Вычисления аналогичны вычислениям функции Грина. Действие первого порядка имеет вид

$$S_1 = i\,\mathrm{Sp}\int \Omega_t^l \sigma_l g_0(\omega) e^{i\omega\delta}\frac{d^2r dt}{2\pi}\frac{d\omega}{2\pi} + i\,\mathrm{Sp}\int \sigma_l g_0(\omega) e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}(\Omega_+^l\pi^- + \Omega_-^l\pi^+)\Phi_{0p}(r)\Phi_{0p}^*(r)d^2r dt.$$

Второй интеграл вычисляется интегрированием по частям, и мы получим окончательный ответ:

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \Omega_t^z dr dt - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2m}\int (i\,\mathrm{div}\boldsymbol{\Omega}^z - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}^z)d^2r dt. \tag{22}$$

Действие второго порядка состоит из двух членов, один из которых содержит произведение двух H_1:

$$S_2' = \frac{i}{2m^2}\,\mathrm{Sp}\int (\Omega_-^l\pi^+ + \Omega_+^l\pi^-)\sigma_l g_s(\omega)\Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi_{sp}^*(\mathbf{r}') \times$$
$$\times (\Omega_-^{l'}\pi^+ + \Omega_+^{l'}\pi^+)\sigma_{l'} g_{s'}(\omega)\Phi_{s'p'}(\mathbf{r}')\Phi_{s'p'}^*(\mathbf{r})e^{i\omega\delta}d^2r'd^2r dt\frac{d\omega}{2\pi}.$$

В этом выражении мы пренебрегаем производными от Ω. Отличны от нуля только члены с $s = 0$, $s' = 1$ и $s = 1, s' = 0$. Пользуясь свойствами операторов π^+, π^- и выполняя интегрирование, нетрудно получить выражение для полного действия второго порядка (вклад от члена с H_2 легко вычисляется совершенно аналогично):

$$S_2 = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Sp}\,[\sigma_{l'}\sigma_l(1+\sigma_z) + \sigma_l\sigma_{l'}]\,(1+\sigma_z)\Omega_-^l\Omega_+^{l'}d^2r dt - \frac{1}{2\pi}\int\left[\frac{(\boldsymbol{\Omega}^l)^2}{2m} - \frac{i}{2m}\frac{\partial\Omega_k^z}{\partial r_k}\right]d^2r dt.$$

В первом интеграле имеется симметричная часть, соответствующая случаю $l = l'$, которая взаимно уничтожается со вторым интегралом. Остающаяся несимметричная часть содержит только $l, l' = x, y$ и может быть переписана с использованием тождества $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}^z = 2(\Omega_x^x\Omega_y^y - \Omega_y^x\Omega_x^y)$, которое получается путем дифференцирования тождества $U^+U = 1$. В итоге мы получаем действие во втором порядке:

$$S_2 = \frac{1}{2m}\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}^z\frac{d^2r dt}{2\pi} + i\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{\Omega}^z\frac{d^2r dt}{2\pi}. \tag{23}$$

Полное действие с точностью до второго порядка включительно с учетом (22) имеет вид

$$S = \int \Omega_t^z\frac{d^2r dt}{2\pi} + \frac{1}{m}\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}^z\frac{d^2r dt}{2\pi} - \mu\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}^z\frac{d^2r dt}{2\pi}, \tag{24}$$

причем мы добавили член с химическим потенциалом.

Полученные результаты находятся в полном соответствии с результатами предварительной работы [9] и имеют простую физическую интерпретацию. Электроны локально занимают нижний спиновый подуровень в локальном эффективном магнитном поле $\mathscr{H}_{eff} = 1 - \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z$, причем занимают его локально полностью, так что плотность совпадает с локальной плотностью состояний. Это обстоятельство делает справедливыми полученные утверждения с точностью порядка $V_{int}/\hbar\omega_c$ и оправдывает использование приближения Хартри–Фока точно так же, как это имеет место в однородном случае для полностью заполненного уровня Ландау. Эффективное магнитное поле будет меньше внешнего поля для вихрей-скирмионов с положительным Q. Отметим, что щель между локальными спиновыми подуровнями определяется обменным членом. Электроны с направлением спина, противоположным направлению среднего спина, будут «видеть» эффективное магнитное поле $\mathscr{H}_{eff} = 1 + \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z$.

Рассмотрим более подробно выражение для энергии в стационарном случае, принимая во внимание изменение членов с взаимодействием. В случае кулоновского взаимодействия необходимо учитывать компенсирующий положительный фон, который приводит к отсутствию нулевой фурье-компоненты потенциала, благодаря чему в выражении для прямого взаимодействия нет линейного члена по изменению плотности, а есть только квадратичное выражение

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z(\mathbf{r}') \frac{d^2r d^2r'}{(2\pi)^2}.$$

Выражение для обменной энергии начинается с линейного по возмущению плотности члена. Для его вычисления необходимо найти плотность обменной энергии как функцию магнитного поля для полностью заполненного уровня Ландау $-(e^2/2\pi l^3_{\mathscr{H}})\sqrt{\pi/2}$, продифференцировать по магнитному полю и умножить на добавку к эффективному магнитному полю, что приводит к возмущению обменной энергии

$$E_{ex} = \int \frac{3e^2}{4\sqrt{2\pi} l_{\mathscr{H}}} \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z d^2r.$$

Кроме того, необходимо учесть поправку из-за неоднородности направления среднего спина, $(1/2)J\int(\partial n^i/\partial r_k)^2 d^2r$, где величина $J = (1/16\sqrt{2\pi})e^2/l_{\mathscr{H}}$ (см. например [3, 4]. Мы должны также учесть зеемановскую энергию. В итоге получаем выражение для изменения термодинамической энергии из-за образования вихря:

$$F = \delta\langle H - \mu N\rangle = -\frac{\hbar\omega_c}{2}Q + \frac{3e^2}{2l_{\mathscr{H}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}Q + \\ + \frac{e^2}{2}\int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z(\mathbf{r}) \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}^z(\mathbf{r}')}{(2\pi)^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2r d^2r' + \int \left[\frac{1}{2}J\left(\frac{\partial n_i}{\partial r_k}\right)^2 + g\mathscr{H}\mathbf{n}\frac{1}{2\pi l^2_{\mathscr{H}}}\right] d^2r. \quad (25)$$

Мы полагали в этом выражении химический потенциал $\mu = \hbar\omega_c/2$ соответствующим полному заполнению нижнего спинового подуровня вдали от кора вихря. По предположению, циклотронная энергия много больше энергии взаимодействия и, следовательно, величина F отрицательна при положительном топологическом числе Q, определяющем изменение числа электронов $\delta N = -Q$ при образовании вихря. Таким образом, появление несингулярных вихрей термодинамически выгодно при химическом потенциале, соответствующем заполнению нижнего спинового подуровня Ландау, и они должны спонтанно возникать. Выигрыш в термодинамической энергии возрастает с ростом Q.

Можно также вычислить энергию одночастичных возбуждений при наличии вихря. Это можно сделать, исследуя полюсы функции Грина $G(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega)$, однако удобнее использовать то, что эти энергии соответствуют вариационной производной полной энергии по локальной плотности электронов с различным направлением спина. Записывая величину F как функционал от плотностей ρ_+, ρ_-, где знаки соответствуют направлению по и против локального среднего спина, получим

$$F = \int\left\{\frac{\hbar\omega_c(\mathcal{H}^+_{eff})\rho_+ + \hbar\omega_c(\mathcal{H}^-_{eff})\rho_-}{2} - \mu(\rho_+ + \rho_-) - \frac{1}{2}(\rho_+ - \rho_-)^2\left[\gamma' - J'\left(\frac{\partial n^l}{\partial r_k}\right)^2\right]\right\} d^2r +$$

$$+ \int \frac{e^2}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[\delta\rho_+(\mathbf{r} + \delta\rho_-(\mathbf{r})\right]\left[\delta\rho_+(\mathbf{r}') + \delta\rho_-(\mathbf{r}')\right] d^2r d^2r' + \int g\mathcal{H}\mathbf{n}(\rho_+ - \rho_-)d^2r. \qquad (26)$$

В этом выражении

$$\gamma'\rho_+^2 = \frac{e^2}{2\pi l_{\mathcal{H}}{}^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{3e^2}{4\pi l_{\mathcal{H}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z, \qquad J'\rho_+^2 = J.$$

Варьируя по плотностям ρ_+, ρ_-, получаем энергию дырки в заполненном состоянии:

$$\epsilon_h = -\frac{\delta F}{\delta\rho_+} = \frac{2e^2}{l_{\mathcal{H}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{3}{2}l^3_{\mathcal{H}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z\right) +$$

$$+ \frac{\hbar\omega_c}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z + \int\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{rot}\,\Omega^z(\mathbf{r}')\frac{d^2r'}{2\pi} - 2\pi J l^2_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial n^l}{\partial r_k}\right)^2 - g\mathcal{H}\mathbf{n}. \qquad (27)$$

Аналогично для энергии электрона с перевернутым спином имеем

$$\epsilon_e = \frac{2e^2}{l_{\mathcal{H}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{3l^2_{\mathcal{H}}}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z\right) + \frac{\hbar\omega_c}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z -$$

$$- \int\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z(\mathbf{r}')\frac{d^2r'}{2\pi} + 2\pi J l^2_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial n^l}{\partial r_k}\right)^2 - g\mathcal{H}\mathbf{n}. \qquad (28)$$

Полученные результаты справедливы при условии применимости теории возмущений по величине Ω, что означает малость поправок к энергии одночастичных возбуждений в сравнении с исходной энергетической щелью, отделяющей нижний спиновый подуровень от верхнего. Таким образом, для справедливости теории возмущений необходимо, чтобы наибольший дополнительный член в выражении для одночастичной энергии, $(\hbar\omega_c/2)l^2_{\mathcal{H}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega}^z \sim (\hbar\omega_c/2)l^2_{\mathcal{H}}/L^2_c$, был мал по сравнению с основным членом — обменной энергией, $\sim e^2/l_{\mathcal{H}}$. Отсюда следует, что размер кора вихря должен быть достаточно велик, $L_c \gg l_{\mathcal{H}}\sqrt{\hbar\omega_c/e^2}$. Это неравенство требует достаточно малой величины g-фактора, так как размер кора определяется конкуренцией зеемановской и кулоновской энергий: $g\mathcal{H}\rho L^2_c \sim e^2/L_c$. Отсюда следует, что должно быть выполнено неравенство

$$L^3_c \sim e^2 l^2_{\mathcal{H}}/g\mathcal{H} \gg l^3_{\mathcal{H}}(\hbar\omega_c l_{\mathcal{H}}/e^2)^{3/2}.$$

Отметим, что добавление электрона с перевернутым спином увеличивает термодинамическую энергию на величину обменной энергии и уменьшает на величину кулоновской энергии взаимодействия с зарядом вихря-скирмиона (с положительным Q), прочие члены существенно меньше из-за малости градиентов. При этом кулоновская энергия увеличивается с полным зарядом кора, обменная энергия определяется локально и в главном члене не зависит от этого заряда. Это обстоятельство делает возможным появление как метастабильных, так и связанных состояний ниже уровня химического потенциала. При этом суммарное количество спинов с невыгодной ориентацией в магнитном поле будет на единицу меньше, чем для вихря без связанного электрона; термодинамическая выгодность образования вихря при этом сохраняется. Для реальных экспериментальных условий превышение циклотронной энергии над кулоновской не очень велико и g-фактор не очень мал, поэтому эти утверждения требуют численной проверки.

4. ИНВАРИАНТ ХОПФА В ДЕЙСТВИИ

Кроме топологического числа Q — степени отображения — имеется еще топологический инвариант Хопфа, соответствующий степени зацепленности линий с постоянным значением $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ для нестационарной матрицы U (см., например, [12]). Этот инвариант должен входить в выражение для действия, а коэффициент при нем определять статистику вихрей-скирмионов или, точнее, изменение фазы при перемене двух скирмионов местами [13]. Этот коэффициент был вычислен в работе [5] в модели функций, спроектированных на один уровень Ландау. Однако это вычисление содержит ряд трудно проверяемых предположений и результат был поставлен под сомнение в дискуссии [6]. Авторы этой работы ссылаются на проделанное ими ранее квазиклассическое вычисление, использующее частоту и импульс в качестве «хороших» квантовых чисел для вычисления гриновской функции, и приводят соответствующий ответ. В настоящем разделе мы проведем вычисление этого коэффициента непосредственно, в пределе большого внешнего магнитного поля, без дополнительных предположений. Для этого нужно найти действие в третьем порядке по Ω, причем мы ограничимся членами, содержащими первую степень Ω_t^l, которые входят в инвариант Хопфа.

Используя теорию возмущений для функции Грина, нетрудно получить выражение для действия в третьем порядке теории возмущений

$$S = i\,\mathrm{Sp}\left[H_1G_0 + \frac{1}{2}H_1G_0H_1G_0 + H_2G_0 + \frac{1}{2}(H_1G_0H_2G_0 + H_2G_0H_1G_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}H_1G_0H_1G_0H_1G_0\right]. \qquad (29)$$

Члены до второго порядка включительно были вычислены в предыдущем разделе, однако надо иметь в виду, что в членах формально второго порядка не учитывались производные по времени, которые войдут в выражение для действия в третьем порядке. Мы будем последовательно вычислять различные члены третьего порядка.

Рассмотрим член второго порядка по H_1, содержащий Ω_t^l, который был опущен в предыдущем разделе в предположении $\Omega_t \sim \mathbf{\Omega}^2$. После несложных вычислений имеем

$$S_2^1 = \frac{i}{m}\int \mathrm{Sp}\,\sigma_l g_s(\omega)\sigma_{l'} g_s'(\omega) e^{i\omega\delta}\Omega_t^l(r,t)\Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi_{sp}^*(\mathbf{r}_1) \times$$

$$\times \left[\Omega_+^{l'}(\mathbf{r}_1,t)\pi^- + \Omega_-^{l'}(\mathbf{r}_1,t)\pi^+\right] \Phi_{s'p'}(\mathbf{r}_1)\Phi^*_{s'p'}(\mathbf{r})d^2rd^2r'dt\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{30}$$

С нужной точностью имеется один член с $s = s' = 0$ и члены с $s = 1$, $s' = 0$; $s = 0$, $s' = 1$. Вводя переменные $\mathbf{R} = (\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)/2$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ и разлагая $\Omega_t(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_1)$ с точностью до первого порядка по ρ включительно, получим

$$S_{200}^1 = \frac{i\sqrt{2}}{2m}\int \mathrm{Sp}\,\sigma_l g_0(\omega)\sigma_{l'} g_0(\omega)e^{i\omega\delta}\left[\Omega_t^l(\mathbf{R})\frac{\partial\Omega_-^{l'}}{\partial R_k} - \Omega_-^{l'}(\mathbf{R})\frac{\partial\Omega_t^l}{\partial R_k}\right]\times$$
$$\times R_{00}(-\boldsymbol{\rho})R_{10}(\boldsymbol{\rho})\rho_k d^2\rho d^2R dt\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Учитывая выражения (10), (11) и вычисляя соответствующие интегралы по ω и $\boldsymbol{\rho}$, получим

$$S_{200}^1 = \frac{1}{4m\gamma}\int\left[i\Omega_t^l \mathrm{div}\boldsymbol{\Omega}^l - i(\boldsymbol{\Omega}_l\nabla)\Omega_t^l - \Omega_t^l\nabla\times\boldsymbol{\Omega}^l - \boldsymbol{\Omega}^l\times\nabla\Omega_t^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi}. \tag{31}$$

Аналогично вычисляются члены с $s = 0, s' = 1; s = 1, s' = 0$:

$$S_{201}^1 = \frac{1}{2}\int\left[\Omega_t^l\nabla\times\boldsymbol{\Omega}^l + \boldsymbol{\Omega}^l\times\nabla\Omega_t^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_l\sigma_{l'}\sigma_z\times$$
$$\times\int\left[-i\Omega_t^l\mathrm{div}\boldsymbol{\Omega}^{l'} + i\boldsymbol{\Omega}^{l'}\nabla\Omega_t^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi}. \tag{32}$$

Кроме вычисленного имеется еще вклад второго порядка с двумя $\boldsymbol{\Omega}^l$, который рассматривался в предыдущем разделе, однако без учета временных производных. Эти производные мы учитываем аналогично пространственным производным, вводя переменные $T = (t+t')/2, \tau = t'-t$, причем для наших целей нужно принимать во внимание только члены с $s = 1$, $s' = 0$ и $s = 0$, $s' = 1$, так как остальные содержат лишние производные. Опуская величину, не содержащую временных производных, получим

$$S_2^2 = \frac{i}{m^2}\int \mathrm{Sp}\,\sigma_l g_0(\omega)\sigma_{l'} g_1(\omega')e^{i\omega\delta}\tau\exp\left[i(\omega-\omega')\tau\right]\times$$
$$\times\left[\Omega_-^l\frac{\partial\Omega_+^{l'}}{\partial T} - \Omega_+^{l'}\frac{\partial\Omega_-^l}{\partial T}\right]\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}d\tau\frac{dT\,d^2r}{2\pi}.$$

Заменяя τ через производную от соответствующей экспоненты и интегрируя по частям, получим, используя (16),

$$S_2^2 = -\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\Omega}^l\times\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}^l}{\partial t}\frac{d^2rdt}{2\pi} - \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_{l'}\sigma_l\sigma_z\int\left(\boldsymbol{\Omega}^l\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}^{l'}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega}^{l'}\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}^l}{\partial t}\right)\frac{d^2rdt}{2\pi}.$$

При вычислении третьего порядка в действии все члены должны быть выражены однотипно через производные от Ω^l. Используя тождество $\partial_t\Omega_k^l - \partial_k\Omega_t^l = 2e^{ljm}\Omega_t^j\Omega_k^m$, где e^{ljm} — совершенно антисимметричный тензор третьего ранга, нетрудно преобразовать полученное выражение к виду

$$S_2^2 = -\frac{1}{2}\int \left(\mathbf{\Omega}^l \times \nabla\Omega_t^l + e^{ljm}\mathbf{\Omega}^l \times \mathbf{\Omega}^m \Omega_t^j\right)\frac{d^2rdt}{2\pi} - \frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_{l'}\sigma_l\sigma_z \times$$
$$\times \int \left(\mathbf{\Omega}_l \nabla\Omega_t^{l'} + 2e^{l'jm}\mathbf{\Omega}^l\mathbf{\Omega}^m\Omega_t^j\right)\frac{d^2rdt}{2\pi}. \qquad (33)$$

Среди членов собственно третьего порядка простейшим является, содержащий H_2 и H_1:

$$S_{21} = \frac{i}{2m}\,\mathrm{Sp}\int \left[(\mathbf{\Omega}^l)^2 - i\sigma_l \mathrm{div}\mathbf{\Omega}^l\right]\Omega_t^{l'} g_0(\omega)\sigma_{l'} g_0(\omega) e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^2rdt}{2\pi}. \qquad (34)$$

Остальные члены содержат дополнительные производные. Вклад дает только член с дивергенцией:

$$S_{21} = -\frac{i}{2m\gamma}\sum_{l\neq z}\int \Omega_t^l \mathrm{div}\mathbf{\Omega}^l \frac{d^2rdt}{2\pi}. \qquad (35)$$

Остаются члены третьего порядка, содержащие только H_1, с двумя пространственными Ω_k^l и одной временной Ω_t^l компонентами:

$$S_3 = \frac{i}{m^2}\int \Omega_t^l \Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi_{sp}^*(\mathbf{r}_1)(\Omega_+^{l_1}\pi^- + \Omega_-^{l_1}\pi^+)\Phi_{s_1p_1}(\mathbf{r}_1)\Phi_{s_1p_1}^*(\mathbf{r}_2) \times$$
$$\times (\Omega_+^{l_2}\pi^- + \Omega_-^{l_2}\pi^+)\Phi_{s_2p_2}(\mathbf{r}_2)\Phi_{s_2p_2}^*(\mathbf{r})d^2rd^2r_1d^2r_2dt\int \mathrm{Sp}\,\sigma_l g_s \sigma_{l_1} g_{s_1}\sigma_{l_2} g_{s_2} e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Вклад в нужном порядке дают члены с $s = s_2 = 0$; $s_1 = 1$ и $s = s_2 = 1$; $s_1 = 0$, причем производных от Ω учитывать не нужно.

Вычисления в первом случае аналогичны вычислению (31), (35). Используя стандартную формулу и выражая все через Ω_t^l и $\mathbf{\Omega}^l$, получим

$$S_3^0 = -\frac{i}{m\gamma}\sum_{l\neq z}\mathrm{Sp}\,\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int \Omega_t^l \mathbf{\Omega}^{l_1} \times \mathbf{\Omega}^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi} +$$
$$+ \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_z\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int \Omega_t^z \mathbf{\Omega}^{l_1}\mathbf{\Omega}^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq z}\int \Omega_t^z(\mathbf{\Omega}^l)^2\frac{d^2rdt}{2\pi} \qquad (36)$$

Результат для случая $s = s_2 = 1; s_1 = 0$ получается стандартным способом с использованием выражения для шпуров от произведения матриц Паули:

$$S_3^1 = -\frac{1}{2}\int \Omega_t^z(\mathbf{\Omega}^z)^2\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq z}\int \left[\Omega_t^z(\mathbf{\Omega}^l)^2 - \Omega_t^l\mathbf{\Omega}^z\mathbf{\Omega}^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2} \times$$
$$\times \int \Omega_t^l \mathbf{\Omega}^{l_1} \times \mathbf{\Omega}^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi}. \qquad (37)$$

Окончательное выражение для части действия, содержащей хопфовский инвариант, получается путем сложения найденных членов (31)–(33), (35)–(37). Поясним результат такого сложения. Члены, содержащие $1/\gamma$ в выражениях для S_3^0, S_2^0, S_{21}, сводятся к интегралу от полной производной:

$$\frac{1}{4m\gamma}\sum_{l\neq z}\int\left[-i\operatorname{div}(\Omega_t^l\mathbf{\Omega}^l)-\nabla\times(\Omega_t^l\mathbf{\Omega}^l)\right]\frac{d^2r\,dt}{2\pi}=0$$

в силу того, что Ω^l при $l\neq z$ экспоненциально убывает на больших расстояниях. Точно так же член, содержащий

$$-\frac{i}{4}\operatorname{Sp}\sigma_l\sigma_m\sigma_z\int\left\{\Omega_t^l\operatorname{div}\mathbf{\Omega}^m+(\mathbf{\Omega}^m\nabla)\Omega_t^l\right\}\frac{d^2r\,dt}{2\pi},$$

сводится к исчезающему интегралу по бесконечно удаленной поверхности.

Взаимно уничтожаются также члены, содержащие $\Omega_t^z(\mathbf{\Omega}^l)^2$ и $\Omega_t^l(\mathbf{\Omega}^z\mathbf{\Omega}^l)$, для чего нужно использовать алгебраические тождества для преобразования величины S_2^2. В результате остаются только кососимметрические члены в действии S_3:

$$S_3=\frac{i}{4}\operatorname{Sp}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int\Omega_t^l\mathbf{\Omega}^{l_1}\times\mathbf{\Omega}^{l_2}\frac{d^2r\,dt}{2\pi}+\frac{1}{2}\int\Omega_t^l\nabla\times\mathbf{\Omega}^l\frac{d^2r\,dt}{2\pi}-\int e^{ljm}\Omega_t^j\mathbf{\Omega}^l\times\mathbf{\Omega}^m\frac{d^2r\,dt}{2\pi}.$$

Вычисляя шпур и пользуясь тождеством для $\nabla\times\mathbf{\Omega}^l$, получим окончательно

$$S_3=e^{ljm}\int\Omega_t^l\mathbf{\Omega}^j\times\mathbf{\Omega}^m\frac{d^2r\,dt}{2\pi}. \tag{38}$$

Согласно [12, 13], целочисленный Хопфовский инвариант может быть выражен через Ω:

$$h=\frac{1}{2\pi^2}\int e^{ljm}\Omega_t^l\mathbf{\Omega}^j\times\mathbf{\Omega}^m d^2r\,dt.$$

Таким образом, хопфовский член в выражении для действия имеет вид

$$S^h=\pi h. \tag{39}$$

Этот результат совпадает с результатом, приведенным в [6], и не совпадает с результатом работы [5]. Таким образом, вихри-скирмионы в принятой терминологии [12] являются фермионами.

Нужно помнить, однако, что целочисленный инвариант Хопфа h соответствует отображению сферы S_3 в сферу S_2, что в нашем случае требует обращения в нуль величин Ω при больших $\mathbf{r},t$ т.е. $Q=0$. Если же вихри-скирмионы существуют при любых t, то целочисленный топологический инвариант, характеризующий зацепление кривых $\mathbf{n}=\text{const}$, несколько видоизменяется [14, 15]. При этом, однако, сохраняется найденное соответствие между S_3 и h и утверждение о «фермионном» характере вихрей скирмионов сохраняется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели теорию несингулярных вихрей-скирмионов для двумерных электронных систем в сильном магнитном поле. Результаты не используют каких-либо приближений, кроме предполагаемой большой величины $\hbar\omega_c$ по сравнению с кулоновской энергией $e^2/l_{\mathcal{H}}$ и малой величины g-фактора. Показано, что широко используемое приближение волновых функций, спроектированных на один уровень Ландау недостаточно для адекватного описания. Учет ближайших уровней Ландау существен и меняет выражение для термодинамической энергии вихря-скирмиона, уменьшая ее на величину $\hbar\omega_c/2$, большую по предположению. Это обстоятельство должно приводить к спонтанному образованию вихрей-скирмионов с положительной степенью отображения вблизи нечетных заполнений. При малом g-факторе и соответственно большом размере кора вихря возникает простая физическая картина [9]: в коре вихря имеется дополнительное «эффективное» магнитное поле, полный поток которого содержит число квантов потока, равное топологическому инварианту — степени отображения. Локально уровень Ландау в полном магнитном поле (внешнее плюс эффективное поля) заполнен полностью и отделен щелью от более высоких по энергии состояний. При этом полное число частиц меняется из-за изменения плотности, которая совпадает с локальной плотностью состояний. В результате появляется электрический заряд соответствующий удалению числа электронов, равного числу квантов потока эффективного поля для положительных степеней отображения. Положительный локальный заряд может создавать связанные электронные состояния. Положение их энергии относительно уровня химического потенциала определяется отрицательной энергией взаимодействия с заряженным кором и положительной обменной энергией, так как локальные состояния с выгодным направлением спина уже заняты. Поскольку обменная энергия порядка $e^2/l_{\mathcal{H}}$ и не связана с размерами кора в отличие от кулоновской энергии порядка e^2/L_c, где $L_c \sim l_{\mathcal{H}}(e^2/l_{\mathcal{H}} g \mathcal{H})^{1/3}$, которая падает с их увеличением, то в рамках нашего приближения уровень энергии связанных состояний будет выше уровня химического потенциала. В реальных экспериментах L_c не сильно отличается от $l_{\mathcal{H}}$, и ответ на этот вопрос требует численных расчетов. Отметим, что появление связанных состояний уменьшает изменение полного спина из-за образования вихрей. Найден также топологический хопфовский член в выражении для действия. Результат для коэффициента при инварианте Хопфа совпадает с приведенным квазиклассическим результатом работы [6]. Таким образом, вихри-скирмионы должны вести себя как фермионы. Все это делает вихри-скирмионы весьма похожими на «композитные» фермионы введенные феноменологически ранее [16].

Авторы выражают благодарность Г. Е. Воловику за полезные обсуждения. Исследование выполненное в настоящей публикации было произведено частично благодаря гранту RP1-273 US Civilian Research and Development Foundation for Independent States of Former Soviet Union. Настоящая работа поддержана также грантом № 95-02-05883 Российского фонда фундаментальных исследований и программой «Статистическая физика» Министерства науки России.

Литература

1. S. Sondhi, A. Kahlrede, S. Kivelson, and E. Rezai, Phys. Rev. B **47**, 16418 (1993).
2. H. Fertig, L. Brey, R. Cote, and A. Mac, Donald Phys. Rev. B **50**, 11018 (1994).
3. K. Moon, H. Mori, Kun Yang, S. Girvin, and A. Mac Donald, Phys. Rev. B **51**, 5138 (1995).
4. Yu. Bychkov, T. Maniv, and I. Vagner, Phys. Rev. B **53**, 10148 (1995).
5. W. Apel and Yu. Bychkov, Phys. Rev. Lett. **78**, 2188 (1997).
6. G. Volovik and V. Yakovenko, E-prints archive Cond-mat/9703228, 26 March (1997).
7. S. Barret, G. Dabbagh, L. Pfeiffer, K. West, and R. Tycko, Phys. Rev. Lett. **74**, 5112 (1995).
8. I. Kukushkin, K. von Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. B **55**(16) (1997).
9. С. Иорданский, С. Плясунов, Письма ЖЭТФ **65**, 248 (1997).

10. M. Salomaa and G. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
11. А. Абрикосов, Л. Горьков, И. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Наука, Москва (1962).
12. F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983).
13. G. Volovik and V. Yakovenko, J. Phys. Cond. Matter **1**, 5263 (1989).
14. V. Ruutu, U. Parts, J. Koivuniemi, M. Krusius, E. Thunenberg, and G. Volovik, Письма в ЖЭТФ **60**, 659 (1994).
15. Yu. Makhlin and T. Misirpashaev, Письма в ЖЭТФ **61**, 48 (1995).
16. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).