

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА СТУПЕНЬКЕ ПОТЕНЦИАЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Жилин, С. В. Иорданский

*Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 1997 г.

Рассматривается рассеяние двумерных электронов, дрейфующих в скрещенных электрическом и магнитном полях на резкой ступеньке внешнего потенциала. Задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что при умеренных электрических полях становится заметным рассеяние с изменением индекса уровня Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные электроны в сильном магнитном поле являются предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. Из-за дискретности спектра и макроскопического вырождения уровней Ландау реальные физические свойства таких систем определяются механизмом снятия вырождения, так как в противном случае скорость электронов равна нулю и перенос заряда невозможен. В частности, квантовый эффект Холла тесно связан с существованием случайного потенциала, создаваемого примесями.

Задача о рассеянии электронов также не может быть поставлена для свободных электронов по той же причине из-за равенства нулю скорости электронов. Однако при наличии внешнего потенциала возникает скорость дрейфа электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях, и может быть поставлена задача о рассеянии. Наиболее изучена задача о рассеянии электронов на седловой точке потенциала (вблизи пересечения двух линий уровня потенциала), которая может быть решена точно в квадратичном приближении [1].

В настоящей работе мы рассмотрим рассеяние электронов на резкой ступеньке внешнего потенциала вида

$$U = -U_0\theta(y), \quad \theta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

что является идеализацией края резкой неоднородности с размерами, намного превышающими магнитную длину $l_H^2 = \hbar/eH$, где H — внешнее магнитное поле, направленное по нормали к двумерной плоскости xy .

Такая неоднородность может быть создана искусственно путем наложения управляющих электродов или возникать в силу внутренних причин, вызывающих резко неоднородное распределение локализованных электронов, как это предполагается в ряде объяснений разрушения бездиссипативного состояния квантового эффекта Холла [2, 3]. Вдали от ступеньки предполагается существующим однородное электрическое поле

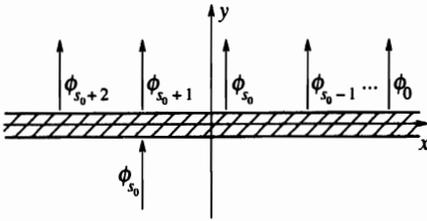


Рис. 1. Схематическое изображение процесса рассеяния. Стрелками показаны положения волн с различными индексами Ландау с точностью порядка магнитной длины. Направление стрелки соответствует направлению движения волны. Заштрихована зона рассеяния

вдоль направления x , приводящее к конечной скорости $v_y > 0$ дрейфа электронов в направлении к ступеньке. Такое поле может быть идеализацией плавного случайного потенциала или создаваться сознательно. Таким образом, возникает задача о рассеянии электронов в магнитном поле на потенциале

$$U = -\epsilon x - U_0 \theta(y), \tag{2}$$

где $\epsilon < 0$ — электрическое поле.

Отметим, что все электроны, как падающие, так и рассеянные, двигаются в одном и том же направлении ($v_y > 0$), что обеспечивается соответствующим направлением магнитного поля. Результат рассеяния состоит в изменении индекса уровня Ландау и смещении положения волны вдоль оси x в соответствии с законом сохранения энергии (упругое рассеяние), как это показано схематически на рис. 1. Такое рассеяние может представлять интерес для создания неравновесной заселенности уровней Ландау и генерации монохроматического циклотронного излучения.

В дальнейшем мы будем использовать систему единиц, где $l_H = 1$, $\hbar\omega_c = e\hbar H/mc = 1$.

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение Шредингера рассматриваемой задачи имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(i \frac{\partial}{\partial y} + x \right)^2 + [-\epsilon x - U_0 \theta(y)] \right\} \psi = E \psi, \tag{3}$$

где ψ — волновая функция электрона и выбрана калибровка Ландау. Энергия электрона E определяется падающей волной при $y \rightarrow -\infty$, где

$$\begin{aligned} \psi &\approx A_s e^{ik_s y} \Phi_s(x - k_s - \epsilon), \\ E &= s + \frac{1}{2} - k_s \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

s — индекс уровня Ландау, $\Phi_s(x)$ — осцилляторные нормированные функции. Здесь использовано решение уравнения (3) при $U_0 = 0$, величины k_s, A_s задаются падающей волной.

Без ограничения общности можно считать $k_s = 0, A_s = 1$. Случай $k_s \neq 0$ сводится к случаю $k_s = 0$ путем соответствующего сдвига вдоль оси x . Мы ограничимся случаем

$s = 0$, когда падающая волна находится на нижнем уровне Ландау, хотя задача без особых изменений может быть решена для любого s .

Уравнение (3) не допускает разделения переменных. Для решения проведем преобразование Фурье по переменной y уравнения (3):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi_k + (x - k)^2 \psi_k - 2\epsilon x \psi_k - 2E \psi_k = 2U_0 \psi_k^-, \tag{5}$$

где $\psi_k = \psi_k^+ + \psi_k^-$ и

$$\psi_k^- = \int_0^\infty e^{-iky} \psi(x, y) dy, \quad \psi_k^+ = \int_{-\infty}^0 e^{-iky} \psi(x, y) dy.$$

Согласно известным свойствам преобразования Фурье, функция ψ_k^- является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексного k и может быть представлена интегралом

$$\psi_k^- = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{k' - k + i\delta} \psi_{k'} dk', \tag{6}$$

где интеграл берется по действительной оси, $\delta \rightarrow +0$. Левая часть уравнения (5) может быть обращена с помощью функции Грина осцилляторного уравнения

$$G_k(x, x') = \sum_s \frac{1}{E_s(k) - E} \Phi_s(x - k - \epsilon) \Phi_s(x' - k - \epsilon), \tag{7}$$

где

$$\Phi_s(x) = e^{-x^2/2} H_s(x) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^s s!}}, \tag{8}$$

H_s — полином Эрмита:

$$H_s(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx}\right)^s e^{-x^2}. \tag{9}$$

Энергия E содержит положительную малую мнимую добавку в соответствии с условиями Зоммерфельда.

В результате получим интегральное уравнение для функции $\psi_k(x)$:

$$\psi_k(x) = -\frac{U_0}{2\pi i} \int G_k(x, x') \frac{1}{k' - k + i\delta} \psi_{k'}(x') dx' dk' + \psi_0, \tag{10}$$

где ψ_0 описывает падающую волну. Если использовать разложение

$$\psi_k(x) = \sum_s c_s(k) \Phi_s(x - k - \epsilon),$$

следующее из полноты системы функций Φ_s , то уравнение (10) преобразуется в систему уравнений для коэффициентов $c_s(k)$:

$$[E_s(k) - E] c_s(k) = -\frac{U_0}{2\pi i} \int \frac{\Gamma_{ss'}(k - k')}{k' - k + i\delta} c_{s'}(k') dk', \quad (11)$$

причем

$$\Gamma_{ss'}(k) = \int \Phi_s(x - k) \Phi_{s'}(x) dx. \quad (12)$$

Так как, согласно (4), $E_s(k)$ является линейной функцией k , эти уравнения можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений для величин

$$\phi_s(y) = \int c_s(k) e^{iky} \frac{dk}{2\pi}, \quad (13)$$

имеющих вид

$$\left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial y} + s + \frac{1}{2} - E \right) \phi_s(y) = \sum_{s'} V_{ss'}(y) \phi_{s'}(y). \quad (14)$$

Коэффициенты $V_{ss'}$ определяются функциями $\Gamma_{ss'}(k)$:

$$V_{ss'}(y) = U_0 \int_{-\infty}^y dy \int \Gamma_{ss'}(k) e^{iky} \frac{dk}{2\pi}. \quad (15)$$

В дальнейшем будем считать $U_0 > 0$. Падающая волна должна соответствовать току электронов от $y \rightarrow -\infty$ к ступеньке при $y = 0$. Величина этого тока

$$j_y = \int e^{-iky} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} - x \right) e^{iky} \Phi_s^2(x - k - \epsilon) dx = -\epsilon > 0$$

требует, чтобы $\epsilon < 0$. Этот же результат может быть получен из условия Зоммерфельда.

Поведение $\phi_s(y)$ при $y \rightarrow -\infty$ определяется заданием падающей волны в виде $\phi_s = \exp(ik_s y) \delta_{s,s_0}$, а асимптотика при $y \rightarrow +\infty$ задает амплитуды рассеянных волн

$$\phi_s \Big|_{y \rightarrow +\infty} = A_{ss_0} e^{ik_s y},$$

где A_{ss_0} — амплитуда рассеяния с переходом $s \rightarrow s_0$. Что касается осцилляторных функций, то они входят множителями в асимптотику полной волновой функции

$$\psi(x, y \rightarrow +\infty) = \sum_s A_{ss_0} e^{ik_s y} \Phi_s(x - k_s - \epsilon),$$

а также определяют, согласно (12)–(15), коэффициенты $V_{ss'}(y)$.

Интеграл (15) может быть выражен через полиномы Эрмита, так как

$$\int e^{iky} \Phi_s(x - k) \Phi_{s'}(x) dx dk = \frac{1}{2\pi} \tilde{\Phi}_s^*(y) \tilde{\Phi}_{s'}(y),$$

где $\tilde{\Phi}_s^*(y) = \sqrt{2\pi} i^{-s} \Phi_s(y)$, а $\tilde{\Phi}_{s'}(y) = \sqrt{2\pi} i^{s'} \Phi_{s'}(y)$. Таким образом, получаем, согласно (15),

$$V_{ss'}(y) = U_0 i^{s'-s} \int_{-\infty}^y \Phi_s(y) \Phi_{s'}(y) dy. \tag{16}$$

Это выражение для $s = s'$ имеет вид

$$V_{ss'} = U_0 \left[\sum_{l=0}^{l=s-1} \frac{e^{-y^2}}{2^s s! \sqrt{\pi}} H_{s-l}(y) \left(\frac{d}{dy}\right)^l H_s(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2} dy \right], \tag{17}$$

а для $s > s'$ —

$$V_{ss'} = U_0 \frac{i^{s'-s}}{\sqrt{2^s s! 2^{s'} s'! \pi}} \sum_{l=0}^{l=s'} e^{-y^2} H_{s-l-1}(y) \left(\frac{d}{dy}\right)^l H_{s'}(y). \tag{18}$$

Если $s < s'$, то

$$V_{ss'} = V_{s's}^*. \tag{19}$$

Уравнения (14) совместно с выражениями (17)–(19) дают бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\phi_s(y)$ по заданной асимптотике при $y \rightarrow -\infty$ и тем самым решают задачу рассеяния.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Уравнения (14) содержат электрическое поле ϵ в качестве коэффициента перед производными. Поэтому в случае малых электрических полей и конечного U_0 применимо квазиклассическое приближение. Можно показать, что матрица коэффициентов не имеет кратных корней. Поэтому в данном случае с экспоненциальной по $1/\epsilon$ точностью имеется только диагональное рассеяние $s_0 \rightarrow s_0$, вероятность прочих процессов мала, что соответствует ситуации надбарьерного отражения или адиабатического приближения. Электроны чувствуют ступеньку на больших расстояниях от нее и медленно поворачивают в направлении ступеньки, постепенно пересекая ее. В обратном предельном случае, $U_0 \ll \epsilon$, ступенька может рассматриваться как возмущение, и главный член в амплитуде рассеяния соответствует диагональному процессу $s_0 \rightarrow s_0$. Между этими двумя предельными случаями находится максимум для недиагонального рассеяния. Соответствующую амплитуду рассеяния можно определить численно путем нахождения решения $\phi_s(y)$ системы (14). Оказывается, что амплитуды A_{ss_0} быстро убывают при удалении s от s_0 , что позволяет заменить бесконечную систему уравнений на конечную с высокой точностью.

Система дифференциальных уравнений (14) решалась численно методами Рунге–Кутта и Берлица–Штойера. Использовались подпрограммы из пакета Numerical Recipes. Максимальное число волн бралось равным 5, что уже обеспечивало достаточную точность. Длина интервала по y , на котором решалась система уравнений, равнялась 10, что обеспечивало хорошую аппроксимацию. Мы провели вычисления амплитуды рассеяния для падающей волны с $s_0 = 0$ как функции электрического поля ϵ и высоты ступеньки U_0 . На рис. 2 показаны линии уровня для вероятности диагонального рассеяния на плоскости (ϵ, U_0) . На рис. 3 показан модуль $\phi_s(y)$ для различных s

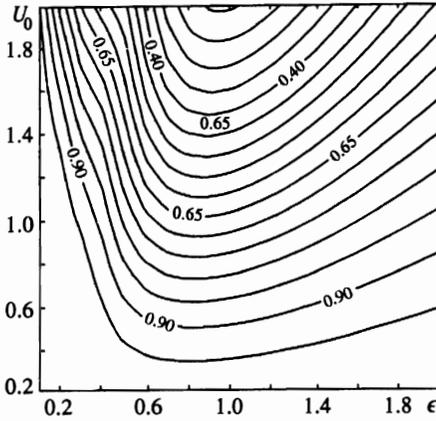


Рис. 2

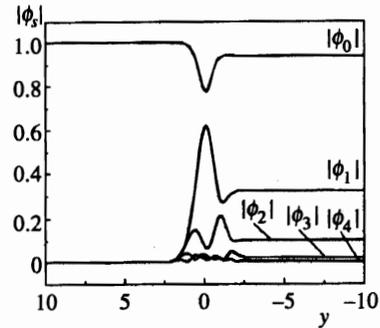


Рис. 3

Рис. 2. Линии уровня вероятности $|\phi_0|^2$ перехода без изменения индекса Ландау для $s_0 = 0$ на плоскости (ϵ, U_0)

Рис. 3. Амплитуда перехода $|\phi_s(y)|$ для пяти значений $s = 0, 1, 2, 3, 4$ в зависимости от y при $U_0 = 1$ и $\epsilon = 0.4$

Вероятность рассеяния различных волн при $U_0 = 1$

U_0	ϵ	$ \phi_0 ^2$	$ \phi_1 ^2$	$ \phi_2 ^2$	$ \phi_3 ^2$	$ \phi_4 ^2$
1.0000	0.1000	0.9997	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.2000	0.9844	0.0154	0.0002	0.0000	0.0000
1.0000	0.3000	0.9397	0.0572	0.0030	0.0001	0.0000
1.0000	0.4000	0.8823	0.1039	0.0127	0.0010	0.0001
1.0000	0.5000	0.7922	0.1790	0.0241	0.0044	0.0004
1.0000	0.6000	0.7199	0.2297	0.0406	0.0083	0.0015
1.0000	0.7000	0.6789	0.2360	0.0696	0.0124	0.0031
1.0000	0.8000	0.6621	0.2163	0.0943	0.0230	0.0043
1.0000	0.9000	0.6617	0.1892	0.1036	0.0400	0.0056
1.0000	1.0000	0.6718	0.1637	0.0997	0.0550	0.0097

при $U_0 = 1, \epsilon = 0.4$. Видна хорошая сходимость по s . В таблице приведена вероятность рассеяния различных волн при $U_0 = 1$ и разных ϵ . Мы видим, что наибольшее значение имеют диагональная амплитуда A_{00} и амплитуда A_{01} , прочие существенно меньше. Вероятность перехода $|A_{01}|$ при умеренном поле $\epsilon = 0.4$ и $U_0 = 1$ довольно значительна и составляет около 0.1 от вероятности диагонального перехода. Это дает сравнительно высокую эффективность получения инверсной заселенности после рассеяния. Возможно, такой механизм дает объяснение возникновению циклотронного излучения при разрушении бездиссипативного режима квантового эффекта Холла [4].

Авторы выражают благодарность С. В. Манакову за обсуждение математических вопросов, связанных с настоящей задачей. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-02-883) и INTAS (грант № 95-I/Ru-675).

Литература

1. H. A. Fertig and V. I. Halperin, Phys. Rev. B **33**, 8447 (1986).
2. M. Djakonov and F. Pikus, Sol. St. Comm. **83**, 413 (1992).
3. С. В. Иорданский, Письма в ЖЭТФ **58**, 307 (1993).
4. *Квантовый эффект Холла*, под ред. Р. Прейнджа, С. Гирвина, Мир, Москва (1989).