

## СТРУКТУРА ФРОНТА БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ УСКОРЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

*И. Н. Топтыгин*

*Санкт-Петербургский государственный технический университет  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 февраля 1997 г.

Развита нелинейная самосогласованная аналитическая теория структуры фронтов сильных МГД бесстолкновительных ударных волн, генерирующих ускоренные (в том числе ультррелятивистские) частицы. Рассчитаны степень сжатия вещества на плоском фронте в такой волне, которая может значительно превышать сжатие на обычном газодинамическом фронте, а также профили скорости, плотности и давления. Самосогласованным образом определен энергетический спектр ускоренных частиц, формируемый сложным профилем скорости на ударном переходе. Предсказаны новые нелинейные эффекты, не отмечавшиеся ранее в литературе: сильная зависимость режимов ускорения от темпа инжекции; наличие в определенном диапазоне мощностей инжекции нескольких режимов, различающихся спектрами ускоренных частиц, формой профиля ударного перехода и величиной сжатия среды; возможность спонтанных скачков между различными состояниями ударного перехода. Обсуждается вопрос об устойчивости этих состояний. При принятых значениях параметров системы нелинейным режимам соответствуют весьма малые скорости инжекции, порядка  $10^{-2} \div 10^{-10}$  от плотности набегающего на фронт потока плазмы, и показатели спектра ускоренных частиц, лежащие в пределах от 5 до 3.

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Структура фронтов бесстолкновительных ударных волн в разреженной плазме уже давно привлекает внимание исследователей [1–3]. Эта проблема приобрела новую грань с тех пор, как было установлено [4, 5], что МГД бесстолкновительные ударные волны в турбулентной среде эффективно преобразуют энергию механического движения плазмы в энергию ускоренных частиц. Главным механизмом ускорения выступает при этом фермиевское ускорение первого порядка. При наличии продольной относительно фронта составляющей магнитного поля некоторый вклад вносит и дрейфовое ускорение частиц электрическим полем [6].

Оценка эффективности преобразования показывает, что в случае сильных ударных волн (число Маха  $M \gg 1$ ) энергия ускоренных частиц становится порядка энергии набегающего гидродинамического потока, что свидетельствует о сильном влиянии ускоряемых частиц на структуру ударного фронта. Это приводит к необходимости решать задачу об ускорении частиц на сильном ударном фронте самосогласованно, так как форма переходного слоя, в свою очередь, влияет на эффективность ускорения и на темп инжекции частиц в режим ускорения из окружающей тепловой плазмы.

Сложность указанной задачи связана не только с ее нелинейным характером, но и с необходимостью комбинировать макроскопический и кинетический подходы при ее решении. Локальные свойства ударной волны могут быть исследованы на основе законов сохранения макроскопических величин, тогда как вычисление основных макроскопи-

ческих параметров ускоренных частиц — их давления и плотности энергии — требует кинетического подхода. Это вызвано тем, что давление ускоренных частиц существенно зависит от формы их спектра и от максимальной энергии, до которой происходит ускорение, а также от мощности инжекции. Кроме того, вычисление энергетического спектра ускоренных частиц представляет и самостоятельный интерес. По указанным причинам при решении поставленной задачи главный упор делался на численные методы [7–9]. Однако численные расчеты не всегда позволяют в достаточной мере прояснить физическую картину и получить общие зависимости от ключевых физических параметров, что может привести к ошибочным выводам. Кроме того, численные методы требуют дальнейшего развития для ситуаций более сложных, чем отдельная ударная волна, например, при наличии ансамбля сильных ударных фронтов [10].

В настоящей работе будет использовано сочетание гидродинамического и кинетического подходов. В разд. 2 основные параметры ударного перехода (величина теплового скачка скорости, форма предфронта, пространственное распределение давления ускоренных частиц) выражаются на основе законов сохранения через два глобальных параметра — степень сжатия  $\sigma$  тепловой плазмы в ударной волне и коэффициент преобразования  $\eta$  энергии потока плазмы в энергию релятивистских частиц. На втором этапе (разд. 3) вычисляется функция распределения ускоренных частиц на искаженном ударном фронте, что позволяет при заданном темпе инжекции замкнуть систему уравнений и определить самосогласованным образом как структуру ударного перехода, так и спектр, а также полную энергию ускоренных частиц. В последнем разделе приведены результаты численного решения трансцендентных уравнений и суммированы основные закономерности нелинейной деформации ударного фронта ускоренными частицами.

В дальнейшем мы будем описывать энергичные частицы изотропной функцией распределения  $N(z, p)$ , удовлетворяющей в одномерном стационарном случае уравнению [6]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \kappa(z, p) \frac{\partial N}{\partial z} \right] - u(z) \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \frac{du}{dz} = -Q(p, z) \quad (1)$$

и условию нормировки

$$\int_0^{\infty} N(p, z) p^2 dp = n_c(z),$$

где  $n_c(z)$  — концентрация ускоренных частиц,  $Q(p, z)$  — плотность источника ускоряемых частиц,  $u(z)$  — гидродинамическая скорость среды,  $\kappa(z, p)$  — коэффициент диффузии энергичных частиц, формируемый мелкомасштабными электромагнитными полями плазмы. Следует отметить, что уравнение (1) сохраняет силу и на поверхности  $z = z_0$ , где имеется резкий скачок скорости  $\Delta u$ . В этом случае

$$\frac{du}{dz} = -\Delta u \delta(z - z_0) \quad (2)$$

и из уравнения (1) следуют граничные условия для функции распределения и плотности потока ускоряемых частиц.

Использование уравнения (1) предполагает, что плазма турбулизована и энергичные частицы испытывают достаточно частые рассеяния, обуславливающие диффузионный характер их движения. Это рассеяние энергичных частиц и обеспечивает их связь

с движением фоновой плазмы. Однако с ростом энергии их взаимодействие с плазмой, вообще говоря, ослабевает и при некоторой энергии становится пренебрежимо малым. Такие частицы становятся свободными и уходят из системы, унося с собой энергию и создавая эффект «высвечивания» [7] аналогично высвечиванию возбужденных атомов в сильных газодинамических ударных волнах. Уход частиц можно учесть включением в правую часть (1) наряду с источником также «стока» частиц с соответствующими энергиями.

Турбулентность может формироваться как внешними источниками энерговыделения, так и самими ускоряемыми частицами, которые могут генерировать, например, альфвеновские волны из-за потоковой неустойчивости. В последнем случае турбулентность будет возникать за счет энергии ударной волны и турбулентные пульсации будут играть роль одного из динамических факторов, влияющих на структуру ударного перехода [11]. Однако в случае сильной ударной волны подавляющая часть энергии принадлежит гидродинамическому движению и ускоренным частицам, поэтому динамическая роль турбулентности мала. По указанной причине ниже мы будем считать турбулентность в окрестности ударного перехода заданным внешним фактором. Мы не будем учитывать также динамическую роль крупномасштабного магнитного поля. Это законно в полной мере при распространении ударной волны вдоль магнитного поля (продольная ударная волна). Но и при произвольном направлении поля его влияние на энергетику сильной ударной волны невелико, так как на его долю приходится малая часть полной энергии системы.

Гидродинамической формой уравнения (1) является уравнение баланса энергии ускоряемых частиц [6]

$$\frac{dq_c}{dz} = u \frac{dP_c}{dz} + \int_0^{\infty} Q(p, z) T(p) p^2 dp. \quad (3)$$

Здесь

$$P_c(z) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v N(p, z) p^2 dp \quad (4)$$

— давление энергичных частиц,  $q_c$  — их поток энергии, выражающийся через давление и плотность кинетической энергии

$$w(z) = \int_0^{\infty} T(p) N(p, z) p^2 dp \quad (5)$$

с помощью соотношения

$$q_c(z) = -\bar{\kappa}(z) \frac{dw}{dz} + u(w + P_c), \quad (6)$$

где  $\bar{\kappa}(z)$  представляет собой коэффициент диффузии, усредненный по спектру частиц. Мы используем известное соотношение между давлением и плотностью энергии взаимодействующих частиц

$$P_c = (\gamma_c - 1)w, \quad (7)$$

где  $\gamma_c = 5/3$  и  $4/3$  соответственно в нерелятивистском и релятивистском случаях. Простые выражения для  $\gamma_c$  при промежуточных полурелятивистских энергиях будут приведены ниже.

Использование гидродинамических уравнений (3)–(6) для энергичных частиц означает описание плазмы на этом этапе на основе двухжидкостной модели, в которой две фракции ионов (тепловой газ и ускоренные частицы) существенно отличаются друг от друга средними энергиями и распределением по энергиям, т. е. спектрами, а также длинами свободного пробега  $\Lambda$  ( $\Lambda_c \gg \Lambda_g$ , где индекс  $g$  использован для тепловой компоненты) и характером взаимодействия с разрывом. Энергичные частицы в отличие от тепловых могут многократно пересекать разрыв, набирая в результате значительную энергию.

## 2. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ УДАРНОГО ПЕРЕХОДА НА ОСНОВЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

При низком давлении ускоренных частиц (слабая инжекция) структура фронта бесстолкновительной МГД ударной волны определяется свойствами тепловой компоненты и существенно зависит от ориентации крупномасштабного магнитного поля перед фронтом. В квазипродольных достаточно сильных (сверхкритических) ударных волнах с альфвеновским числом Маха, превышающим несколько единиц, тепловой фронт представляет собой переходную область толщиной в несколько десятков инерционных длин иона  $c/\omega_{pi}$ , заполненную флуктуациями магнитного поля с  $\delta B/B \approx 1$  и частотами ниже гирочастоты иона [12, 13]. Происхождение этих колебаний связано с кинетическими неустойчивостями ионов. В настоящей работе мы не претендуем на описание этой области, которую в дальнейшем будем называть тепловым скачком, хотя ее структура и свойства очень важны для проблемы инжекции ионов и электронов в режим ускорения ударной волной [9, 14].

При увеличении давления ускоренных частиц наряду с тепловым скачком вверх по потоку возникает область плавного торможения плазмы, носящая название предфронта [7, 9]. Она обязана своим происхождением действию ускоренных частиц. Протяженность этой области может сильно (на несколько порядков) превышать толщину теплового скачка и определяется параметром  $L \approx v\Lambda_c/u$ . С ростом давления энергичных частиц величина теплового скачка уменьшается, и гидродинамическая теория допускает его полное исчезновение.

В соответствии с изложенным выше изобразим на рис. 1 в схематической форме изменение макропараметров в пределах ударного перехода. Толщина теплового скачка принята равной нулю, а давление ускоренных частиц на нем непрерывно, так как их пробег относительно рассеяния превышает эту толщину и частицы свободно проникают через фронт. Предполагается, что ударная волна нерелятивистская и энергии инжекции частиц в рассматриваемый механизм ускорения также нерелятивистские. Естественно считать, что инжектируемые частицы черпаются из окружающей плазмы и их источник расположен в области основного ускорения, т. е. на тепловом скачке. В правую часть уравнения (1) мы включим и сток, описывающий уход частиц из системы:

$$Q(p, z) = Q_0 p_0^{-2} \delta(p - p_0) \delta(z) - Q_m(p) f(z). \quad (8)$$

Величины  $p_0$  и  $Q_0$  должны определяться механизмом инжекции. Выбор  $p_0$  и оценка  $Q_0$  приведены в разд. 4. Выбор функции стока  $Q_m(p)$  будет сделан в разд. 3 при вычислении функции распределения ускоренных частиц.

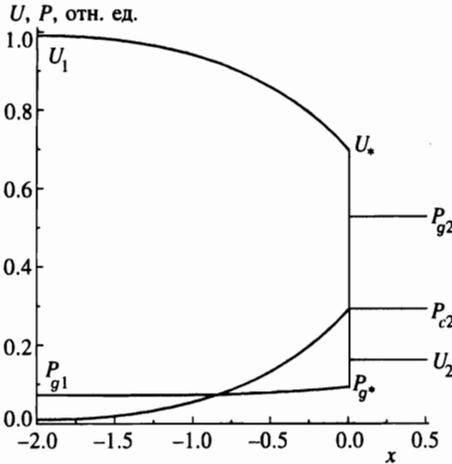


Рис. 1. Схематическое изображение поведения параметров плазмы на ударном переходе

Функция  $f(z)$  описывает пространственное распределение источников убегающих частиц. Мы нормируем эту функцию условием  $\int_{-\infty}^0 f(z) dz = 1$ . Убегающие частицы могут возникать во всей области, где происходит ускорение, т.е. при  $z \leq 0$ . Поскольку максимум  $f(z)$ , как и максимум инжекции, находится в области наиболее сильного ускорения, то мы будем заменять  $f(z)$  на  $\delta(z)$  в тех случаях, когда это не будет приводить к существенной ошибке.

Условия сохранения потоков массы  $j$ , импульса  $P_{zz}$  и энергии  $q$  можно записать в виде

$$j = \rho(z)u(z) = \rho_1 u_1, \quad \rho = \rho_g + \rho_c, \quad (9)$$

$$P_{zz} = ju(z) + P_g(z) + P_c(z) = ju_1 + P_{g1}, \quad (10)$$

$$q = \frac{ju^2(z)}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} u(z) P_g(z) + \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} u(z) P_c(z) - \frac{\bar{\kappa}(z)}{\gamma_c - 1} \frac{dP_c}{dz} + q_m \Theta(z) = \\ = \frac{ju_1^2}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1} u_1 P_{g1}. \quad (11)$$

Здесь использовано известное выражение для потока энергии нерелятивистского одноатомного ( $\gamma_g = 5/3$ ) газа невзаимодействующих частиц и приведенные выше выражения (6), (7) для потока кинетической энергии газа ускоренных частиц. Вязкость и теплопроводность основной плазмы в области плавного изменения параметров не учитываются. Величина

$$q_m = \int_0^{\infty} Q_m(p) K(p) p^2 dp \quad (12)$$

представляет собой поток энергии, уносимый частицами, покидающими систему;

$$\Theta(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^z f(z) dz & \text{при } z \leq 0, \\ 1 & \text{при } z > 0 \end{cases}$$

— функция, описывающая нарастание потока убегающих частиц в области ускорения. В балансе массы и импульса убегающие частицы во всех рассматриваемых случаях дают пренебрежимо малый вклад и в уравнениях (9), (10) не учитываются.

В отсутствие ускоренных частиц изменение скорости происходит только внутри тонкого теплового фронта, и законы сохранения (9)–(11) позволяют выразить величины  $\rho_2$ ,  $u_2$ ,  $P_{g2}$  за фронтом через параметры набегающего потока  $j$ ,  $u_1$ ,  $P_{g1}$ . При наличии ускорения указанные уравнения не позволяют найти неизвестные величины за фронтом  $u_2$ ,  $P_{g2}$ ,  $P_{c2}$  (а также  $\gamma_c$  и  $q_m$ ). Это объясняется тем, что законы сохранения не содержат информации о доле частиц, ответвляющейся в ускоренную компоненту из набегающего потока, и о набираемой ими в процессе ускорения энергии. Эти параметры сами зависят от глобальной структуры ударного перехода, включая и его плавную часть. Поэтому будем решать задачу самосогласованным методом, выбрав в качестве параметров самосогласования величины

$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \eta = \frac{P_{c2}}{ju_1}. \quad (13)$$

Первая представляет собой глобальное сжатие вещества на ударном переходе, а вторая — долю динамического давления на входе системы, преобразующуюся в давление ускоренных частиц. Мы выразим профиль ударного перехода и скорость на тепловом скачке  $u_*$  через эти величины, а затем после вычисления функции распределения ускоренных частиц замкнем систему уравнений, что позволит при заданной мощности инжекции найти все параметры системы.

Применив уравнения (10), (11) к области  $z > 0$  и исключив из них  $P_{g2}$ , а также используя обозначение (13), получим соотношение

$$\eta = \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_g - \gamma_c + k\sigma(\gamma_g - 1)(\gamma_c - 1)} \left[ \frac{(\gamma_g - 1)\sigma}{2} + \frac{\gamma_g + 1}{2\sigma} - \gamma_g + \frac{\sigma - 1}{M^2} \right] \geq 0. \quad (14)$$

Здесь введены безразмерные параметры  $k = q_m/u_1P_{c2}$  для потока энергии убегающих частиц и  $M^2 = ju_1/\gamma_gP_{g1} > 1$  для квадрата числа Маха в набегающем нерелятивистском потоке плазмы.

При  $\gamma_c = \gamma_g$  (ускорение до нерелятивистских энергий) не может быть и убегающих частиц, т. е.  $k = 0$ . Поэтому выражение в квадратных скобках обращается в нуль, что дает известную величину степени сжатия для газодинамических волн:

$$\sigma_{min}^{-1} = \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g + 1} + \frac{2}{M^2(\gamma_g + 1)}. \quad (15)$$

Степень сжатия  $\sigma_{min}$  не превышает значения 4 при любых числах Маха в нерелятивистской плазме с  $\gamma_g = 5/3$ . Но при  $\gamma_c < \gamma_g$  сжатие возрастает.

Ограничение на давление ускоренных частиц можно получить с помощью уравнения (10). Применяя его к области за фронтом  $z > 0$ , будем иметь

$$P_{c2} = j(u_1 - u_2) + P_{g1} - P_{g2}. \quad (16)$$

Отношение  $P_{g2}/P_{g1}$  не может быть меньше того значения, которое соответствует при заданном сжатии  $\sigma$  изменению давления согласно адиабате Пуассона  $P_g \sim \rho_g^{\gamma_g}$ , т. е.  $P_{g2}/P_{g1} \geq \sigma^{\gamma_g}$ . Знак равенства отвечает отсутствию теплового скачка, когда энтропия тепловой компоненты (в расчете на одну частицу) не изменяется, а рост полной

энтропии на ударном переходе происходит исключительно за счет ускорения частиц. Следует, однако, заметить, что последняя возможность может реализоваться лишь в том случае, если в области предфронта отсутствуют источники дополнительного нагрева плазмы. Роль такого источника может, в частности, играть уже упоминавшаяся турбулентность, генерированная ускоренными частицами и диссипируемая в тепловой плазме. Мы здесь не учитываем процессов такого рода. Из уравнения (16) получаем неравенства

$$0 \leq \eta \leq \eta_m = 1 - \sigma^{-1} + \frac{1 - \sigma^{\gamma_g}}{\gamma_g M^2}, \quad (17)$$

которые в совокупности с (14) ограничивают возможные значения параметров задачи. Равенство в правой части (17) определяет безразмерное давление  $\eta_m$  ускоренных частиц на размытом фронте.

Уравнение (14) и неравенства (17) можно использовать для нахождения пределов изменения сжатия в ударной волне и потока энергии убегающих частиц при заданном числе Маха. С помощью левого неравенства (17), учитывая, что при  $\eta = 0$  также неизбежно и  $k = 0$ , находим нижний предел сжатия  $\sigma \geq \sigma_{min}$ , где  $\sigma_{min}$  дается равенством (15). Правое неравенство (17) ограничивает сжатие сверху. Как уже отмечалось, знак равенства отвечает случаю, когда вся избыточная энергия падающего потока передается ускоренным частицам. При этом тепловой скачок отсутствует, а энергия ускоренных частиц имеет наибольшее при заданном  $M$  значение. Для указанного предельного случая, обозначая соответствующее сжатие через  $\sigma_m$ , получаем

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sigma_m^2} \right) + \frac{1 - \sigma_m^{\gamma_g}}{(\gamma_g - 1)M^2} = \left[ k + \frac{\gamma_c}{\sigma_m(\gamma_c - 1)} \right] \left[ 1 - \frac{1}{\sigma_m} + \frac{1 - \sigma_m^{\gamma_g}}{\gamma_g M^2} \right]. \quad (18)$$

Это уравнение можно рассматривать как обобщение адиабаты Гюгонио на случай ударной волны с ускоренными частицами и размытым фронтом без теплового скачка. Оно связывает четыре величины — число Маха, поток энергии убегающих частиц, сжатие и показатель адиабаты ускоренных частиц. Из них число Маха должно быть задано как внешний параметр задачи. Поток энергии  $k$  существенно (но не полностью — см. ниже) определяется мощностью инъекции, которая также задается независимо. Величины  $\gamma_c$  и  $k$  вычисляются самосогласованным образом на кинетическом этапе решения задачи (см. (38), (65)). Последний параметр — максимальное сжатие  $\sigma_m$  — выражается с помощью (18) через три других. В зависимости от их соотношения его значение может варьироваться в широких пределах.

Рассмотрим наиболее важный случай сильных ударных волн,  $M \gg 1$ . Непротиворечивые следствия из (18) получаются, если  $\sigma^{\gamma_g}/M^2 \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ . Легко определяется сжатие:

$$\sigma_m = \frac{\gamma_c + 1}{(\gamma_c - 1)(1 - 2k)}. \quad (19)$$

Если среди ускоренных частиц преобладают нерелятивистские и эффект убегания мал, то  $\gamma_c \approx \gamma_g$  и  $k \rightarrow 0$ . Имеем  $\sigma_m \approx 4$ , что совпадает с (15) при  $M \rightarrow \infty$ . Заметим, что предположение о преимущественном ускорении до нерелятивистских энергий не противоречит возможности реализации размытого фронта. Ускоренные нерелятивистские частицы по сравнению с тепловыми неизбежно должны иметь большой транспортный

пробег, который и определяет ширину фронта, если давление ускоренных частиц превышает давление тепловой плазмы.

В другом предельном случае в спектре преобладают релятивистские частицы. При этом  $\gamma_c \rightarrow 4/3$ , а эффект убегаания достигает максимально возможной величины. Такой экстремальной ситуации соответствует значение  $k \rightarrow 1/2$ , которое приводит к  $\sigma_m \rightarrow \infty$  и  $\eta_m \rightarrow 1$ . В этом нереализуемом в природе предельном случае газ за фронтом был бы неподвижен и бесконечно сжат, а вся энергия падающего потока плазмы перешла бы к убегающим частицам:

$$q_m = ku_1 P_{c2} = k\eta_m j u_1^2 = j u_1^2 / 2.$$

Таким образом, в зависимости от мощности инъекции и эффективности ускорения, а также условий убегаания частиц для ударной волны с размытым фронтом возможны значения

$$0 \leq k \leq 1/2, \quad 4 < \sigma_m < \infty. \quad (20)$$

В таких же пределах меняются эти параметры и у волн с конечным тепловым скачком.

Заметим, что в работе [8] авторы приводят зависимость  $\sigma \propto M^{3/4}$  для сильных ударных волн с ускоренными частицами. Из предыдущего рассмотрения ясно, что зависимость такого рода не может иметь универсального характера и в лучшем случае может соответствовать лишь некоторому конкретному подбору мощности инъекции и других параметров системы. В нашем случае такое значение сжатия соответствует максимальному давлению ускоренных частиц при заданном конечном числе Маха.

С учетом полученных результатов имеем при  $M \rightarrow \infty$  следующие теоретические пределы изменения сжатия, охватывающие как ударные волны с конечным тепловым скачком, так и с размытым фронтом:

$$\frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g - 1} \leq \sigma \leq \sigma_m = \frac{\gamma_c + 1}{(\gamma_c - 1)(1 - 2k)}. \quad (21)$$

При конечных значениях  $M$  интервал (21) сужается. Его можно найти численно.

Найдем теперь скачок скорости плазмы на тепловом фронте. Применим закон сохранения потока импульса к тепловому скачку. Учитывая, что ускоренные частицы свободно проходят через тепловой фронт и, следовательно, их давление одинаково по обе его стороны, находим  $P_{g2} = P_{g*} + j(u_* - u_2)$ . В области  $z < 0$  скорость плазмы изменяется плавно, и давление тепловой компоненты следует адиабате Пуассона:  $P_{g*} = P_{g1} y_*^{-\gamma_g}$ , где  $y_* = u_*/u_1$ . На основе этих соотношений, подставляя их в (16) и пользуясь (14), находим

$$y_* + \frac{1}{\gamma_g M^2 y_*^{\gamma_g}} = 1 + \frac{1}{\gamma_g M^2} - \eta. \quad (22)$$

Полученное уравнение позволяет выразить сжатие плазмы на тепловом фронте через число Маха и другие параметры, введенные раньше. Напомним, что все уравнения, начиная с (14), имеют смысл только для релятивистских ускоренных частиц, т. е. при  $\gamma_c < \gamma_g$ . В случае же  $\gamma_c = \gamma_g$  глобальное сжатие дается соотношением (15) и в правой части (22) возникает неопределенность. Она вызвана тем, что в зависимости от соотношения между тепловой и ускоренной компонентами сжатие на тепловом скачке может принимать различные значения,  $1 \leq \sigma_* \leq 4$ .

При решении уравнения (22) следует брать корень, удовлетворяющий условию  $y_* \geq \sigma^{-1}$ . Для предельно сильной ударной волны,  $M \rightarrow \infty$ , интервалу значений (21) глобального сжатия отвечает интервал  $1 \leq \sigma_* \leq \sigma_m$ . На правом конце интервала  $\sigma_*$  совпадает с  $\sigma$ , и, следовательно, тепловой скачок в этом (единственном) случае отсутствует. При  $\sigma < \sigma_m$  всегда  $\sigma_* < \sigma$ , т.е. тепловой скачок отличен от нуля, хотя он может быть весьма малым при больших  $M$ .

Уравнение, описывающее профиль скорости  $u(z)$  на плавном участке  $-\infty < z \leq 0$ , можно получить с помощью законов сохранения (10), (11). Выполним это сначала для случая, когда количество убегающих частиц пренебрежимо мало, т.е.  $k \approx 0$ . Пользуясь (10), исключаем из (11)  $P_c(z)$ , а  $P_g(z)$  выражаем через скорость согласно адиабате Пуассона:

$$P_g(z) = P_{g1} \left( \frac{u_1}{u(z)} \right)^{\gamma_g}. \quad (23)$$

В результате находим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $u(z)$ . В безразмерных переменных  $x(z)$  и  $y(x) = u(x)/u_1$ , где  $dx = u_1 dz / 2\bar{\kappa}(z)$ ,  $x(0) = 0$ , оно принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(\gamma_c + 1)(1 - y)}{1 - M^{-2}y^{-\gamma_g - 1}} \left[ y - \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c + 1} - \frac{2\gamma_c}{\gamma_g(\gamma_c + 1)M^2} - \frac{2(\gamma_g - \gamma_c)(y^{1-\gamma_g} - 1)}{\gamma_g(\gamma_g - 1)(\gamma_c + 1)(1 - y)M^2} \right]. \quad (24)$$

Уравнение следует интегрировать с граничным условием  $y(0) = y_*$ . Последняя величина (а также показатель адиабаты  $\gamma_c$  ускоренных частиц) может принимать при заданном  $M$  различные значения, как следует из (14), (21), (22). Заметим, что скачок скорости в нашем рассмотрении выделен и локализован, поэтому уравнение (24) в рассматриваемой области изменения переменных в отличие от [15, 7] не имеет особых точек.

В пренебрежении членами порядка  $M^{-2}$  уравнение упрощается и допускает аналитическое решение. Введя обозначение  $y_0 = y_m|_{k=0} = (\gamma_c - 1)/(\gamma_c + 1)$ , запишем его в виде

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2}{1 - y_0} (1 - y)(y - y_0). \quad (25)$$

Теперь учтем убегающие частицы. Их появление возможно только при ускорении сильными ударными волнами, поэтому ниже мы будем пренебрегать членами порядка  $M^{-2}$ . Снова воспользуемся законами сохранения (9)–(11). Поскольку точный вид функции  $\Theta(z)$  в области  $z < 0$  неизвестен заранее, прибегнем к интерполяции. При  $z \rightarrow -\infty$  функция  $\Theta(z) \rightarrow 0$ , а при  $z \rightarrow 0$  имеем  $\Theta(z) \rightarrow 1$ . В указанных двух предельных случаях, как следует из (10), (11), производная  $dy/dz$  принимает значения соответственно

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{2u_1}{2\bar{\kappa}(z)}(1 - y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dz} = - \frac{(\gamma_c + 1)u_1}{2\bar{\kappa}(z)}(1 - y_*)(y - y_m).$$

Естественно использовать во всей области изменения переменной  $0 \geq z > -\infty$  интерполяционное уравнение типа (25)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2}{1 - y_m} (1 - y)(y - y_m), \quad (26)$$

в котором постоянная  $y_0$  заменена на  $y_m$ , учитывающую убегающие частицы, и введена новая независимая переменная

$$dx = \frac{(1 - y_m)u_1}{2\bar{\kappa}(z)} \left\{ 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} \exp \left[ - \int_z^0 \frac{u_1 dz'}{2\bar{\kappa}(z')} \right] \right\} dz, \quad x(0) = 0. \quad (27)$$

Уравнения (25), (26) имеют решение, удовлетворяющее граничному условию  $y(0) = y_*$ . Решение при  $y_* > y_m$  можно записать в различных формах:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}(1 + y_m) - \frac{1}{2}(1 - y_m) \operatorname{th} \left[ x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - y_*}{y_* - y_m} \right] = \\ &= \frac{y_*(\sigma_m - 1) + [2 - y_*(1 + \sigma_m)] \operatorname{th} x}{\sigma_m - 1 + (\sigma_m + 1 - 2\sigma_m y_*) \operatorname{th} x}, \quad x \leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В области за ударным переходом скорость плазмы, как и в обычной ударной волне, постоянна:  $y(x) = u_2/u_1$  при  $x > 0$ . Решение (28) обобщает результат Аксфорда и др. [15] на случай ударной волны с тепловым скачком.

При  $y_* = y_m$  тепловой скачок отсутствует и ударный переход полностью размывается. Решение (28) теряет силу для этого случая, так как область, в которой происходит изменение скорости (размытый фронт), отодвигается на  $-\infty$ . Уравнение (26) нужно решать заново, изменив граничные условия:  $y|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ ,  $y|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow y_m$ , которые приводят к решению

$$y(x) = \frac{1}{2}(1 + y_m) - \frac{1}{2}(1 - y_m) \operatorname{th} x, \quad (29)$$

обычному для плавного перехода между двумя стационарными состояниями [15, 16]. Для ударных волн умеренной силы с конечным значением  $M$  нетрудно получить численные решения уравнения (24).

### 3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ СПЕКТРА И ДАВЛЕНИЯ УСКОРЕННЫХ ЧАСТИЦ

В развитой выше макроскопической теории пока остаются неизвестными параметры  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $k$  и  $\gamma_c$ . Их вычисление следует проводить с помощью кинетического уравнения (1). Оно позволяет найти форму спектра ускоренных частиц, определяющую показатель адиабаты Пуассона  $\gamma_c$ , а также — при заданной мощности инжекции  $Q_0$  — полную энергию и поток энергии ускоренных частиц, которые будут определяться глобальной структурой ударного перехода.

При разумном предположении о коэффициенте диффузии (см. ниже) уравнение (1) дает решения, зависящие от  $p$  по степенному закону. Поэтому полезно заранее найти связь показателя адиабаты  $\gamma_c$  и показателя спектра  $\alpha$  функции распределения:

$$N(p) = (\alpha - 3)n_c p_0^{-3} (p_0/p)^\alpha, \quad \alpha > 3, \quad p \geq p_0, \quad (30)$$

где  $n_c$  — концентрация ускоренных частиц,  $p_0 \ll mc$  — импульс инжекции. Вычисляя давление  $P_c$  и плотность энергии  $w$  согласно (4), (5) и определяя показатель адиабаты согласно (7), находим

$$\alpha > 5, P_c \approx \frac{2(\alpha - 3)}{3(\alpha - 5)} \frac{p_0^2}{2m} n_c, \quad \gamma_c = \frac{5}{3}; \quad (31)$$

$$\alpha \leq 5, \quad P_c = C(\alpha) c p_0 n_c, \quad (32)$$

где

$$C(\alpha) \approx \begin{cases} (2p_0/3mc) \ln(2mc/p_0), & \alpha = 5 \\ ((\alpha - 3)/6\sqrt{\pi}) \Gamma(\alpha/2 - 2) \Gamma(5/2 - \alpha/2) (p_0/mc)^{\alpha-4}, & 5 > \alpha > 4 \end{cases}, \quad (33)$$

$$C(\alpha) \approx \begin{cases} (1/3) \ln(2p_m/mc), & \alpha = 4, \\ ((\alpha - 3)/3(4 - \alpha))(p_0/p_m)^{\alpha-4}, & 4 > \alpha > 3 \end{cases}. \quad (34)$$

Находим также

$$\gamma_c = \begin{cases} 5/3 - g(5) \text{ при } \alpha = 5, & 4/3 + g(\alpha) \text{ при } \alpha < 4 \\ \alpha/3 + g(\alpha) \text{ при } 5 > \alpha \geq 4 \end{cases}, \quad (35)$$

где

$$g(\alpha) \approx \begin{cases} ((\alpha - 3)^2/9C(\alpha))[(p_0/p_m)^{\alpha-4} - p_0/2mc], & 5 \geq \alpha \geq 4 \\ ((4 - \alpha)/3\sqrt{\pi}(\alpha - 3))(mc/p_m)^{4-\alpha} \Gamma(\alpha/2 - 1) \Gamma(5/2 - \alpha/2), & 4 > \alpha > 3 \end{cases}. \quad (36)$$

Здесь через  $p_m$  ( $p_m \gg mc$ ) обозначен импульс обрезания, ограничивающий сверху энергию ускоренных частиц. В реальных условиях это ограничение возникает из-за конечной протяженности фронта ударной волны, конечного времени ее существования и роста коэффициента диффузии с энергией частиц, что приводит к уходу частиц высоких энергий от фронта и прекращению ускорения. Чтобы уравнение (1) автоматически давало решения с ограниченной энергией, примем следующую ступенчатую зависимость коэффициента диффузии от энергии:

$$\kappa(z, p) = \begin{cases} \kappa(z), & p < p_m; \\ \infty, & p > p_m. \end{cases} \quad (37)$$

Такая зависимость соответствует предположению, что частица по достижении импульса  $p_m$  становится свободной и покидает систему, т. е. функция распределения удовлетворяет условию

$$N(z, p) = 0 \text{ при } p > p_m \quad (38)$$

и при любых  $z$ .

Коэффициенту диффузии (37) соответствует функция стока

$$Q_m(p) = Q_m p_m^{-2} \delta(p - p_m) \quad (39)$$

в формуле (8), которую мы локализуем при  $z = 0$ , т. е. положим  $f(z) = \delta(z)$ . Интенсивность стока  $Q_m$  следует выбрать таким образом, чтобы было выполнено условие (38). Предельный импульс  $p_m$  мы будем рассматривать как внешний параметр задачи, определяемый из дополнительных соображений (реальная протяженность фронта, интенсивность турбулентности и магнитного поля).

Решение уравнения (1) с коэффициентом диффузии (37) удастся получить в аналитической форме, если профиль скорости  $u(z)$  дается решениями (28), (29). Приняв правую часть (1) в форме (8), (39) и проведя преобразование Меллина по переменной  $p$ ,

$$\bar{N}(s, z) = \int_0^{\infty} N(p, z) p^{s-1} dp, \quad (40)$$

получим

$$\frac{d}{dz} \kappa(z) \frac{d\bar{N}}{dz} - u(z) \frac{d\bar{N}}{dz} - \frac{sdu}{3dz} \bar{N} = \left( Q_m p_m^{s-3} - Q_0 p_0^{s-3} - \frac{s}{3} (u_* - u_2) \bar{N} \right) \delta(z), \quad (41)$$

где из производной  $du/dz$  выделена сингулярная часть на тепловом скачке.

Далее переходим к независимой переменной  $\zeta = (y - y_m)/(1 - y_m)$ , используя упрощенную (по сравнению с (27)) связь между  $dx$  и  $dz$  вида  $dx/dz = (\gamma_c + 1)(1 - y_m)u_1/4\kappa(z)$ , которая дает правильный результат в области наибольшего ускорения вблизи теплового скачка и несколько завывает производную  $dx/dz$  при  $z \gg 2\kappa/u_1$ , где ускорение весьма мало. Это приводит к гипергеометрическому уравнению в стандартной записи [17]:

$$\zeta(1 - \zeta) \frac{d^2 \bar{N}}{d\zeta^2} + [c - (a + b + 1)\zeta] \frac{d\bar{N}}{d\zeta} - ab\bar{N} = 0. \quad (42)$$

Здесь

$$a + b + 1 = \frac{2\gamma_c}{\gamma_c + 1}, \quad ab = -\frac{2s}{3(\gamma_c + 1)}, \quad c = 1 + \frac{2y_m}{(\gamma_c + 1)(1 - y_m)}. \quad (43)$$

Функция  $\bar{N}(s, \zeta)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\bar{N}|_{\zeta=1} = 0, \quad (44)$$

$$\left( \frac{d\bar{N}}{d\zeta} + \frac{2s(y_* - \sigma^{-1})(1 - y_m)}{3(\gamma_c + 1)(1 - y_*)(y_* - y_m)} \bar{N} \right)_{\zeta=\zeta_*} = \frac{2(1 - y_m)(Q_m p_m^{s-3} - Q_0 p_0^{s-3})}{(\gamma_c + 1)(y_* - y_m)(1 - y_*)u_1}. \quad (45)$$

Второе условие включает в себя и правую часть уравнения (41) (равенство потоков по обе стороны теплового скачка). Несмотря на то, что величины  $a$  и  $b$  содержат радикал, симметрия коэффициентов уравнения (42) приводит к отсутствию иррациональности по переменной  $s$  в его решении. Решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (44), (45), выражается через гипергеометрические функции [16]

$$\bar{N}(s, \zeta) = \frac{4(Q_0 p_0^{s-3} - Q_m p_m^{s-3})}{u_1(\gamma_c + 1)^2 (y_* - y_m)(1 - y_*)\Phi(s)} (1 - \zeta)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1 - \zeta), \quad (46)$$

где  $1 \geq \zeta \geq \zeta_* > 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(s) = & (1 - \zeta_*)^{c-a-b+1} \left[ c-a-b - \frac{2s(y_* - \sigma^{-1})}{3(\gamma_c + 1)(y_* - y_m)} \right] F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1 - \zeta_*) + \\ & + (1 - \zeta_*)^{c-a-b} \frac{(c-a)(c-b)}{c-a-b+1} F(c-a+1, c-b+1; c-a-b+2; 1 - \zeta_*). \end{aligned} \quad (47)$$

Решение (46) относится к области предфронта,  $x \leq 0$ . За тепловым фронтом,  $x > 0$ , функция распределения не зависит от координаты и в силу непрерывности на границе

$x = 0$  ( $\zeta = \zeta_*$ ) ее значение  $\bar{N}_2(s)$  определяется выражением (46), взятым при  $\zeta = \zeta_*$ :  $\bar{N}_2(s) = \bar{N}(s, \zeta_*)$ .

При  $\zeta_* \rightarrow 0$  ( $y_* \rightarrow y_m$ ) гипергеометрические ряды расходятся и решение (46), (47) теряет силу. В этом случае, который соответствует отсутствию теплового скачка, теряет силу также решение (28), как уже было отмечено выше. Оно должно быть заменено решением (29). Для определения спектра ускоренных частиц в рассматриваемом предельном случае нужно решать уравнение (42) заново для области  $1 \geq \zeta \geq 0$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} \bar{N}|_{\zeta=1} = 0, \quad \bar{N}|_{\zeta=0} \text{ — ограничено,} \\ \bar{N}|_{\zeta=1/2+0} = \bar{N}|_{\zeta=1/2-0}, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1/2+0} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1/2-0} = \frac{4(Q_m p_m^{s-3} - Q_0 p_0^{s-3})}{u_1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Граничные условия соответствуют инжекции и уходу частиц с предельными энергиями при  $\zeta = 1/2$  ( $x = 0$ ), т. е. в точке наибольшей крутизны профиля ударного перехода.

Решение уравнения (42) с граничными условиями (48) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{N}(s, \zeta) = \frac{2^{c-a-b+2}(Q_0 p_0^{s-3} - Q_m p_m^{s-3})F(a, b; c; 1/2)}{u_1 \Phi(s) F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1/2)} \times \\ \times (1-\zeta)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-\zeta) \end{aligned} \quad (49)$$

при  $1 \geq \zeta \geq 1/2$ ;

$$\bar{N}(s, \zeta) = \frac{4(Q_0 p_0^{s-3} - Q_m p_m^{s-3})}{u_1 \Phi(s)} F(a, b; c; \zeta) \quad \text{при } 1/2 \geq \zeta \geq 0, \quad (50)$$

где теперь

$$\begin{aligned} \Phi(s) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; 1/2) + (c-a-b)F(a, b; c; 1/2) \times \\ \times \left[ 2 + \frac{(c-a)(c-b)F(c-a+1, c-b+1; c-a-b+2; 1/2)}{(c-a-b)(c-a-b+1)F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1/2)} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Спектр ускоренных частиц вычисляется путем обратного преобразования Меллина

$$N(p, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{N}(s, \zeta) p^{-s} ds. \quad (52)$$

При  $p > p_m \gg p_0$  контур интегрирования можно замкнуть дугой бесконечного радиуса в правой полуплоскости, и значение интеграла будет определяться вычетами подынтегрального выражения относительно полюсов  $\alpha$ , положение которых дается уравнением

$$\Phi(\alpha) = 0, \quad (53)$$

причем значения  $\alpha$  являются показателями отдельных степенных слагаемых. В рассматриваемой задаче (см. ниже) уравнение (53) имеет всего один действительный корень.

Вернемся теперь к определению интенсивности  $Q_m$  потока убегающих частиц. Поскольку решения (46) и (49), (50) пропорциональны разности  $Q_0 p_0^{s-3} - Q_m p_m^{s-3}$ , то соответствующие функции распределения  $N(p, \zeta)$  при  $p > p_m$  и при наличии всего одного

корня  $\alpha$  будут пропорциональны разности  $Q_0(p_0/p)^{\alpha-3} - Q_m(p_m/p)^{\alpha-3}$ , и условие (38) позволяет связать поток убегающих частиц с мощностью инжекции:

$$Q_m = Q_0(p_0/p_m)^{\alpha-3}. \quad (54)$$

Еще одно полезное соотношение можно получить из баланса числа ускоряемых частиц. В стационарных условиях инжектируемые в режим ускорения частицы образуют поток ускоренных частиц  $n_{c2}u_2$ , сносимых турбулентной плазмой за ударный переход, и поток убегающих частиц  $Q_m$ . Используя (54) и (13), находим

$$Q_0 = \frac{n_{c2}u_1}{\sigma [1 - (p_0/p_m)^{\alpha-3}]}. \quad (55)$$

Для безразмерного потока энергии убегающих частиц  $k = q_m/u_1 P_{c2}$  с помощью уравнений (54), (39) и (12) будем иметь

$$k = \frac{cp_0 Q_0}{u_1 P_{c2}} \left( \frac{p_0}{p_m} \right)^{\alpha-4}. \quad (56)$$

Комбинируя (55), (56) и (14), получаем связь безразмерного параметра инжекции  $Q = Q_0/n_{g1}u_1$  и потока энергии  $k$  с показателем спектра и глобальным сжатием:

$$Q = \frac{u_1^2(\gamma_c - 1)(1 + 4/\sigma^2 - 5/\sigma)}{cv_0 \{ (5 - 3\gamma_c)C(\alpha) [1 - (p_0/p_m)^{\alpha-3}] + 2(\gamma_c - 1)(p_0/p_m)^{\alpha-4} \}}, \quad (57)$$

$$k = \frac{(p_0/p_m)^{\alpha-4}}{\sigma C(\alpha) [1 - (p_0/p_m)^{\alpha-3}]}. \quad (58)$$

Здесь  $\gamma_c$  и  $C(\alpha)$  зависят от показателя спектра согласно (33)–(36),  $v_0$  — скорость инжектируемых частиц. Соотношения (55)–(58) имеют силу при любой конечной величине теплового скачка. Если же он отсутствует и ударный переход размыт, то сжатие  $\sigma = \sigma_m$  дается равенством (21) и уравнения (57), (58) упрощаются:

$$Q = \frac{u_1^2}{cv_0} \left( \frac{p_m}{p_0} \right)^{\alpha-4} \left( 1 - \frac{1}{\sigma_m} \right) k_m, \quad (59)$$

$$k_m = \left\{ 2 + (\gamma_c + 1)C(\alpha) \left( \frac{p_m}{p_0} \right)^{\alpha-4} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_m} \right)^{\alpha-3} \right] (\gamma_c - 1)^{-1} \right\}^{-1}. \quad (60)$$

Оценка параметра  $k$  с помощью (58), (60) и (33)–(36) показывает, что для спектров с  $\alpha \geq 4$  и  $p_m \gg mc$  эффект убегания мал. Он может быть существенным только для пологих спектров,  $\alpha < 4$ .

Вычислим теперь показатель спектра и другие параметры ударного перехода. Начнем с наиболее простой ситуации, когда тепловой скачок отсутствует и профиль скорости дается равенством (29), а функция распределения описывается формулами (49)–(52). При  $p_m > p > p_0$  слагаемое с  $Q_m$  интегрируется по контуру, который замыкается в левой полуплоскости, в которой полюсы отсутствуют. Последнее объясняется тем, что на ударном переходе действует механизм ускорения Ферми первого порядка, при котором инжектированные частицы могут только увеличивать свою энергию. Слагаемое с  $Q_0$

интегрируется по правому полукругу и дает степенной вклад с прежним показателем  $\alpha$ , определяемым из (53).

В рассматриваемом случае показатель  $\alpha$  и безразмерное давление  $\eta_m$  ускоренных частиц (17) зависят только от  $\sigma_m$ . Поэтому удобно задавать сжатие  $\sigma_m$  как независимый параметр и выразить через него остальные величины, в том числе согласно (59) и необходимую для поддержания заданного сжатия мощность инжекции. При этом упрощается и функция распределения:

$$N_2(p) = (\alpha - 3) \left(1 - \frac{1}{\sigma_m}\right) \frac{u_1^2 n_{g1}}{c v_0 p_0^3} \left(\frac{p_0}{p}\right)^\alpha, \quad p \leq p_m. \quad (61)$$

Значения показателя  $\alpha$  вычисляются путем численного нахождения корней функции (51) при различных значениях глобального сжатия  $\sigma_m$ . Мощность инжекции определяется по формулам (59), (60).

В ситуации, когда тепловой скачок имеет конечную величину, нужно определять показатель спектра из условия обращения в нуль функции (47). В качестве независимой переменной можно использовать либо снова глобальное сжатие  $\sigma$ , выразив через него параметры  $k$  и  $Q$  согласно (57), (58), либо инжекцию  $Q$ . В последнем случае нужно выразить сжатие через инжекцию. Кроме того, в обоих случаях следует зафиксировать внешние параметры задачи: скорость  $u_1$  и концентрацию  $n_{g1}$  набегающего потока плазмы, а также импульс инжекции  $p_0$  и предельный импульс  $p_m$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Результаты численных расчетов приведены в таблице. Они получены в предположении  $v_0 = u_1 = 10^{-2}c$  и  $p_m/mc = 10^6$ , что по порядку величины соответствует «оптимистическому» варианту ускорения частиц на сильной ударной волне от вспышки сверхновой ( $M \gg 1$ ). Строки 2, 3 и 7, 8 относятся к ударному переходу с тепловым скачком, строки 4, 5 и 9, 10 — к размытому фронту. При  $\sigma \rightarrow \infty$  приведенные выше уравнения позволяют получить  $\alpha \rightarrow 3$  и  $Q \rightarrow T_1/T_m \approx 5 \cdot 10^{-11}$ , где  $T$  — кинетическая энергия. Отметим характерные особенности полученных результатов:

1. В области глобальных сжатий  $\sigma \geq 4$  существуют две ветви решений, отвечающие случаям волны с тепловым скачком и с полностью размытым фронтом. Обе ветви сходятся при  $\sigma \rightarrow \infty$ , когда тепловой скачок исчезает.

2. При одинаковых сжатиях среды режим с тепловым скачком создает более жесткий спектр ускоренных частиц (меньшее  $\alpha$ ) и требует более низких мощностей инжекции, чем режим с размытым фронтом. Это объясняется тем, что профиль течения с большим градиентом скорости (тепловой скачок) более эффективен для ускорения (рис. 2).

3. Все режимы ускорения, приведенные в таблице, требуют малых относительных мощностей инжекции,  $Q \leq 5 \cdot 10^{-2}$ .

4. Ветвь с тепловым скачком существует только в ограниченном интервале мощностей инжекции,  $0 \leq Q \leq Q_{max} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ ; ей отвечают показатели спектра ускоренных частиц  $4 \geq \alpha \geq 3$  (рис. 3).

5. Ветвь с размытым фронтом существует при мощностях инжекции  $1 > Q \geq Q_{min} = T_1/T_m \approx 5 \cdot 10^{-11}$ ; при этом показатель спектра меняется в пределах от  $\alpha \approx 5$  до  $\alpha = 3$  (рис. 3).

**Показатели спектра ускоренных частиц и требуемые мощности инжекции при разных значениях глобального сжатия**

1	$\sigma$	4.05	4.25	4.5	5.0	6.0	7.0
2	$\alpha$	3.99	3.95	3.91	3.85	3.73	3.63
3	$Q$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$2.45 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$
4	$\alpha$	4.97	4.85	4.71	4.50	4.20	4.00
5	$Q$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
6	$\sigma$	10	15	21	50	100	300
7	$\alpha$	3.45	3.29	3.20	3.078	3.033	3.010
8	$Q$	$7.4 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$8.7 \cdot 10^{-11}$	$5.9 \cdot 10^{-11}$
9	$\alpha$	3.67	3.45	3.33	3.16	3.11	3.07
10	$Q$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$8.2 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$

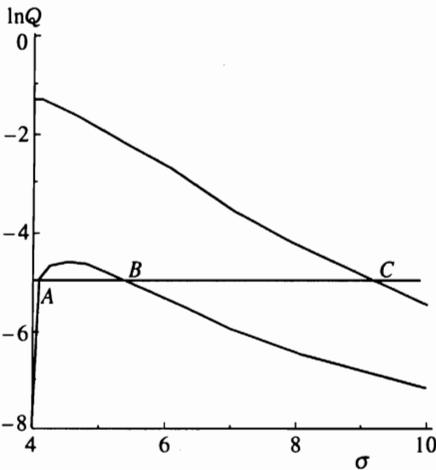


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость между сжатием плазмы  $\sigma$  и скоростью инжекции частиц в режим ускорения  $Q$  при  $p_0/mc = 10^{-2}$  и  $p_m/mc = 10^6$ . Верхняя кривая описывает ударную волну с размытым фронтом, нижняя кривая — состояние с тепловым скачком

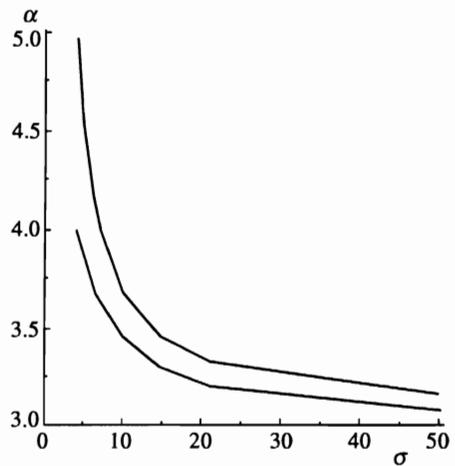


Рис. 3

Рис. 3. Показатель спектра ускоренных частиц  $\alpha$  как функция глобального сжатия  $\sigma$ . Верхняя кривая — в отсутствие теплового скачка, нижняя кривая — при наличии теплового скачка

6. Увеличение сжатия сопровождается уменьшением показателя спектра и уменьшением инжекции (последнее — за исключением начального участка ветви с тепловым скачком). Уменьшение инжекции объясняется тем, что при уменьшении показателя  $\alpha$  доля частиц с максимальными энергиями возрастает и заданное сжатие обеспечивается все меньшим числом сверхрелятивистских частиц. Предельному сжатию  $\sigma \rightarrow \infty$  при выбранных параметрах соответствует ничтожная инжекция  $Q_{min} \approx 5 \cdot 10^{-11}$ . С ростом инжекции, наоборот, доля релятивистских частиц в спектре убывает, поскольку исходная энергия потока плазмы распределяется на все большее число частиц. Естественным

следствием этого является увеличение показателя спектра и уменьшение сжатия.

7. Доля энергии  $\eta$ , переходящая к ускоренным частицам, на ветви с размытым фронтом весьма велика и изменяется от 0.75 при  $\sigma \rightarrow 4$  до 1 при  $\sigma \rightarrow \infty$ . На ветви с тепловым скачком она изменяется при тех же сжатиях от 0 до 1.

Приведенные результаты показывают (рис. 2), что решение рассматриваемой нелинейной задачи в стационарной постановке имеет несколько ветвей. В частности, возможны три значения сжатия среды и три значения показателя спектра ускоренных частиц, если мощность инжекции лежит в интервале  $Q_{min} < Q < Q_{max}$ . Поэтому важен вопрос об устойчивости этих состояний и об их реализуемости.

Для исследования устойчивости традиционными методами необходимо выйти за пределы стационарной постановки задачи, что связано со значительными трудностями. Но можно привести аргументы общего характера в пользу реализации при заданном темпе инжекции состояния с наименьшим сжатием.

Ударный переход можно рассматривать как некоторый этап приближения к равновесному состоянию сильно неравновесной исходной системы (поток холодной нерелятивистской плазмы с большим запасом энергии направленного движения). Релаксация сопровождается ростом энтропии. Согласно принципу Больцмана, наиболее вероятным является состояние с наибольшей энтропией (которое реализуется наибольшим числом микросостояний). Поэтому в природе следует ожидать реализации такого состояния (совместимого с законами сохранения и динамическими законами, т. е. уравнениями движения), которому соответствует наибольшая энтропия в расчете на одну частицу. Такими свойствами из трех допускаемых решением состояний  $A$ ,  $B$  и  $C$  обладает состояние  $A$ , так как ему соответствует наибольшая средняя энергия основной массы частиц за ударным переходом. В состоянии  $B$  ввиду уменьшения теплового скачка по сравнению с  $A$  нагрев основной плазмы и ее энтропия оказываются меньше, а большая энергизация малой доли ускоряемых частиц, сопровождаемая ростом их энтропии, не восполняет ее убыли у наиболее многочисленной компоненты. В еще более сильной степени эта тенденция проявляется в состоянии  $C$ , в котором энтропия основной плазмы остается постоянной. Нетрудно оценить этот эффект количественно: разность энтропий, приходящихся на одну частицу, для состояний  $A$  и  $C$  дается выражением

$$s_A - s_C = \ln(M^3/32) + \theta(\sigma Q/4).$$

Исходя из приведенных соображений можно предположить следующую последовательность состояний плазмы на ударном переходе с большим числом Маха при медленном (квазистатическом) росте уровня инжекции. При  $Q = 0$  нет ускоренных частиц, имеем тепловой скачок с  $\sigma_* = \sigma = 4$ . С ростом инжекции от 0 до  $Q_{min} = T_1/T_m$  может существовать лишь одно состояние с тепловым скачком плотности близким к четырем. За счет появления релятивистских частиц сжатие немного возрастает, а показатель спектра убывает от исходного значения  $\alpha = 4$ . При  $Q > Q_{min}$  возможны три состояния, но реализуется лишь одно, лежащее на исходной ветви с тепловым скачком, как наиболее устойчивое.

При дальнейшем наращивании инжекции сверх значения  $Q = Q_{max}$  с уравнениями движения и законами сохранения совместимы только состояния с размытым фронтом, поэтому должен происходить переброс системы на другую ветвь решения. Указанный переброс сопровождается увеличением сжатия (почти в два раза при выбранных параметрах) и, согласно сказанному выше, уменьшением энтропии. Но иных состояний при уровнях инжекции  $Q > Q_{max}$  нет, поэтому реализация структуры с размытым фронтом

в рассматриваемых условиях неизбежна. Переброс сопровождается также уменьшением показателя спектра и, следовательно, увеличением доли релятивистских частиц.

Поведение системы в этом диапазоне мощностей инжекции напоминает фазовый переход, сопровождающийся изменением «параметра порядка» — доли релятивистских частиц. Аналогично флуктуационной области вблизи точки Кюри в окрестности значения  $Q_{max}$  также расположена область флуктуаций, в которой малые изменения инжекции приводят к сильному изменению состояния ударного перехода.

Дальнейшее увеличение инжекции ведет к уменьшению сжатия и росту показателя спектра. При увеличении инжекции до значений  $Q \geq 3 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует сжатиям  $\sigma \leq 7$ , показатель спектра увеличивается до значений  $\alpha > 4$  и монотонно возрастает и далее с ростом темпа инжекции. Хотя при этом доля энергии, передаваемой ускоренным частицам, остается высокой,  $\eta > 0.75$ , но поскольку число ускоренных частиц возрастает, их средняя энергия уменьшается и доля релятивистских частиц убывает. Развитая теория теряет силу при  $\alpha \approx 5$ , когда эта доля становится пренебрежимо малой.

При изменении темпа инжекции в противоположном направлении можно ожидать обратной последовательности состояний. При инжекции  $Q < Q_{max}$ , по-видимому, будет происходить переброс системы на ветвь с тепловым скачком. Это не исключает возможности возникновения «перегретого состояния» и петли гистерезиса, связанных с возможной устойчивостью в некоторых пределах верхней ветви на рис. 2 относительно малых флуктуаций, но в конце концов система перейдет в более устойчивое состояние на нисходящей ветви нижней кривой.

Напомним, что наблюдаемый показатель спектра галактических космических лучей  $\alpha \approx 4.7$  в области энергий  $10 \text{ ГэВ} \leq T \leq 10^6 \text{ ГэВ}$ . Такой показатель в модели ускорения частиц одиночной ударной волной можно обеспечить в линейном режиме при наличии ударной волны умеренной силы ( $\sigma \approx 2.76$ ,  $M \approx 2.58$ ) и в экстремальном нелинейном режиме ( $\sigma \approx 4.5$ ,  $M \gg 1$ ). Главное различие этих случаев — величина коэффициента полезного действия, т. е. доли энергии, переходящей ускоренным частицам:  $\eta \ll 1$  в линейном режиме и  $\eta \approx 0.78$  в нелинейном. По-видимому, возможны и промежуточные нелинейные режимы с  $M > 2.58$ , не рассмотренные в настоящей работе.

Мы не рассматриваем здесь также вопроса о темпе инжекции частиц в режим ускорения из окружающей среды. Некоторые оценки этой величины сделаны в [18]. Они указывают на возможность реализации в естественных условиях требуемой инжекции практически в любые режимы. Следствия рассмотренных нелинейных эффектов в случае сильных ударных волн в астрофизических объектах могут быть проверены в принципе путем наблюдения синхротронного излучения ускоренных частиц (показатель  $\alpha$ ) и теплового излучения из-за фронта, которое сильно зависит от эффективной температуры плазмы.

В заключение приведем краткое резюме общих свойств рассмотренной модели, которые могут быть присущи и другим похожим системам, например, ударным волнам со сферическим фронтом [8, 19].

Показано, что в определенном диапазоне мощностей инжекции существует несколько состояний ударного перехода, отвечающих одинаковой инжекции, но заметно отличающихся глобальным сжатием, формой профиля и спектрами ускоренных частиц. Наличие нескольких ветвей решения — характерная черта самых разных нелинейных систем.

Существуют неустойчивые состояния ударного перехода, из которых система спо-

собна совершать перебросы в другие состояния, сильно отличающиеся от исходного. При этом малое изменение мощности инжекции может привести к значительным изменениям наблюдаемых параметров — глобального сжатия и спектра ускоренных частиц.

В нелинейных режимах ускорения частиц уменьшение инжекции приводит к увеличению сжатия. Высоким значениям глобального относительного сжатия на ударном переходе (в десятки и сотни раз) отвечают весьма низкие уровни инжекции. По-видимому, такие состояния (с относительным сжатием  $> 10$ ) неустойчивы, и возможность их реализации в природе неясна.

## Литература

1. Р. З. Сагдеев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, Атомиздат, Москва (1964), вып. 4, с. 20.
2. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973); **93**, 871 (1987).
3. V. G. Eiselevich, *Space Sci. Rev.* **32**, 56 (1982).
4. W. I. Axford, E. Leer, and G. Scadron, in: *Proc. 15th ICRC, Plovdiv (1977)*, v. 11, p. 132.
5. Г. Ф. Крымский, *ДАН СССР* **234**, 1306 (1977).
6. И. Н. Топтыгин, *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*, Наука, Москва (1983).
7. Е. Г. Бережко, Г. Ф. Крымский, *УФН* **154**, 49 (1988).
8. Е. Г. Бережко, В. К. Елшин, Л. Т. Ксенофонтов, *ЖЭТФ* **109**, 3 (1996).
9. F. C. Jones and D. C. Ellison, *Space Sci. Rev.* **58**, 259 (1991).
10. А. М. Быков, И. Н. Топтыгин, *ЖЭТФ* **98**, 1255 (1990).
11. J. F. McKenzie and H. J. Volk, *Astron. Astrophys.* **116**, 191 (1982).
12. M. Scholer, in *AIP Conf. Proc. 264*, ed. by G. Zank, T. Gaisser (1992), p. 125.
13. K. V. Quest, in *AIP Conf. Proc. 264*, ed. by G. Zank, T. Gaisser (1992), p. 348.
14. А. М. Быков, Ю. А. Уваров, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 625 (1993).
15. W. I. Axford, E. Leer, and J. F. McKenzie, *Astron. Astrophys.* **111**, 317 (1982).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
17. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
18. I. N. Toptygin, in *Proc. 25th ICRC, Durban (1997)*.
19. L. O'C. Drury, H. J. Volk, and E. G. Berezhko, *Astron. Astrophys.* **299**, 222 (1995).