СПИНОВАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ИОНОВ Mn В КВАНТОВЫХ ЯМАХ (CdMn)Te/(CdMg)Te ПРИ ПИКОСЕКУНДНОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

М. Г. Тяжлов^а, А. И. Филин^а, А. В. Ларионов^а, В. Д. Кулаковский^а,

Д. Р. Яковлев^b*, А. Вааг^{b†}, Г. Ландвер^{b†}

^a Институт физики твердого тела Российской академии наук 142432, Черноголовка, Россия ^b Physikalisches Institut der Universität Würzburg Würzburg 97074, Germany

Поступила в редакцию 30 января 1997 г.

Исследована релаксация спинов ионов Мп во внешнем магнитном поле в квантовой яме Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te при возбуждении квазидвумерной электрон-дырочной плазмы при температуре жидкого гелия. Обнаружен нагрев спинов Mn фотовозбужденными носителями, который обусловлен спиновым и энергетическим обменом между горячей электрон-дырочной плазмой и ионами Mn за счет прямого sd-взаимодействия между спинами электронов и спинами Mn. Этот процесс имеет короткое характерное время $\simeq 4$ нс, что приводит к заметному нагреву спиновой Mn-подсистемы за времена ~ 0.5 нс. Нагрев спинов Mn даже в условиях однородного возбуждения плотной электрон-дырочной магнитоплазмы происходит пространственно неоднородно и приводит к образованию спиновых доменов в магнитной подсистеме квантовой ямы. Определено время релаксации спиновых доменов после импульса возбуждения, которое составляет ~ 70 нс. Энергетическая релаксация экситонов в случайном обменном потенциале, образованном спиновыми доменами, происходит в результате диффузии экситонов с характерным временем 1-4 нс в магнитном поле B = 14 Тл. Время релаксации сокращается при уменьшении величины оптической накачки, что указывает на уменьшение линейных размеров спиновых доменов. В малых полях (B = 2 Тл) обнаружено замедление времени экситонной диффузии до 15 нс. Замедление диффузии обусловлено связыванием экситонов на нейтральных донорах (с образованием экситон-примесных комплексов) и уменьшением амплитуды спиновых доменов в малых магнитных полях. Оптическим методом определено время спин-решеточной релаксации Mn в магнитном поле 14 Tл, которое составляет 270 ± 10 и 16 ± 7 нс для концентрации Mn соответственно 3% и 12%.

1. ВВЕДЕНИЕ

Атомы Mn обладают пятью нескомпенсированными электронными спинами в $3d^5$ -оболочке и образуют разбавленную магнитную подсистему в полумагнитных полупроводниках [1]. В атоме Mn d-электроны эффективно взаимодействуют с носителями в валентной зоне (pd-взаимодействие) и зоне проводимости (sd-взаимодействие) полупроводника, что приводит к таким эффектам, как гигантское спиновое расщепление зонных состояний, гигантское фарадеевское вращение плоскости поляризации,

^{*}Постоянный адрес: Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук, 194021, Санкт-Петербург, Россия.

[†]A. Waag, G. Landwehr.

формирование магнитного полярона [1, 2] и т. д. Внутри магнитной подсистемы взаимодействие между *d*-электронами различных атомов Mn приводит к образованию антиферромагнитных кластеров с участием ближайших соседей [3].

В объемных образцах спиновая релаксация в магнитной подсистеме исследовалась весьма интенсивно [4–6]. Было найдено, что при гелиевых температурах изолированные атомы Mn весьма слабо взаимодействуют с фононами, что приводит к большим временам спин-решеточной релаксации, лежащим в миллисекундном диапазоне [4]. Наличие в кристаллах полумагнитных полупроводников антиферромагнитных кластеров Mn увеличивает скорость спиновой релаксации на несколько порядков [5,6]. Изолированные атомы Mn эффективно обмениваются спинами между собой и кластерами за счет спин-спинового взаимодействия. Кластеры, в свою очередь, более эффективно, чем изолированные атомы, взаимодействуют с фононами. В полумагнитных полупроводниках время спин-решеточной релаксации сильно сокращается при увеличении концентрации Mn и температуры. При температуре жидкого гелия и концентрации Mn $x \sim 3\%$ время спин-решеточной релаксации имеет микросекудный масштаб [5,6].

Предметом настоящей работы является изучение процессов энергетического и спинового обмена между магнитной, электронной и фононной подсистемами в полумагнитной квантовой яме при возбуждении электрон-дырочной (e-h) магнитоплазмы высокой плотности. Особое внимание уделяется эффектам, связанным с прямым обменным *spd*-взаимодействием между спинами электронов и спинами Mn. В квантовых ямах, благодаря их малой ширине, можно создавать большие концентрации фотовозбужденных носителей без существенного разогрева решетки, что невозможно сделать в объемных полупроводниках. Возможность прямого спинового и энергетического обмена между спинами Mn и спинами фотовозбужденных носителей в полумагнитных полупроводниках очевидна и была теоретически рассмотрена довольно давно [7]. Однако экспериментально этот вопрос еще мало изучен. Исследования были выполнены только в объемных полумагнитных полупроводниках и не привели к положительным результатам [8], так как плотность фотовозбужденных электронов была недостаточно велика.

Существенный прогресс в технике молекулярно-пучковой эпитаксии в последнее время привел к созданию гетероструктур высокого качества на основе соединений $A^{II}B^{VI}$ и открыл возможности для изучения явлений, связанных с высокими уровнями оптического возбуждения в квантовых ямах с изоэлектронными магнитными примесями [9–11].

В исследованиях квантовых ям с магнитными примесями при больших плотностях межзонного возбуждения нами был обнаружен сильный разогрев спинов Mn в условиях генерации e-h-плазмы высокой плотности за время $\simeq 0.5$ нс [11], который приводит к фиолетовому спектральному сдвигу линии X излучения экситонов в магнитном поле. Кроме того, было обнаружено, что время релаксации спектрального положения линии X после мощного импульса возбуждения зависит от способа регистрации спектров излучения экситонов. Время релаксации в процессе затухания фотолюминесценции сразу после мощного импульса возбуждения составляет $\simeq 4$ нс, в то время как время релаксации, измеренное с использованием слабых неразогревающих зондирующих импульсов, при больших задержках после импульса возбуждения, оказалось на два порядка больше ($\simeq 300$ нс). Большое время $\simeq 300$ нс согласуется с релаксацией среднего по квантовой яме спина Mn вследствие взаимодействия с фононами. Для объяснения короткого времени было высказано предположение, что после мощного импульса возбуждения с фононами.

10 ЖЭТФ, №4 (10)

1441

ния спиновая температура Mn становится пространственно неоднородной, в магнитной подсистеме квантовой ямы образуются спиновые домены и энергетическая релаксация экситонов происходит в образовавшемся случайном обменном потенциале.

Настоящая работа продолжает изучение физических свойств спиновых доменов, образующихся в квантовой яме $Cd_{1-x}Mn_xTe$. В работе используется квантовая яма $Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te$ шириной 10 нм с малой концентрацией магнитной примеси Mn и детально исследуются механизм спин-спинового нагрева Mn-подсистемы, влияние фононов на нагрев спинов магнитных примесей и энергетическая релаксация носителей в обменном поле спиновых доменов.

2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерения проводились на нелегированной гетероструктуре Сd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te, выращенной методом молекулярно-пучковой эпитаксии на подложке из CdTe с ориентацией (001). Исходный образец представлял собой набор одиночных квантовых ям шириной $L_z = 1.8, 4.5, 6$ и 10 нм, расположенных в порядке увеличения расстояния до поверхности. Квантовые ямы были разделены барьерами (CdMg)Те шириной 100 нм. Для получения одиночной квантовой ямы образец подвергался химическому травлению в разбавленном растворе брома в метиловом спирте, CH₃OH:Br₂. В конечном итоге образец представлял собой одиночную квантовую яму, отделенную от поверхности барьером толщиной ~100 нм. Отдельные измерения были выполнены на одиночной квантовой яме CdTe/Cd_{0.88}Mn_{0.12}Te c $L_z = 10$ нм. Образец помещался в жидкий гелий в криостат со сверхпроводящим соленоидом. Плоскость квантовой ямы была ориентирована перпендикулярно магнитному полю. Спектры фотолюминесценции записывались при температуре T = 4.2 К в магнитном поле B = 0-14 Тл с использованием решеточного монохроматора. Неравновесные носители возбуждались импульсным лазером на красителе. Длина волны возбуждения 585 нм, частота повторения импульсов 0.8 МГц, а ширина лазерного импульса 30 пс. Для фотовозбуждения и сбора сигнала фотолюминесценции использовался кварцевый световод диаметром 0.6 мм. Световод располагался вплотную к поверхности образца, с тем чтобы обеспечить однородное возбуждение e-h-плазмы и сбор сигнала фотолюминесценции только из возбужденной области образца [9–11]. Плотность фотовозбужденных носителей определялась из анализа формы линии фотолюминесценции е-h-плазмы по количеству заполненных уровней Ландау [9]. Максимальная плотность носителей составляла $\simeq 2 \cdot 10^{12}$ см⁻² при плотности энергии в возбуждающем импульсе P = 3 мкДж/см².

Спектры фотолюминесценции записывались системой время-скоррелированного счета фотонов с временным разрешением 0.3 нс с помощью охлаждаемого фотоумножителя. Для изучения процессов спиновой релаксации Mn на временах больших, чем время жизни носителей, использовалось дополнительное слабое тестирующее фотовозбуждение. Плотность носителей в этом случае не превышала $3 \cdot 10^9$ см⁻². Для этого использовался специальный режим лазера. Лазер на красителе возбуждался второй гармоникой Nd–YAG-лазера с частотой повторения 82 МГц, которая затем прореживалась в соотношении 1:100. Для получения тестирующих импульсов высокой частоты реализовывался специальный режим частичного подавления задающих импульсов. В конечном итоге излучение лазера на красителе представляло собой набор тестирующих импульсов на частоте 82 МГц (12.2 нс между импульсами), которые располагались равномерно между накачивающими импульсами с частотой 0.8 МГц (1220 нс между импульсами). Отношение интенсивностей тестирующих и накачивающих импульсов составляло ~ 1/1000, так что совокупное излучение тестирующих импульсов не превышало 10% от интенсивности накачивающего излучения.

3. СРЕДНЕЕ ПО КВАНТОВОЙ ЯМЕ ЗНАЧЕНИЕ СПИНА Mn. СПИН-РЕШЕТОЧНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

3.1. Спектры фотолюминесценции при непрерывном фотовозбуждении

На рис. 1 представлены спектры фотолюминесценции одиночной квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te$ шириной 10 нм при низком уровне оптического возбуждении непрерывным Ar⁺-лазером. Спектры были записаны при нулевой временной задержке $\tau_d = 0$ и температуре гелиевой бани $T_{bath} = 4.2$ К. В отсутствие магнитного поля в спектрах фотолюминесценции наблюдается одна относительно широкая линия с полушириной ~ 4 мэВ, которая обусловлена рекомбинацией экситона, связанного на нейтральном доноре (D_0X -комплекс) [12]. При увеличении магнитного поля линия заметно смещается в сторону низких энергий на величину $\simeq 20$ мэВ и сужается. Смещение линии в область меньших энергий связано с поляризацией спинов магнитной примеси Mn во внешнем магнитном поле B и обусловлено обменным *spd*-взаимодействием в зоне проводимости и валентной зоне квантовой ямы. Величина смещения ΔE прямо пропорциональна среднему спину Mn $\langle S_z \rangle$, эффективной концентрации магнитной поне и зоне проводимости [1,13]:

$$E(B) - E(0) = -\frac{1}{2} (|\beta| + |\alpha|) N_0 x^* \langle S_z \rangle.$$
(1)

Здесь N_0 — количество элементарных ячеек в единице объема, а x^* — эффективная мольная доля Mn. Величина x^* всегда меньше мольной доли Mn x из-за образования антиферромагнитных кластеров Mn, которые в магнитных полях B < 15 Tл почти не влияют на намагниченность образца [3]. Множитель 1/2 — собственное значение спинового оператора Паули для электронов и дырок.

Средний спин Mn определяется заселением зеемановского мультиплета Mn во внешнем магнитном поле. Для однородной системы в условиях теплового равновесия внутри магнитной подсистемы величина $\langle S_z \rangle$ описывается функцией Бриллюэна для спина 5/2 во внешнем магнитном поле B [1,13]:

$$\langle S_z \rangle = B_{5/2} \frac{\mu_B g_{\rm Mn} B}{k(T_{\rm Mn} + T_0)},\tag{2}$$

где μ_B — магнетон Бора, g_{Mn} — g-фактор Mn, k — постоянная Больцмана, T_{Mn} — спиновая температура Mn, а T_0 — эффективная антиферромагнитная температура, которая отражает слабое дальнодействующее антиферромагнитное взаимодействие в Мпподсистеме. В случае малой концентрации Mn последняя невелика и составляет $T_0 \sim 1$ K для x = 0.03 [13].

Сужение линии фотолюминесценции связано с ионизацией D_0X -комплексов обменным полем [12]. В исследуемой квантовой яме при температуре 4.2 К ионизация



Рис. 1. Спектры фотолюминесценции одиночной квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Te/ $Cd_{0.75}Mg_{0.25}$ Te шириной 10 нм при непрерывном возбуждении Ar⁺-лазером для различных магнитных полей ($T_{bath} = 4.2$ K). На вставке показана зависимость от магнитного поля энергии оптических переходов для экситонов (E_x) и для e-h-плазмы (E_p) (P = 3 мкДж/см², $\tau_d = 0$ нс, при $T_{bath} = 4.2$ K). Величина E_p определялась нами как энергетическое положение уровня интенсивности, равного 3/4 от максимума I_{max} , на низкоэнергетичном хвосте линии излучения e-h-плазмы. Сплошные линии — результат подгонки по формулам (1), (2). Положение экситона в нулевом магнитном поле (квадрат) получено из спектров возбуждения фотолюминесценции

комплексов происходит в магнитном поле 2–2.5 Тл. Таким образом, в магнитном поле B > 4 Тл в спектрах фотолюминесценции доминирует рекомбинация экситона (X), слабо локализованного на флуктуациях случайного потенциала квантовой ямы.

При малой плотности возбуждения смещение линии излучения в магнитном поле хорошо описывается функцией Бриллюэна с эффективной температурой $T_{Mn} \simeq T_{bath}$, где $T_{bath} = 4.2$ К — температура гелиевой бани (с учетом дополнительного сдвига, связанного с ионизацией экситонного комплекса). Смещение линии X в насыщающих магнитных полях относительно нулевого поля составляет 24 мэВ ($\simeq 20$ мэВ смещение относительно положения D_0X в нулевом поле и $\simeq 4$ мэВ — энергия связи D_0X -комплекса [12]). Магнитное поле 14 Тл при низкой температуре спинов Mn ($T_{Mn} \simeq 4.2$ K) обеспечивает глубокое насыщение магнитной подсистемы. На рис. 1 энергия экситонного перехода почти не меняется уже с магнитных полей $\simeq 6$ Тл. Соотношение (1) дает возможность определять значение спина Mn $\langle S_z \rangle$ непосредственно по положению линий в спектрах фотолюминесценции, а соотношение (2) позволяет определять $T_{\rm Mn}$ через $\langle S_z \rangle$ при фиксированном внешнем магнитном поле. Таким образом, спектральное положение линии излучения экситона для B = 14 Тл при низком уровне возбуждения отвечает $\langle S_z \rangle = 5/2$.

3.2. Спектры фотолюминесценции при импульсном фотовозбуждении. Зондирующие импульсы как способ определения зависимости среднего по объему значения $\langle S_x \rangle$ от времени. Спин-решеточная релаксация

На рис. 2 приведен спектр фотолюминесценции квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Te, записанный во время жизни e-h-плазмы в нулевой момент времени $\tau_d = 0$ (временные ворота 0.3 нс) при $T_{bath} = 4.2$ K, B = 14 Tл и P = 3 мкДж/см². Для сравнения на этом же рисунке приведены спектры фотолюминесценции в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 14 Тл. В спектре наблюдается широкая линия, обусловленная излучением e-h-плазмы из основной размерно-квантованной подзоны электронов и дырок ($n_z = 1$) [10]. В магнитном поле 14 Тл в спектрах разрешается дополнительная структура, связанная с квантованием состояний электронов и дырок в сильном магнитном поле. В спектрах хорошо различаются оптически разрешенные переходы, обозначенные j-j (j = 0, 1, ...), между уровнями Ландау электронов и дырок с одинаковыми номерами ($j_e = j_h$) (рис. 2).

Так же, как и в случае малой накачки, при увеличении магнитного поля от нуля до 14 Тл линия излучения e-h-плазмы смещается в красную сторону. Однако скорость смещения при этом заметно меньше. На вставке к рис. 1 показан сдвиг энергии оптических переходов во внешнем магнитном поле для экситонов, E_x (при слабом непрерывном возбуждении) и для e-h-плазмы для B < 10 Тл, E_p (P = 3 мкДж/см², $\tau_d = 0$ нс) при $T_{bath} = 4.2$ К. В этих магнитных полях уровни Ландау не разрешаются и величина E_p определялась нами как энергетическое положение уровня интенсивности, равного 3/4 от максимума I_{max} , на низкоэнергетичном хвосте излучения e-h-плазмы. Такое определение E_p грубо учитывает перенормировку ширины запрещенной зоны в e-h-плазме [10]. Поскольку форма красного края линии e-h-плазмы слабо меняется в магнитном поле до 10 Тл, то точность определения сдвига E_p составляла $\simeq 1$ мэВ несмотря на большую ширину линии магнитоплазмы ($\simeq 40$ мэВ). Наблюдаемая зави-симость сдвига величины E_p от магнитного поля описывается спиновой температурой $T_{Mn} \simeq 10 \pm 0.5$ К в соответствии с формулами (1), (2).

Спиновая температура Mn отличается как от T_{bath} , так и от электронной температуры $T_e \ e^{-h}$ -плазмы в квантовой яме. С ростом плотности оптического возбуждения T_e сильно возрастает [10]. Величина T_e была определена из анализа формы спектров фотолюминесценции [14]. При максимальной накачке $P = 3 \ \text{мкДж/см}^2$ значение T_e достигает $\sim 200-300 \ \text{K}$. Таким образом, температура спиновой системы остается значительно меньше электронной, $T_{\text{Mn}} \ll T_e$.

Из сравнения спектров излучения плазмы при различных плотностях возбуждения мы нашли, что разогрев спинов Mn становится существенным лишь при $\bar{P} \ge 0.3$ мкДж/см², при этом $T_{\rm Mn}$ (или средний спин Mn $\langle S_z \rangle$) зависит от времени задержки после импульса возбуждения.



Рис. 2. Спектры фотолюминесценции квантовой ямы Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te шириной 10 нм при дополнительном фотовозбуждении с помощью импульсов зондирования, записанные после мощного импульса ($P = 3 \text{ мкДж/см}^2$) в нулевой момент времени ($T_{bath} =$ 4.2 K). Регистрация осуществлялась с временными задержками, отвечающими максимумам импульсов зондирования с временными воротами 0.3 нс. Для сравнения на этом же рисунке приведены спектры фотолюминесценции в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 14 Тл. Вертикальной штриховой линией обозначено энергетическое положение E^* линии X излучения экситонов в магнитном поле B = 14 Тл при непрерывном возбуждении

Изменение $T_{\rm Mn}$ во время затухания фотолюминесценции непосредственно после возбуждающего импульса мы обсудим в разд. 4. Для тестирования магнитного состояния квантовой ямы при больших временах после окончания рекомбинации носителей мы использовали спектры фотолюминесценции при дополнительном фотовозбуждении с помощью импульсов зондирования (рис. 2). Оптический сигнал регистрировался с временными задержками, отвечающими максимумам импульсов зондирования с временными воротами 0.3 нс. Плотность энергии в отдельном импульсе зондирования составляла $P \simeq 3$ нДж/см², а фактор заполнения уровней Ландау в максимумах импульсов зондирования не превышал $\nu \sim 0.01$. В спектрах фотолюминесценции доминирует линия экситонов X. Из рис. 2 видно, что во время первого импульса зондирования ($\tau_d = 12.2$ нс) линия X смещена в фиолетовую сторону на ~ 4 мэВ относительно своего положения при слабом непрерывном возбуждении. Это смещение отражает уменьшение спина $\langle S_z \rangle$ или повышение спиновой температуры Mn (см. формулы (1), (2)) и является следствием действия мощного импульса в момент $\tau_d = 0$. Нами специально проверялось, что мощность зондирующих импульсов мала для того, чтобы самостоятельно нагреть магнитную подсистему. Как уже отмечалось выше, нагрева спиновой подсистемы Mn не наблюдается уже при плотности мощности возбуждающего импульса на два порядка больше, при $P \simeq 0.3$ мкДж/см².

При регистрации на импульсах зондирования сигнал фотолюминесценции записывался в момент возбуждения, что позволяет трактовать величину $\langle S_z \rangle$, определенную с помощью импульсов зондирования, как среднее значение спина Mn по объему квантовой ямы $\langle S_z \rangle_V$.

Из рис. 2 видно, что при увеличении времени задержки линия X медленно смещается в сторону меньших энергий вплоть до своего равновесного значения E^* . Этот сдвиг отражает энергетическую релаксацию величины $\langle S_z \rangle_V$ к своему равновесному значению $\langle S_z \rangle = 5/2$ или релаксацию средней по объему квантовой ямы спиновой температуры $T_{\rm Mn}$ к температуре гелиевой бани T_{bath} =4.2 К. Поскольку в этих экспериментах концентрация свободных носителей мала, мы связываем такое поведение с энергетической релаксацией спинов Mn за счет взаимодействия с фононами.

Временная зависимость энергии переходов экситонов $E_x(t)$, полученная с использованием импульсов зондирования при B = 14 Тл и $T_{bath} = 4.2$ К, приведена на рис. 3 для двух значений оптической накачки P = 3 и 2 мкДж/см². На рисунке горизонтальной штриховой линией обозначено положение линии X при непрерывном возбуждении $E_x = E^* = 1.6268$ эВ, когда спиновая температура Mn равна температуре гелиевой бани, $T_{Mn} = T_{bath} = 4.2$ К. Сплошные линии — результат экспоненциальной подгонки $E_x(t)$ по методу наименьших квадратов по формуле

$$\Delta E(t) = E_x(t) - E^* = \Delta E(0) \exp(-t/\tau_{\rm Mn}). \tag{3}$$

Величина $\Delta E(0)$ зависит от плотности возбуждения. Она равна 4.2 и 1.8 мэВ соответственно для P = 3 и 2 мкДж/см². Несмотря на разные величины первоначального спинового разупорядочения $\Delta E(0)$, значение времени спиновой релаксации в обоих случаях оказалось равным $\tau_{\rm Mn} = 270 \pm 10$ нс.

Одинаковые значения τ_{Mn} при разных $\Delta E(0)$ указывают на то, что процесс охлаждения спиновой Mn-подсистемы происходит за счет спин-решеточной релаксации, причем температура фононной подсистемы, по крайней мере на временах $\tau_d \ge 12$ нс, слабо отличается от температуры гелиевой бани. В противном случае релаксация спинов не описывалась бы экспоненциальным законом из-за сильной зависимости времени спинрешеточной релаксации от фононной температуры [6]. Найденное время спиновой релаксации, $\tau_{Mn} = 270$ нс, находится в хорошем согласии с результатами, полученными для спин-решеточной релаксации в объемных кристаллах (CdMn)Te в магнитном поле $B \simeq 14$ Tл при гелиевых температурах [5].

Для дополнительной проверки утверждения, что релаксация величины $\langle S_z \rangle_V$ на больших временах обусловлена взаимодействием с фононами, мы проследили за изменением $\tau_{\rm Mn}$ с температурой и концентрацией Mn. Эксперименты проводились в магнитном поле B = 14 Tл. При повышении температуры бани от 4.2 до 10 К время спиновой



Рис. 3. Зависимость от времени задержки энергетического положения линии экситонной рекомбинации, E_x , при малом дополнительном фотовозбуждении для двух значений оптической накачки P = 3 мкДж/см² (кривая 1) и P = 2 мкДж/см² (кривая 2) в магнитном поле B = 14 Тл. Квантовая яма $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Те/ $Cd_{0.75}Mg_{0.25}$ Те, $L_z = 10$ нм, $T_{bath} = 4.2$ К. Горизонтальной штриховой линией обозначено положение E^* линии X при непрерывном возбуждении. Сплошные линии — результат экспоненциальной подгонки по методу наименьших квадратов по формуле (3)

релаксации в квантовой яме с x = 0.03 сократилось от 270 до 70 нс. Измерения времени спиновой релаксации в аналогичных квантовых ямах CdTe/(CdMn)Te с большей концентрацией Mn, x = 0.12, показали, что при $T_{bath} = 4.2$ К время релаксации τ_{Mn} сокращается до 16 ± 7 нс¹⁾. Эти данные также находятся в согласии с известной из литературы зависимостью времени спин-решеточной релаксации от T и x [5,6].

Из рис. 2 также видно, что в области $\tau_d = 10-100$ нс линия X излучения экситонов заметно уширена по сравнению со спектрами, записанными при непрерывным возбуждении. Наблюдаемое уширение не может быть вызвано излучением экситон-примесного комплекса, так как (см. рис. 1) экситонное состояние становится основным уже в магнитном поле 2-3 Тл при энергии экситона около 1.635 эВ, в то время как линия X при $\tau_d = 10-100$ нс лежит еще на ~ 4 мэВ ниже по энергии. Величина уширения уменьшается с увеличением задержки и при $\tau_d \sim 100$ нс становится незначительной. Мы полагаем, что уширение линии X при $\tau_d < 100$ нс связано со спиновыми неоднородностями в магнитной подсистеме квантовой ямы. Сужение линии Х отражает установление равновесия за счет спин-спинового взаимодействия. Характерное время установления равновесия, оцененное по скорости изменения полуширины линии X, равно $\tau_{ss} \sim 70$ нс. В настоящее время в литературе отсутствуют значения времени спин-спиновой релаксации для полумагнитных полупроводников с x = 0.03, изучаемых в данной работе. Экстраполяция известной экспериментальной зависимости $\tau_{ss}(x)$ для 0.05 < x < 0.1 [15, 16] в область $x \simeq 0.03$ приводит к $au_{ss} \simeq 1$ нс, что заметно меньше, чем значение τ_{ss} , измеренное в нашем эксперименте. Данное различие можно объяснить только в предположении о макроскопическом характере спиновых неоднородностей Mn в наших экспериментах.

¹⁾ Наши экспериментальные условия не позволяют изменять временной интервал между импульсами зондирования, который составляет 12.2 нс. Поэтому в квантовой яме с x = 0.12 точность измерения τ_{Mn} была заметно ниже по сравнению с x = 0.03.

4. НАГРЕВ МАГНИТНОЙ ПОДСИСТЕМЫ ЗА СЧЕТ СПИН-СПИНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С *е*-*h*-ПЛАЗМОЙ

4.1. Прямой нагрев спинов Мп фотоносителями. Экспериментальные результаты

Как отмечалось выше, при относительно небольших плотностях оптического возбуждения, вплоть до P = 0.3 мкДж/см², спиновая температура магнитной подсистемы $T_{\rm Mn}$ остается близкой к температуре гелиевой бани. При больших P величина $T_{\rm Mn}$ начинает зависеть от времени задержки τ_d между возбуждающим импульсом и моментом регистрации излучения. Это видно из рис. 4, где приведены спектры фотолюминесценции квантовой ямы Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te, записанные в различные моменты времени τ_d в течение времени жизни *e*-*h*-плазмы при $T_{bath} = 4.2$ K, B = 14 Tл для двух плотностей возбуждения, P = 3 и 0.3 мкДж/см². Для сравнения на этом же рисунке приведены спектры фотолюминесценции в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 14 Tл.

Из рисунка видно, что при P = 3 мкДж/см² и $\tau_d \leq 1.3$ нс в спектрах доминирует излучение e-h-плазмы. Максимальная концентрация носителей, определенная по заполнению уровней Ландау [10], составляет $n_{eh} = 1.7 \cdot 10^{12}$ см⁻². При увеличении времени задержки концентрация носителей уменьшается вследствие рекомбинации, и линия излучения, отвечающая переходам между нулевыми уровнями Ландау электронов и дырок (0–0), плавно переходит в линию излучения магнитоэкситонов X в районе



Рис. 4. Спектры фотолюминесценции квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te шириной 10 нм, записанные во время жизни *e*-*h*-плазмы в различные моменты времени $\tau_d < 1.3$ нс при $T_{bath} = 4.2$ К, B = 14 Тл, P = 3 и 0.3 мкДж/см² (соответственно штриховая и сплошная кривые). Для сравнения на этом же рисунке приведены спектры фотолюминесценции в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 14 Тл. Вертикальной штриховой линией обозначено энергетическое положение линии X излучения экситонов в магнитном поле B = 14 Тл при непрерывном возбуждении



Рис. 5. Сравнение временных зависимостей спектров фотолюминесценции квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te шириной 10 нм при B = 14 Tл, $T_{bath} = 4.2$ K, P = 3 и 0.3 мкДж/см² (соответственно штриховая и сплошная кривые). Время задержки подбиралось таким образом, чтобы концентрации носителей для разных накачек были одинаковы

 $\tau_d \simeq 1.5$ нс. Энергия переходов 0–0 в *e*-*h*-плазме, так же как и энергия экситонного перехода X, отражает средний спин Mn (см. (1) и [10, 17]). Поэтому для тестирования магнитного состояния системы во время жизни *e*-*h*-плазмы можно следить за энергией 0–0-переходов, E_{0-0} .

Из рис. 4 видно, что при $\tau_d = 0$ –1.3 нс энергия E_{0-0} увеличивается с ростом τ_d . Максимальный сдвиг составляет около 6 мэВ. Он примерно совпадает по времени с опустошением возбужденных уровней Ландау (фактор заполнения $\nu \simeq 1$). Существуют две причины изменения энергии 0–0-перехода с ростом τ_d . Во-первых, это уменьшение притягивающего межчастичного взаимодействия в e-h-плазме, ΔE_{e-h} , из-за уменьшения плотности плазмы n_{eh} . Во-вторых, уменьшение величины обменного взаимодействия, ΔE_{exc} , из-за увеличения спиновой температуры Mn. Ранее нами было показано [10], что в квантовой яме CdMnTe в e-h-плазме перенормировка E_{0-0} за счет межчастичного взаимодействия невелика, $\Delta E_{e-h} < 3$ мэВ при $n_{eh} \leq 2 \cdot 10^{12}$ см⁻². Следовательно, сдвиг ΔE_{exc} , связанный с увеличением спиновой температуры Mn, составляет, по крайней мере, 3 мэВ при $\tau_d = 1$ –1.3 нс.

Аналогичная величина ΔE_{exc} получается и из прямого сравнения спектров фотолюминесценции при различных значениях τ_d , записанных при двух значениях оптической накачки ($P = 3 \text{ и } 0.3 \text{ мкДж/см}^2$), но сдвинутых друг относительно друга по времени на $\simeq 1$ нс (рис. 5). Время задержки $\simeq 1$ нс подбиралось таким образом, чтобы спектры отвечали одинаковой концентрации носителей. В этом случае разница в спектральном положении линий излучения определяется только разницей спиновых температур Мл, так как перенормировка за счет межчастичного взаимодействия ΔE_{e-h} в этих случаях



Рис. 6. Зависимость энергии переходов E_{0-0} и E_x (\bar{E} , см. обсуждение в разд. 5) в спектрах фотолюминесценции квантовой ямы Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te ($L_x = 10$ нм, $T_{bath} = 4.2$ K) в магнитном поле B = 14 Тл при P = 3, 2, 1, 0.3 мкДж/см² (соответственно кружки, квадраты, треугольники, ромбы) во временном диапазоне $\tau_d < 16$ нс. Спектры записывались без дополнительного во время затухания фотолюминесценции (светлые символы) и при дополнительном фотовозбуждении в максимуме первого импульса зондирования (темные символы). В диапазоне времени $\tau_d < 1.5$ нс учитывались поправки на межчастичное взаимодействие в *e*-*h*плазме. Штриховой линией приведена концентрация двумерных электронов и дырок n_{eh} для P = 3 мкДж/см², определенная по количеству заполненных уровней Ландау. Штрихпунктирной горизонтальной линией показано положение линии X при непрерывном возбуждении

одинакова. Из рис. 5 видно, что энергетическая разница в положении линий излучения достигает 5 мэВ при $\tau_d \simeq 1$ нс. Подставляя в формулы (1), (2) значение $\Delta E_{exc} \simeq 5$ мэВ и используя величину $\Delta E = 24$ мэВ для смещения линии X в насыщающем магнитном поле, находим $T_{Mn} \simeq 25$ К для P = 3 мкДж/см² при $\tau_d \sim 1$ нс.

Зависимость энергии переходов между нулевыми уровнями Ландау, E_{0-0} , изображена на рис. 6 для магнитного поля B = 14 Тл, $T_{bath} = 4.2$ К и P = 3, 2, 1 и 0.3 мкДж/см². При $\tau_d < 1$ нс, когда $\nu > 1$, были учтены поправки на межчастичное взаимодействие в *e*-*h*-плазме [10]. В области $\tau_d > 1$ нс, когда $\nu < 1$, эти поправки не учитывались из-за их пренебрежимой малости [10, 17]. На рис. 6 изображена подгонка отклонения $E_{0-0} - E^*$ во время разогрева спинов Мп для накачек $P \ge 1$ мкДж/см². При нагревании спиновой системы, $\tau_d \le 1.5$ нс, отклонение от равновесия в пределах ошибки эксперимента можно описать линейной зависимостью от времени: $E_{0-0} - E^* \propto vt$. Скорость нагрева v уменьшается с мощностью возбуждения и составляет 3.7, 1.9 и 1.1 мэВ/нс соответственно для P = 3, 2 и 1 мкДж/см². Окончание нагрева примерно совпадает по времени с переходом от плазменного к экситонному режиму существования носителей.

Существуют два возможных механизма нагрева Mn-подсистемы в субнаносекундном масштабе времени. Это, во-первых, спин-спиновое *spd*-взаимодействие между носителями и Mn, во-вторых, электрон-фононное взаимодействие при условии, что возбуждающий импульс разогревает решетку до температуры порядка 100 K, когда время спин-решеточной релаксации уменьшается до наносекунд [6].

Для оценки влияния разогрева решетки на нагрев спинов Mn мы провели измерения на образце, в котором, кроме квантовой ямы шириной $L_z = 10$ нм присутствовала



Рис. 7. Спектры фотолюминесценции образца $Cd_{0.97}Mn_{0.03}$ Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te с квантовыми ямами шириной $L_z = 10$ нм и 6 нм при импульсном возбуждении (P = 2 мкДж/см² и $\tau_d = 0, 1$ нс) и при низком уровне оптического возбуждения (Ar⁺); B = 14 Tл, $T_{bath} = 4.2$ K

также частично «стравленная» квантовая яма с $L_z = 6$ нм. На рис. 7 приведены спектры фотолюминесценции такого образца при $T_{bath} = 4.2$ К, B = 14 Тл в условиях слабого стационарного (Ar⁺) и мощного импульсного (P = 2 мкДж/см²) возбуждений. При непрерывном возбуждении линия излучения экситона X из квантовой ямы шириной 6 нм примерно в 50 раз слабее, чем из квантовой ямы с $L_z = 10$ нм, и сдвинута в сторону высоких энергий за счет эффектов размерного квантования на $\simeq 30$ мэВ.

При импульсном возбуждении в момент времени $\tau_d = 0$ в квантовой яме с $L_z = 10$ нм заполнено несколько уровней Ландау, в то время как в квантовой яме с $L_z = 6$ нм заполняется только один уровень. Большее заполнение в первом случае связано как с более эффективным сбором фотовозбужденных носителей из объема образца в более широкую квантовую яму, так и с дополнительной поверхностной рекомбинацией в частично «стравленной» яме (см. вставку к рис. 7).

Расстояние между первой и второй ямами составляет всего 100 нм, что исключает возможность существования большой разницы температур решетки в этих ямах [18]. Тем не менее из рис. 7 ясно виден нагрев спинов Mn в квантовой яме с $L_z = 10$ нм при $\tau_d = 1$ нс, в то время как в квантовой яме с $L_z = 6$ нм нагрев отсутствует. Следовательно, различие в спиновых температурах Mn в этих ямах связано с разницей в концентрациях фотовозбужденных носителей.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что короткое время деполяризации спинов Mn в фотовозбужденной квантовой яме связано с прямым взаимодействием между фотовозбужденными носителями и магнитной подсистемой.

4.2. Спин-спиновый *sd*-обмен между Mn и *e*-*h*-плазмой. Обсуждение экспериментальных результатов

В предыдущем разделе было показано, что нагрев магнитной подсистемы квантовой ямы при импульсном оптическом возбуждении происходит в течение чрезвычайно короткого времени (~ 1 нс) и заканчивается, когда остается заполненным один уровень Ландау, что примерно совпадает с переходом от плазменного к экситонному режиму существования носителей.

На рис. 8 приведена зависимость амплитуды отклонения энергии E_x от своего равновесного значения, измеренной в максимуме первого импульса зондирования, $E_x(12.2 \text{ hc}) - E^*$, от максимального фактора заполнения уровней Ландау в зоне проводимости, $\nu_{max}^c = \nu(0)$. Величина $E_x(12.2 \text{ hc}) - E^*$ примерно линейно зависит от ν_{max}^c , демонстрируя отсечку $E_x = E^*$ на оси абсцисс вблизи фактора заполнения $\nu_{max}^c \simeq 1$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что нагрев магнитной подсистемы зависит от заполнения электронных состояний пороговым образом.

Наличие отсечки (рис. 8) показывает, что величина спинового нагрева Mn зависит не от полной концентрации носителей в квантовой яме, а определяется заполнением верхней спиновой подзоны электронов. На рис. 9 приведена схема спинового расщепления плотности состояний вблизи края запрещенной зоны в сильном магнитном поле. В условиях равновесия при 4 К спины Мп полностью поляризованы и ориентированы по магнитному полю (на рис. 9 показаны стрелкой направленной вверх). Края запрещенной зоны, отвечающие оптически разрешенным переходам в циркулярных поляризациях σ^+ и σ^- , образованы из параллельно ориентированных спинов электронов и дырок соответственно $e \uparrow$, $h \uparrow u e \downarrow$, $h \downarrow$. Суммарное спиновое расщепление зонных состояний $\Delta E^s \simeq 50$ мэВ делится пропорционально отношению обменных интегралов на $\Delta E_e^s \simeq 10$ мэВ в зоне проводимости и $\Delta E_h^s \simeq 40$ мэВ в валентной зоне [13]. Фермиевская энергия электронов, E_e^F , наоборот, больше энергии дырок вследствие меньшей эффективной массы электронов, $m_h/m_e > 2$ [19]. Из рис. 9 видно, что даже при максимально достижимых фермиевских энергиях ($\Delta E_e^s + \Delta E_h^s \sim 60$ мэВ, что отвечает $n_e \sim 2 \cdot 10^{12}$ см $^{-2}$) дырки всегда полностью поляризованы по спину. Электронный спинотщепленный подуровень $e\downarrow$, напротив, начинает заполняться уже при $E_e^F\simeq 10$ мэВ. Состояния $e \downarrow$ оптически неактивны из-за отсутствия дырок $h \downarrow$ и не проявляются в спектрах фотолюминесценции. В магнитном поле B = 14 Тл спиновое расщепление в зоне проводимости примерно совпадает по величине с циклотронным расщеплением между уровнями Ландау электронов, $\Delta E_e^s \sim \Delta_{01}^e$, что дает удобный качественный критерий начала заполнения спин-отщепленного электронного уровня $e\downarrow$, т.е. примерное равенство единице фактора заполнения $\nu = \nu^c$.

Отсутствие спинового нагрева Mn в диапазоне накачек с $\nu < 1$ (рис. 8) и окончание нагрева в момент $\nu \sim 1$ на зависимостях $E_{0-0}(t)$ (рис. 6) указывают на то, что спиновый разогрев Mn определяется заполнением верхней спиновой подзоны электронов и обусловлен спин-спиновым обменным *sd*-взаимодействием.

Наиболее вероятный механизм передачи энергии — обменное рассеяние электронов



Рис. 8. Амплитуда отклонения энергии E_x от своего равновесного значения E^* , измеренная в максимуме первого импульса зондирования, в зависимости от максимального фактора заполнения в зоне проводимости, $\nu_{max}^c = \nu(\tau_d = 0)$

Рис. 9. Схема спинового расщепления плотности состояний вблизи края запрещенной зоны в насыщающем магнитном поле. Изображена ситуация, отвечающая ширине спектра фотолюминесценции *e*-*h*-магнитоплазмы равной ~ 30 мэВ

из e \uparrow -подзоны в e \downarrow -подзону с одновременным переворотом спинов Mn, так называемое спин-флип-рассеяние.

В объемных полупроводниках скорость спиновой релаксации парамагнитной примеси в условиях контактного спин-спинового взаимодействия со свободными фермиевскими носителями, $1/\tau_e$, была рассчитана в [20] для спина 1/2 в условиях, когда можно пренебречь квантованием Ландау. В этой работе рассматриваются процессы резонансного рассеяния с переворотом спина зонных электронов. Полная энергия электронов и спинов Mn сохраняется, изменение энергии электрона равно $\mu_{Bgmn}B$. Квазиимпульс электронов не сохраняется из-за малого радиуса действия обменного потенциала. При достаточно высокой концентрации фермиевских электронов вероятность спин-флипрассеяния не зависит от величины спинового расщепления в зоне проводимости, ΔE_e^s .

Расчет скорости спин-флип-рассеяния для двумерных носителей и спина 5/2 в симметричной квантовой яме (см. Приложение) показал, что в двумерном случае скорость спиновой релаксации Mn пропорциональна квадрату константы взаимодействия, квадрату плотности состояний и электронной температуре, что качественно совпадает с результатом, полученным в [20] для объемных полупроводников. Однако численный коэффициент оказался в 20 раз большим из-за изменения спинового матричного элемента и размерного квантования движения электронов вдоль направления z. Кроме того, в квантовой яме скорость релаксации зависит от расстояния между Mn и гетерограницей из-за модуляции электронной плотности в направлении, перпендикулярном плоскости ямы.

В изучаемой структуре характерная скорость релаксации между спинами Mn имеет субнаносекундный масштаб (см. [15, 16] и обсуждение в п. 3.2). Эта скорость определяет характерное время установления локального равновесия в магнитной подсистеме. Поэтому для численной оценки воспользуемся выражением для средней по профилю квантовой ямы скорости спиновой релаксации (П.12) и пренебрежем модуляцией плотности состояний электронов *D*, связанной с квантованием Ландау. Величину *D* оценим как $D = n_e/E_e^F = 5 \cdot 10^{10} \text{ мэB}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$ ($n_e = n_{eh} = 1.7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$, $E_e^F = 40 \text{ мэB}$). Подставляя в (П.12) *D*, $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-23} \text{ зB} \cdot \text{см}^3$ ($N_0 \alpha = 0.22 \text{ зB}$ [13]) и $T_e = 200 \text{ K}$, получаем для максимальных накачек характерное время спиновой релаксации $\tau_e \simeq 4$ нс.

Как обсуждалось в п. 3.2, при максимальных накачках фотовозбужденные электроны имеют высокую температуру, $T_e \simeq 200$ К. Поэтому спиновая релаксация Mn на фотовозбужденных электронах будет представлять собой спиновый нагрев до температуры T_e теплового равновесия между спинами Mn и электронами с характерным временем τ_e . Описывается нагрев спинов Mn с помощью соотношения

$$\Delta E(t) = E(t) - E^* = \Delta E_{max} \left[1 - \exp(-t/\tau_e) \right], \tag{4}$$

где ΔE_{max} отвечает тепловому равновесию между Mn и электронами. Выбирая $\Delta E_{max} \simeq 20$ мэВ ($T_{Mn} \approx T_e \approx 200$ K) и разлагая формулу (4) по параметру t/τ_e , имеем в области малых t/τ_e скорость нагрева спинов Mn $v \approx \Delta E_{max}/\tau_e \simeq 5$ мэВ/нс, что неплохо согласуется со значением, полученным в нашем эксперименте (v = 3.7 мэВ/нс).

Заметим, что наши экспериментальные условия находятся за пределами применимости формулы (П.12). В магнитном поле 14 Тл в спектрах фотолюминесценции разрешаются уровни Ландау, что говорит о существенной модуляции энергетического спектра электронов. Поскольку плотность состояний входит в окончательную формулу в виде свертки (см. (П.9)), дискретизация плотности состояний должна приводить к увеличению $1/\tau_e$ в случае, когда спиновое расщепление кратно расщеплению уровней Ландау в зоне проводимости ($\Delta E_e^s = 0, \Delta_{01}^e, \dots, \Delta_{0i}^e$). Зависимость от однородной ширины Г уровней Ландау должна иметь приблизительный вид $1/\tau_e \propto \int D^2 dE \propto 1/\Gamma$. С другой стороны, следует ожидать, что матричный элемент спин-флип-рассеяния будет уменьшаться с увеличением разницы номеров уровней Ландау и, соответственно, с ростом ΔE_e^s . Таким образом, в квантующем магнитном поле скорость спиновой релаксации $1/\tau_e$ должна представлять собой убывающую осциллирующую функцию от ΔE_e^s с абсолютным максимумом при $\Delta E_e^s = 0$. Глубина осцилляций должна увеличиваться с уменьшением Г, приводя к полному подавлению резонансного спин-флип-рассеяния при определенных соотношениях между Г, Δ_{ij}^e и ΔE_e^s . В таких условиях главную роль начнут играть нерезонансные трехчастичные процессы спинового рассеяния электронов с участием фононов.

По-видимому, совпадение между экспериментальным значением скорости нагрева v и теорией (П. 12) связано со значительным однородным уширением линий в e-h-плазме и со взаимной компенсацией поправок к плотности состояний и значению матричного элемента спин-флип-рассеяния²).

²⁾ Окончательный вывод о прямом влиянии магнитного поля на скорость релаксации спинов ионов Mn на свободных электронах требует специального теоретического и экспериментального исследования. Главная экспериментальная трудность заключается в присутствии в спектрах фотолюминесценции изучаемой квантовой ямы при низком уровне возбуждения линии D_0X -комплекса, что затрудняет идентификацию линий в магнитных полях 4–10 Тл. Дальнейший прогресс здесь, по-видимому, невозможен без существенного улучшения качества исследуемых структур.



Рис. 10. Схематическое представление возникновения пространственного расслоения в Мп-подсистеме в результате спин-флип-рассеяния электронов проводимости. Изображена ситуация исходно полностью поляризованной Мп-подсистемы, показаны две электронные подзоны (*e*↑, *e*↓), расщепленные в результате обменного *sd*-взаимодействия. Электроны показаны только в верхней *e*↓ подзоне. В начальный момент (*a*) магнитная и электронная подсистемы пространственно-однородны. В результате часть ионов Mn изменяет свое спиновое состояние (*b*), спиновое расщепление электронов в нагретых областях уменьшается. В этих областях вероятность спин-флипрелаксации возрастает. В дальнейшем спин-флип-релаксация идет в основном в уже нагретых пространственных областях. Когда все электроны оказались в нижней *e*↑ подзоне (*a*), происходит диффузия электронов из горячих областей в холодные под действием градиента обменного потенциала, создаваемом спинами Mn

Как только что упоминалось, в квантующем магнитном поле B = 14 Тл скорость спиновой релаксации Mn должна уменьшаться с ростом ΔE_e^s . Повышение спиновой температуры Mn ведет к уменьшению расщепления в зоне проводимости, что в свою очередь реализует положительную обратную связь и приводит к появлению пространственных неоднородностей в магнитной подсистеме квантовой ямы. Рис. 10 схематически иллюстрирует этот процесс. В начальный момент магнитная и электронная подсистемы пространственно-однородны (рис. 10*a*), а вероятность W спин-флип-рассеяния не зависит от пространственных переменных. В результате часть ионов Mn изменяет свое спиновое состояние (рис. 10*b*). При фиксированном магнитном поле значение W в нагретых областях выше за счет уменьшения спинового электронного расщепления ΔE_e^s . Таким образом, естественно ожидать, что нагрев спинов Mn будет идти неоднородно и сопровождаться расслоением магнитной подсистемы квантовой ямы на горячие и холодные области.

Большие спиновые неоднородности должны приводить к дополнительному неоднородному уширению линии X. Из рис. 2 видно, что такое уширение действительно имеет место в области временных задержек $\tau_d = 10-100$ нс. С другой стороны, появление неоднородностей в магнитной подсистеме должно привести к особенностям релаксации фотовозбужденных экситонов. Эти особенности обсуждаются подробно в следующем разделе.

5. СПИНОВЫЕ ДОМЕНЫ В МАГНИТНОЙ ПОДСИСТЕМЕ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ЭКСИТОНОВ В СЛУЧАЙНОМ ОБМЕННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Поведение экситонной подсистемы во время затухания фотолюминесценции после возбуждающего импульса сильно зависит от интенсивности импульса. Это видно из рис. 5, на котором приведены спектры, записанные во время затухания фотолюминесценции при двух значениях оптической накачки ($P = 3 \text{ и } 0.3 \text{ мкДж/см}^2$), но сдвинутые друг относительно друга по времени на $\simeq 1$ нс. Как обсуждалось выше, время задержки было выбрано таким образом, чтобы концентрации носителей в обоих случаях были одинаковы.

При увеличении времени задержки до $\tau_d = 2-10$ нс смещение линии X в область малых энергий составляет $\simeq 1$ мэВ в случае малой накачки P = 0.3 мкДж/см². Следовательно, когда $T_{\rm Mn}$ близка к температуре бани, релаксация энергии экситонов за счет случайного потенциала мала (≤ 1 мэВ). В случае же накачки P = 3 мкДж/см², когда $T_{\rm Mn}$ достигает 25 K, линия X быстро смещается в сторону низких энергий на величину $\simeq 4$ мэВ. Такое смещение указывает на быструю (в наносекундном масштабе времени) релаксацию спинов Мп и не согласуется со временем спин-решеточной релаксации 270 нс, измеренной на импульсах зондирования (см. разд. 3). Наблюдаемый сдвиг не может быть связан и с образованием магнитного полярона, так как концентрация Mn в образце слишком мала³.

Для описания эволюции энергетических особенностей в спектрах фотолюминесценции во всем временном интервале удобно ввести понятие энергии края зоны \tilde{E} . Определим $\tilde{E} = E_{0-0}$ во время жизни e-h-плазмы и $\tilde{E} = E_x$ в экситонном режиме. Поскольку $E_{0-0} = E_x$ при факторах заполнения уровней Ландау $\nu \le 1$ и $E_{0-0} \le E_x$ при $\nu > 1$ [10,17], из величины \tilde{E} можно непосредственно определить спин Mn $\langle S_z \rangle$ с помощью соотношения (1), (2) во всем диапазоне концентраций n_{eh} при учете перенормировки E_{0-0} за счет межчастичного взаимодействия в e-h-плазме.

Энергия \tilde{E} изображена на рис. 6 в зависимости от времени задержки для P = 3, 2, 1 и 0.3 мкДж/см² (магнитное поле B = 14 Тл, $T_{bath} = 4.2$ К). Обсудим вначале случай максимальной накачки P = 3 мкДж/см². Штриховой линией на рис. 6 приведена зависимость концентрации n_{eh} двумерных электронов и дырок для P = 3 мкДж/см². При больших плотностях величина n_{eh} была найдена из числа заполненных уровней Ландау [14]. В области $\nu < 1$ плотность носителей n_{eh} считалась пропорциональной интегральной интенсивности линии X в спектрах фотолюминесценции. Время жизни носителей в данной квантовой яме лежит в пределах временного разрешения системы, которое составляло 300 пс. При этом полуширина кривой $n_{eh}(t)$ равняется $\simeq 1$ нс. Отсюда следует, что сбор носителей из барьеров в квантовой яме оказывается существенным в течение довольно большого времени, $\simeq 1$ нс.

В диапазоне задержек $\tau_d = 2-10$ нс, когда e-h-система находится в экситонном режиме, происходит релаксация спиновой системы Mn к равновесию. Концентрация

³⁾ В аналогичных нелегированных гетероструктурах $Cd_{1-x}Mn_x$ Те магнитный полярон был ранее обнаружен [21, 22] только при $x \ge 0.1$. Для дополнительной проверки наличия магнитного полярона в изучаемой структуре нами была исследована временная эволюция линии излучения экситонного комплекса в нулевом магнитном поле. Мы не обнаружили заметных сдвигов линии излучения, которые могли бы указывать на формирование магнитного полярона в нашей квантовой яме.

носителей при этом падает на несколько порядков. Экспоненциальная подгонка процесса остывания спинов Mn изображена на рис. 6 сплошными линиями. Экспонента удовлетворительно описывает экспериментальные точки. Характерное время спиновой релаксации во время затухания фотолюминесценции, τ_{loe} , оказалось равным 4 ± 1 нс. Как мы покажем далее, это время не отражает наличия реального быстрого процесса релаксации в системе спинов Mn, а связано с особенностями релаксации экситонов и объясняется в рамках модели экситонной диффузии, рассмотренной ниже.

Измерения при $\tau_d < 10$ нс проводятся во время затухания люминесценции без дополнительного фотовозбуждения. При этом измеряется локальное значение спина Mn $\langle S_z \rangle_x$, усредненное по объему экситона. Локальность здесь понимается в том смысле, что длительное время экситон может мигрировать по кристаллу, релаксировать по энергии как в кристаллическом, так и в обменном случайном потенциалах, образовать магнитный полярон и т.д. Поэтому измеренное значение $\langle S_z \rangle_x$, вообще говоря, отличается от среднего по объему квантовой ямы $\langle S_z \rangle_V$. На рис. 6 приведены также значения энергии экситонных переходов, определенные при дополнительном фотовозбуждении в максимуме первого импульса зондирования ($\tau_d = 12.2$ нс). Из рисунка следует, что при более коротких задержках ($\tau_d = 3-10$ нс) величина $\langle S_z \rangle_x$ оказывается больше, чем $\langle S_z \rangle_V$, измеренная при более длинных задержках ($\tau_d = 12.2$ нс). Очевидно, что такое поведение невозможно в однородной спиновой системе. Различие значений одной величины $\langle S_z \rangle_x$, полученной разными методами, однозначно свидетельствует о наличии в магнитной подсистеме квантовой ямы микроскопических спиновых неоднородностей — спиновых доменов.

При уменьшении плотности мощности вплоть до $P = 1 \text{ мкДж/см}^2$ качественное поведение зависимости $\tilde{E}(t)$ не изменяется. Она демонстрирует поведение типа «нагревостывание» до температуры, близкой к T_{bath} , при регистрации во время затухания фотолюминесценции ($\tau_d < 6$ нс). Максимум спиновой температуры задержан по времени относительно максимума концентрации двумерных носителей. Время релаксации спинов Mn для P = 2 и 1 мкДж/см² при $\tau_d = 1-6$ нс хорошо описывается экспоненциальной зависимостью с характерными временами $\tau_{loc} = 2.7$ и 2.3 нс. В максимуме зондирующего импульса ($\tau_d = 12.2$ нс), линия X находится заметно выше по энергии, чем при $\tau_d = 4-6$ нс.

При дальнейшем понижении оптической накачки поведение E(t) изменяется качественно. Начиная с P = 0.3 мкДж/см², форма зависимости повторяет зависимость $n_{eh}(t)$, так что максимальный сдвиг энергии теперь находится в области $\tau_d \simeq 0$ нс. При дальнейшем понижении оптической накачки, когда e-h-система попадает в экситонный режим, форма зависимости $\tilde{E}(t)$ не изменяется, а максимум отклонения $\tilde{E} - E^*$ стремится к нулю. Этот переход сопровождается прекращением нагрева спиновой Mn-подсистемы в среднем. Начиная с P = 0.3 мкДж/см², отклонение энергии E_x от своего равновесного значения, измеренное на первом импульсе зондирования, равно нулю. Подчеркнем, что лазерный импульс довольно большой интенсивности, обеспечивающий заполнение $\tilde{E}(0) - E^*$ в нулевой момент времени на величину $\simeq 1$ мэВ при P = 0.3 мкДж/см² связано с заполнение локализованных состояний нулевого уровня Ландау и эффективным сдвигом максимума линии фотолюминесценции в область максимальной плотности состояний.

Мы связываем короткое время (наносекунды) спиновой релаксации Mn с диффузией экситонов в сильнонеоднородном обменном потенциале. Схематически процесс



Рис. 11. Спектры фотолюминесценции квантовой ямы $Cd_{0.97}Mn_{0.03}Te/Cd_{0.75}Mg_{0.25}Te$ ($L_z = 10$ нм), записанные в различные моменты времени τ_d при $T_{bath} = 4.2$ K, P = 3 мкДж/см² в магнитном поле B = 2 Тл. Приведены также спектры при низкой концентрации носителей в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 2 Тл. На вставке показана зависимость энергии E_x от времени в магнитном поле 2 Тл, которая определялась по положению линии D_0X -комплекса при задержках $\tau_d = 1-6$ нс. Величина энергии связи D_0X -комплекса ($\simeq 4$ мэВ) была определена из спектров фотолюминесценции при непрерывном возбуждении в поле 2 Тл. На вставке штрихо-

вой горизонтальной линией показано положение линии Х при непрерывном возбуждении

диффузии изображен на рис. 10*в*. Уменьшение времени τ_{loc} при понижении оптической накачки свидетельствует об увеличении градиента обменного потенциала, т. е. об относительном уменьшении пространственных размеров спиновых доменов по сравнению с их амплитудой (разницей значений $\langle S_z \rangle$ внутри домена и вне его). Отсюда следует и обратное утверждение. В процессе своей временной эволюции спиновый домен вначале увеличивают свою амплитуду, а лишь затем начинают увеличивать свои линейные размеры.

Для наблюдения подавления экситонной диффузии нами был проведен эксперимент в малых магнитных полях, когда экситоны связываются на примесях и диффузия экситонов затруднена или вовсе отсутствует. Кроме того, в малых магнитных полях нагрев спинов Mn также должен идти более однородно (см. дискуссию в п. 4.2), что должно приводить к уменьшению амплитуды спиновых доменов и также замедлять экситонную диффузию.

На рис. 11 приведены спектры фотолюминесценции квантовой ямы Сd_{0.97} Mn_{0.03} Te, записанные в различные моменты времени τ_d при T_{bath} = 4.2 K, P = 3 мкДж/см² в магнитном поле B = 2 Тл. На этом же рисунке приведены спектры при низкой концентрации носителей в условиях непрерывного возбуждения для B = 0 и 2 Тл. Качественно изменения спектров фотолюминесценции со временем аналогичны приведенным на рис. 4 и 5. В магнитном поле 2 Тл во временном интервале $\tau_d = 0$ -1.3 нс в спектрах, так же как и в поле 14 Тл, доминирует излучение e-h-плазмы. С увеличением задержки до 1.5-2 нс, когда концентрация носителей уменьшается, линия излучения плавно переходит в линию рекомбинации экситонов, связанных на нейтральных донорах (см. обсуждение в п. 3.1 и [12]). Линия экситонной рекомбинации Х должна была бы находиться на ~ 4 мэВ выше по энергии. На вставке к рис. 11 показана зависимость энергии E_x от времени в магнитном поле 2 Тл. Величина E_x определялась из энергии перехода D_0X -комплекса, при этом энергия связи D_0X -комплекса ($\simeq 4$ мэВ) была определена как расстояние между линиями излучения X и D_0X непосредственно из спектров фотолюминесценции при непрерывном возбуждении в поле 2 Тл [12]. В диапазоне $\tau_d = 1.5-6$ нс величина E_x слабо зависит от времени (ср. с рис. 6). Время спиновой релаксации τ_{loc} примерно равно 15 нс. Увеличение времени τ_{loc} с 4 до 15 нс при уменьшении магнитного поля от 14 до 2 Тл отражает процесс прекращения диффузии экситонов в слабом магнитном поле и связано, с одной стороны, с уменьшением амплитуды спиновых доменов, а с другой стороны, отражает локализацию экситонов на нейтральных донорах. Разделение этих двух вкладов в экситонную диффузию требует дополнительных экспериментов для независимого определения амплитуды спиновых доменов в зависимости от магнитного поля (см. сноску 2).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенного исследования следует, что при мощном импульсном возбуждении квантовой ямы с магнитными примесями главный вклад в спиновый нагрев Mn вносят свободные носители, обеспечивая образование спиновых доменов в сильном магнитом поле. В качестве заключения схематически опишем временную эволюцию событий, происходящих в квантовой яме.

На первом этапе ($\tau_d = 0-1$ нс) в квантовой яме существует плотная двумерная *e*-*h*-магнитоплазма (рис. 10*a*). При этом электроны из спин-отщепленной подзоны за счет процессов спин-флип-рассеяния нагревают спиновую подсистему Mn. Нагрев происходит пространственно-неоднородно (рис. 10*a*, *б*). Связано это с наличием положительной обратной связи в виде увеличения интенсивности спин-флип-рассеяния при уменьшении величины спинового расщепления в зоне проводимости. Во время первого этапа в магнитной подсистеме квантовой ямы происходит пространственное расслоение на области с низкой и высокой спиновыми температурами Mn — образуются спиновые домены. О наличии спиновых неоднородностей свидетельствует заметное уширение линии X при измерениях на импульсах зондирования с временными задержками до $\tau_d \simeq 100$ нс.

1460

На втором этапе ($\tau_d \ge 1$ нс) плазменный режим существования носителей закончился, электроны и дырки присутствуют в квантовой яме в виде экситонов, а их концентрация непрерывно уменьшается в результате процессов рекомбинации. Этот этап характерен диффузией экситонов под действием градиента обменного поля из горячих в холодные области (рис. 10*6*). Диффузия экситонов проявляется в виде различия между значением локального спина $\langle S_z \rangle_x$, измеренного во время затухания фотолюминесценции, и среднего по квантовой яме спина Mn, $\langle S_z \rangle_V$, полученного с использованием импульсов зондирования (рис. 2 и 3). В эксперименте наблюдается, как $\langle S_z \rangle_x$ отлоняется от $\langle S_z \rangle_V$ в большую сторону ($\tau_d = 3-10$ нс), соответствующую меньшей спиновой температуре и более упорядоченному спиновому состоянию Mn. Сам факт отклонения локального значения спина Mn от среднего есть прямое доказательство существования микроскопических спиновых неоднородностей в магнитной подсистеме квантовой ямы.

Во время второго этапа также происходит установление локального равновесия в магнитной подсистеме за счет спин-спинового взаимодействия и релаксация спинов Мп к равновесию за счет взаимодействия с акустическими фононами.

Авторы благодарят В. Б. Тимофеева и С. И. Губарева за плодотворные дискуссии. Работа была выполнена при финансовой поддержке фонда Фольксваген (Германия), Российской программы «Наноструктуры» и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-17697). Один из авторов (Д. Р. Я.) благодарен Deutsche Forschugsgemeinschaft (SFB 410) за финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Спиновая релаксация Мп на фермиевских квазидвумерных свободных электронах

Вычисление скорости спиновой релаксации на трехмерных фермиевских электронах было выполнено Абрагамом [20] для спина 1/2 и малых магнитных полей. Проведем аналогичные вычисления для квазидвумерных носителей. Предположим, что в электронной подсистеме существует тепловое равновесие между спиновыми подзонами. Магнитное поле будем считать достаточно малым, чтобы можно было пренебречь квантованием Ландау орбитального движения электронов.

Пусть магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости квантовой ямы вдоль оси z. Яма занимает интервал от 0 до L_z , а атом Mn расположен на расстоянии a от гетерограницы. Предположим для простоты, что квантовая яма имеет бесконечно высокие стенки. Учет конечной величины барьеров приводит к несущественным поправкам, которыми в нашем случае можно пренебречь.

Гамильтониан обменного sd-взаимодействия между спинами зонных электронов и спином Mn имеет вид [1]

$$H = \alpha \vec{\sigma} \vec{S} \delta(\mathbf{r}) = \alpha \delta(\mathbf{r}) \left[\sigma_z S_z + \frac{1}{2} \left(\sigma_+ S_- + \sigma_- S_+ \right) \right]. \tag{\Pi.1}$$

Здесь α — обменный интеграл для электронов проводимости, а спиновые операторы \vec{S} и $\vec{\sigma}$ действуют на спины соответственно Mn и электрона. Данные обозначения совпадают с обозначениями уравнений (1), (2).

Изменение спинового состояния Mn происходит в результате переходов электронов из одной спиновой подзоны в другую с одновременным изменением на единицу проекции спина магнитной примеси. Элементарная вероятность такого перехода дается выражением [23]

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle i | H | j \rangle \right|^2 \delta(E_i - E_j). \tag{\Pi.2}$$

Рассмотрим ситуацию, когда магнитное поле достаточно велико и в начальном состоянии Мп имеет проекцию спина $S_z = 5/2$ на направление магнитного поля. Гамильтониан (П.1) будет обеспечивать переходы из состояния 5/2 в состояние 3/2. Будем рассматривать электроны из первой размерно-квантованной подзоны. Тогда волновые функции начальных и конечных состояний системы имеют вид

$$|i\rangle = \sqrt{2} \frac{\sin(\pi a/L_z)}{\sqrt{L_z}} |\mathbf{k}\rangle \left|\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad (\Pi.3)$$

$$|j\rangle = \sqrt{2} \frac{\sin(\pi a/L_z)}{\sqrt{L_z}} |\mathbf{k}'\rangle \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{\Pi.4}$$

Здесь k и k' — волновые векторы в плоскости квантовой ямы блоховских электронных волновых функций в начальном и конечном состояниях:

$$|\mathbf{k}\rangle = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{L_x L_y}}.$$
 (II.5)

Пренебрегая зеемановской энергией спина Мп в магнитном поле,

$$E_{i} - E_{j} = E_{k} - E_{k'} + \mu_{B} g_{Mn} B \approx E_{k} - E_{k'}, \qquad (\Pi.6)$$

и вычисляя спиновый матричный элемент

$$\left|\left\langle \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \sigma_{-} S_{+} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right|^{2} = \frac{5}{4}, \qquad (\Pi.7)$$

имеем для элементарной вероятности переворота спина Mn

$$w = \frac{10\pi}{\hbar} \alpha^2 \frac{\sin^4(\pi a/L_z)}{L_z^2} \left| \langle \mathbf{k} | \,\delta(\mathbf{r}) \, | \mathbf{k}' \rangle \right|^2 \delta(E_k - E_{k'}). \tag{\Pi.8}$$

Полная вероятность W получается в результате интегрирования элементарной вероятности w по всем начальным заполненным и конечным пустым состояниям зонных электронов:

$$W = \int_{0}^{\infty} w N(E) N(E') f(E) \left[1 - f(E') \right] dE$$
(Π.9)

(здесь и далее $E = E_k$, $E' = E_{k'}$). Интегрирование ведется по спиновой подзоне $\sigma_z = -1/2$, $f(E) = \{\exp\left[(E - E_e^F)/kT_e\right] + 1\}^{-1}$ — функция Ферми, T_e — электронная температура, а N(E) — полное количество состояний с данной энергией в одной спиновой подзоне. Поскольку плотность состояний двумерных носителей не зависит

от энергии, $D(E) = N(E)/\sqrt{L_x L_y} = D$, ее можно вынести из под знака интеграла. В результате получаем

$$W = \frac{10\pi}{\hbar} \sin^4 \left(\frac{\pi}{L_z}a\right) \alpha^2 \left(\frac{D}{L_z}\right)^2 \int_0^\infty f(E) \left[1 - f(E')\right] dE =$$
$$= \frac{10\pi}{\hbar} \sin^4 \left(\frac{\pi}{L_z}a\right) \alpha^2 \left(\frac{D}{L_z}\right)^2 \frac{kT_e}{\exp(-E_e^F/kT_e) + 1}.$$
(II.10)

Для вырожденных систем, как правило, можно пренебречь экспонентой по сравнению с единицей. В этом случае скорость спиновой релаксации Mn $1/\tau_e = 2W$ [20] описывается выражением

$$\frac{1}{\tau_e} = 2W \approx \frac{20\pi}{\hbar} \sin^4 \left(\frac{\pi}{L_z}a\right) \alpha^2 \left(\frac{D}{L_z}\right)^2 kT_e. \tag{\Pi.11}$$

Обычно в эксперименте проявляется усредненная по направлению z величина $1/\tau_e$. Из (П.11) следует

$$\left\langle \frac{1}{\tau_e} \right\rangle_z = \frac{15\pi}{2\hbar} \, \alpha^2 \left(\frac{D}{L_z} \right)^2 k T_e$$
 (П.12)

для средней по профилю квантовой скорости спиновой релаксации.

Литература

- 1. J. K. Furdyna, J. Apl. Phys. 64, R29 (1988).
- 2. P. A. Wolf, in *Semiconductors and Semimetals*, ed. by J. K. Furdyna and J. Kossut, Academic Press, London (1988), Vol. 25, p. 439.
- 3. Y. Shapira, S. Foner, D. H. Rigley et al., Phys. Rev. B 30, 4021 (1984).
- 4. I. Lambe and C. Kikuchi, Rhys. Rev. 119, 1256 (1960).
- 5. T. Strutz, A. M. Witowski, and P. Wyder, Phys. Rev. Lett. 68, 3912 (1992).
- 6. D. Scalbert, J. Cernogora, and C. Benoit a la Guillaume, Sol. St. Commun. 66, 571 (1988).
- 7. Ю. Г. Семенов, ЖЭТФ 81, 1498 (1981).
- 8. W. Farah, D. Scalbert, and M. Nawrocki, Phys. Rev. B 53, R10461 (1996).
- 9. M. Tyazhlov, M. V. Lebedev, V. D. Kulakovskii, et al., Phys. Stat. Solidi (b) 188, 565 (1995).
- 10. V. D. Kulakovskii, M. G. Tyazhlov, A. F. Dite, et al., Rhys. Rev. B 54, 4981 (1996).
- 11. V. D. Kulakovskii, M. G. Tyazhlov, A. I. Filin et al., Phys. Rev. B 54, R8333 (1996).
- 12. S. I. Gubarev, V. D. Kulakovskii, M. G. Tyazhlov, et al., Ann. de Phys. 20, C2-137 (1995).
- 13. J. A. Gaj, R. Planel, and G. Fishman, Sol. St. Comm. 29, 435 (1979).
- 14. V. D. Kulakovskii, E. Lach, A. Forchel, et al., Phys. Rev. B 40, 8087 (1989).
- 15. H. A. Sayad and S. Bhagat, Phys. Rev. B 31, 591 (1985).
- 16. R. E. Kremer and J. K. Furdyna, Phys. Rev. B 32, 5591 (1985).
- 17. Yu. A. Bychkov and E. I. Rashba, Phys. Rev. B 44, 6212 (1991).
- 18. Д. В. Казаковцев, И. Б. Левинсон, ЖЭТФ 88, 2228 (1985).
- 19. L. C. Andreani, A. Pasquarello, and F. Bassani, Phys. Rev. B 36, 5887 (1987).
- 20. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИИЛ, Москва (1963), с. 334.
- 21. G. Mackh, W. Ossau, D. R. Yakovlev et al., Phys. Rev. B 49, 10248 (1994).
- 22. D. R. Yakovlev and K. V. Kavokin, Comments Cond. Mat. Phys. 18, 51 (1994).
- 23. Л. Д. Ландау, Е. М.Лифшиц, Квантовая механика, Наука, Москва (1989), с. 190.