ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 4(10), стр. 1332–1339 ©*1997*

МЕТОД ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*А. Б. Петрин**

Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 1997 г.

Представлен метод интегро-дифференциального уравнения, описывающий движение несжимаемой вязкой жидкости. Метод использует аналогию уравнений гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости и уравнений магнитостатики. В качестве конкретного приложения рассматривается задача внешнего обтекания твердого тела несжимаемой вязкой жидкостью. Полученное решение автоматически удовлетворяет граничным условиям на поверхности тела и на бесконечности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известное в настоящее время описание движения несжимаемой вязкой жидкости представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно поля скоростей и поля вихрей [1–3]. В работе [3] отмечена аналогия некоторых дифференциальных уравнений гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости и дифференциальных уравнений магнитостатики. Однако развития эта аналогия не получила.

В настоящей работе данная аналогия развивается, уточняется и используется для решения задач гидродинамики.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Движение жидкости описывается уравнением Навье–Стокса, которое можно представить в виде [3]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi + \frac{\mathbf{f}_v}{\rho}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}$ — поле скоростей, p — скалярное поле давления, ρ — плотность жидкости, φ — потенциал внешних консервативных сил, отнесенный к единице массы, $\mathbf{f}_v$ — силы вязкости, действующие на единицу объема жидкости.

Если жидкость несжимаема, то ее плотность постоянна и поле скоростей должно удовлетворять уравнению сохранения объема:

$$(\nabla\mathbf{v}) = 0.$$

*E-mail: bit@termo.msk.su

Тогда выражение для силы вязкости примет вид $\mathbf{f}_v = \eta\nabla^2\mathbf{v}$, где η — первый коэффициент вязкости.

Поэтому уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости упрощается и может быть представлено уравнением [2]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{v}. \tag{2}$$

Вводя векторное поле вихрей $\mathbf{\Omega} = [\nabla\mathbf{v}]$ и учитывая векторное тождество

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = [[\nabla\mathbf{v}]\mathbf{v}] + \frac{1}{2}\nabla(v^2),$$

перепишем предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{v}] = -\frac{1}{2}\nabla(v^2) - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{v}.$$

Взяв ротор от этого уравнения, получим

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{\Omega}\mathbf{v}]] = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{\Omega}. \tag{3}$$

Пусть D — характерный размер задачи, V — характерная скорость. Перейдем к безразмерным переменным, сделав замену

$$x = x'D, \quad y = y'D, \quad z = z'D, \quad t = t'(D/V). \tag{4}$$

Тогда получим уравнение для безразмерных полей:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}'}{\partial t'} + \left[\nabla'[\mathbf{\Omega}'\mathbf{v}']\right] = \frac{1}{R}\nabla'^2\mathbf{\Omega}',$$

где $R = \rho VD/\eta$ — число Рейнольдса для данной задачи.

Будем для определенности рассматривать задачу внешнего обтекания твердого тела несжимаемой жидкостью. Кроме того, рассмотрим задачу в безразмерных переменных. Тогда, опуская в дальнейшем штрихи, получим систему из трех уравнений:

$$(\nabla\mathbf{v}) = 0, \tag{5}$$

$$[\nabla\mathbf{v}] = \mathbf{\Omega}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{\Omega}\mathbf{v}]] = \frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{\Omega} \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{на поверхности тела,} \tag{8}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e} \quad \text{вдали от тела} \tag{9}$$

($\mathbf{e}$ — единичный вектор, определяющий направление скорости вдали от тела).

Пусть поле вихрей $\mathbf{\Omega}$ известно во всем пространстве, тогда из уравнений (5) и (6) можно найти скорость во всем пространстве. Действительно, уравнения (5) и (6) аналогичны уравнениям магнитостатики, которые определяют магнитное поле $\mathbf{B}$ по плотности тока $\mathbf{j}$:

$$(\nabla \mathbf{B}) = 0,$$

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Решение уравнений магнитостатики при заданных токах определяется законом Био–Савара–Лапласа по формуле

$$\mathbf{B}(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\mathbf{j}(2)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2,$$

где интегрирование проводится по всем точкам объема V, в которых существуют токи; символом 1 обозначены координаты точки, в которой определяется поле $\mathbf{B}$; символом 2 обозначены координаты точек, по которым производится интегрирование; $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный из точки интегрирования 2 в точку 1, причем его длина равна

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

Если в уравнениях магнитостатики сделать замену $\mathbf{B}$ на $\mathbf{v}$ и $\mu_0 \mathbf{j}$ на $\mathbf{\Omega}$, то получатся уравнения (5) и (6). Поэтому решением этих уравнений при заданном поле вихрей $\mathbf{\Omega}$ является выражение

$$\mathbf{v}(1,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\mathbf{\Omega}(2,t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2.$$

Так как поле вихрей заметно отлично от нуля только вблизи тела, данное решение стремится к нулю при удалении от него.

Следует отметить, что уравнения (5) и (6) представляют собой линейную систему уравнений, поэтому ее решением также является поле скоростей, определяемое выражением

$$\mathbf{v}(1,t) = \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\mathbf{\Omega}(2,t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2. \tag{10}$$

Поле скоростей, вычисленное по формуле (10), не только удовлетворяет уравнениям (5) и (6), но и граничному условию (9) вдали от тела.

Таким образом, если известно распределение поля вихрей в некоторый момент времени, то в следующий близкий момент времени это поле может быть найдено из интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}(1,t)}{\partial t} + \left[\nabla \left[\mathbf{\Omega}(1,t), \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\mathbf{\Omega}(2,t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2\right]\right] = \frac{1}{R}\nabla^2 \mathbf{\Omega}(1,t), \tag{11}$$

где оператор набла действует на координаты, помеченные индексом 1.

Однако проблема состоит в том, что интегрирование в (11) проводится по всему пространству, а если положить поле вихрей внутри тела равным нулю, то найденное из уравнения (11) распределение поля вихрей автоматически не будет удовлетворять граничному условию на поверхности обтекаемого жидкостью тела.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Чтобы удовлетворить указанному граничному условию необходимо либо сформулировать задачу во всем пространстве, либо определить граничные условия для поля вихрей.

Для того чтобы автоматически учитывать граничные условия на поверхности тела будем считать, что тело состоит из окружающей несжимаемой жидкости, на которую внутри объема обтекаемого тела действует внешняя, достаточно большая по величине, эффективная объемная сила трения $\mathbf{f}_{fr} = -\gamma(\mathbf{r})\mathbf{v}$. Коэффициент $\gamma(\mathbf{r})$ учитывает пространственное распределение этой силы. Его можно представить в виде $\gamma(\mathbf{r}) = kw(\mathbf{r})$, где k определяет модуль силы, а функцию $w(\mathbf{r})$ положим равной нулю снаружи обтекаемого тела, равной единице внутри него и непрерывно-дифференцируемой в окрестности границы тела. Если коэффициент k будет достаточно велик, то скорость жидкости внутри тела будет пренебрежимо мала. При этом можно будет считать, что в пределе при k стремящемся к бесконечности скорость жидкости в окрестности поверхности и внутри объема, занимаемого телом, будет равна нулю и граничные условия на поверхности тела будут автоматически выполняться. Физически ясно, что набегающий поток жидкости будет обтекать такую заторможенную, практически остановленную жидкость так же, как если бы это было твердое тело.

С учетом введенной силы трения уравнение (1) может быть записано для всего пространства в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi + \frac{\mathbf{f}_v}{\rho} - \frac{k}{\rho}\, w(\mathbf{r})\mathbf{v}. \tag{12}$$

Как и ранее, возьмем ротор от уравнения (12) и введем поле вихрей, тогда получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{\Omega}\mathbf{v}]] = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{\Omega} - \frac{k}{\rho}\,[\nabla, w(\mathbf{r})\mathbf{v}]\,. \tag{13}$$

Как и в разд. 2, перейдем по формулам (4) к безразмерным штрихованным переменным. Тогда получим уравнение, аналогичное (7):

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}'}{\partial t'} + \left[\nabla'[\mathbf{\Omega}'\mathbf{v}']\right] = \frac{1}{R}\nabla'^2\mathbf{\Omega}' = K\left[\nabla', w(\mathbf{r}')\mathbf{v}'\right], \tag{14}$$

где $K = kD/\rho V$, а $R = \rho VD/\eta$, как и прежде, — число Рейнольдса для данной задачи.

Опуская штрихи, получим окончательно систему уравнений:

$$(\nabla\mathbf{v}) = 0, \tag{15}$$

$$[\nabla\mathbf{v}] = \mathbf{\Omega}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{\Omega}\mathbf{v}]] = \frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{\Omega} - K\left([\nabla, w\mathbf{v}] + w\mathbf{\Omega}\right). \tag{17}$$

В круглых скобках уравнения (17) первое слагаемое отлично от нуля в окрестности границы обтекаемого тела, так как вблизи границы отлично от нуля векторное поле

∇w, причем оно направлено внутрь объема тела. Интеграл вдоль любой кривой, начинающейся вне тела и заканчивающейся внутри тела, от ∇w равен единице. Поэтому данное слагаемое определяется тангенциальной компонентой скорости на границе.

Второе слагаемое в круглых скобках уравнения (17) отлично от нуля только внутри тела, а снаружи оно равно нулю.

Решение уравнений (15) и (16), удовлетворяющее граничному условию на бесконечности, определяется, как и в разд. 2, формулой (10). Поэтому интегро-дифференциальное уравнение задачи примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}(1,t)}{\partial t} + \left[\nabla \left[\mathbf{\Omega}(1,t), \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\mathbf{\Omega}(2,t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2\right]\right] = $$

$$= \frac{1}{R}\nabla^2 \mathbf{\Omega}(1,t) - K\left(\left[\nabla w, \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\mathbf{\Omega}(2,t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^3}\, dV_2\right] + w\mathbf{\Omega}(1,t)\right). \tag{18}$$

Решение задачи (18) с учетом (10) при стремлении коэффициента K к бесконечности и при стремлении размера области изменения функции ∇w вблизи границы к нулю, будет стремиться к решению задачи (5)–(7) с граничными условиями (8), (9).

4. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу плоского обтекания цилиндра произвольного сечения. Направим ось z прямоугольной декартовой системы координат вдоль образующей цилиндра, тогда поле скоростей будет иметь составляющие только в направлениях осей x и y, а поле вихрей будет иметь лишь z-компоненту, которая будет функцией x и y. Тогда для этой компоненты поля вихрей уравнение (18) примет вид

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \frac{1}{R}\nabla^2\Omega_z - K\left([\nabla w, \mathbf{v}]_z + w\Omega_z\right), \tag{19}$$

где оператор набла действует только на координаты x и y (двумерный оператор), а поле скоростей вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}(x_1, y_1, t) = \mathbf{e} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{[\Omega_z(x_2, y_2, t)\mathbf{r}_{12}]}{r_{12}^2}\, dx_2 dy_2, \tag{20}$$

которая получается из (10) после интегрирования по координате z в бесконечных пределах, причем в (20) радиус-вектор двумерный (имеет только x и y компоненты), а интегрирование производится по всей плоскости xy.

Уравнение (19) с подстановкой в него (20) дает в пределе решение плоской задачи, т. е. распределение поля вихрей и поля скоростей в произвольный момент времени.

5. ПЛОСКОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Выберем в качестве конкретного примера плоской задачи задачу обтекания кругового цилиндра. Тогда, считая, что начало системы координат находится на оси симметрии цилиндра, выберем функцию $w(\mathbf{r})$ в виде

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{\delta}\left(r - \frac{D}{2}\right)\right) + 1}, \tag{21}$$

где D — диаметр цилиндра, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а δ примерно равно расстоянию от поверхности цилиндра, на котором функция практически равна единице внутри и нулю вне цилиндра (подобная функция определяет распределение Ферми–Дирака и свойства ее хорошо известны).

В безразмерных координатах функция (21) имеет вид

$$w(x, y) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}\right)\right) + 1}, \tag{22}$$

где $\sigma = \delta/D$ — доля диаметра, на которой происходит быстрое изменение функции.

Тогда градиент функции $w(\mathbf{r})$ определится формулой

$$\nabla w(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\exp\left(\frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\right)\right)}{\left(\exp\left(\frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\right)\right) + 1\right)^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{23}$$

Подставляя выражения (22), (23) в систему уравнений (19), (20), получим интегро-дифференциальное уравнение приближенной задачи двумерного обтекания цилиндра. Решив это уравнение и устремив коэффициент K к бесконечности, а коэффициент σ к нулю, получим строгое решение рассматриваемой задачи.

Зная распределение поля скоростей из решения уравнений (19) и (20), можно определить безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы кругового цилиндра. Действительно, сила, действующая на цилиндр со стороны жидкости, равна по модулю результирующей эффективной силе трения, которая была введена ранее. Если скорость жидкости на бесконечности направлена по оси x, то безразмерный коэффициент лобового сопротивления C_d и безразмерный коэффициент подъемной силы C_a выражаются через безразмерную скорость соответственно по формулам

$$C_d = \frac{F_d}{\rho V^2 DL/2} = 2K\int w(x, y) v_x(x, y)\, dx\, dy, \tag{24}$$

$$C_a = \frac{F_a}{\rho V^2 DL/2} = 2K\int w(x, y) v_y(x, y)\, dx\, dy, \tag{25}$$

где F_d — сила лобового сопротивления, F_a — подъемная сила, действующие на участок цилиндра длиной L. При стремлении коэффициента K к бесконечности и коэффициента σ к нулю получим коэффициенты, соответствующие строгому решению рассматриваемой задачи.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Было проведено численное моделирование задачи плоского обтекания кругового цилиндра (19), (20). Функция $w(\mathbf{r})$ и ее градиент выбирались в виде (22), (23) соответственно. Число Рейнольдса выбиралось равным $R = 400$.

Оказалось, что параметры σ и K функции $w(\mathbf{r})$, определяющие величину и пространственное распределение эффективной силы сопротивления, вообще говоря, влияют на численное решение. Это влияние сводится к тому, что эффективная сила сопротивления действует не только в объеме цилиндра, но и вне этого объема. Это приводит при вычислениях к несколько завышенному значению безразмерного коэффициента лобового сопротивления C_d по сравнению с его экспериментальным значением, так как дополнительно тормозятся слои жидкости вне объема цилиндра. Дополнительное торможение проявляет себя до расстояний порядка нескольких σ от цилиндрической поверхности, поэтому с уменьшением σ коэффициент C_d должен приближаться к своему точному значению.

Расчеты показали, что это действительно так. Вычисления проводились на равномерной сетке при $\sigma = 0.005$, $K = 40$ и $R = 400$. Коэффициент лобового сопротивления, полученный в расчетах, примерно равен $C_d = 1.8$. Значение C_d несколько менялось во времени (менее, чем на 0.1) из-за периодического отрыва от цилиндра вихрей и образования вихревой дорожки Кармана за цилиндром.

Когда σ было уменьшено вдвое при тех же параметрах K и R, коэффициент C_d уменьшился до значения ≈ 1.4. В то же время значение C_d, известное из экспериментальных исследований обтекания цилиндра, приблизительно равно 1.3 [1, стр. 30].

Из полученных численных результатов на равномерной сетке следует, что для получения решения с еще меньшим эффективным торможением жидкости вне цилиндра в расчетах необходимо переходить к неравномерной сетке, сгущающейся в окрестности границы, и уменьшать σ, таким образом, практически исключая искусственное торможение потока жидкости вне цилиндра.

Следует отметить, что для возникновения вихревой дорожки Кармана за цилиндром необходимо при численном моделировании вводить малое возмущение набегающего потока. Это малое возмущение, развиваясь в паре вихрей за цилиндром, возникающей непосредственно после момента начала движения жидкости, приводит к асимметричному последовательному отрыву и образованию системы поочередно отрывающихся вихрей — вихревой дорожки Кармана. Такое малое начальное возмущение всегда имеется в реальном потоке жидкости, набегающем на цилиндр, и является причиной возникновения неустойчивости реального потока. Получающаяся при численном решении временная эволюция вихрей за цилиндром проходит те же стадии, что и в эксперименте [1, стр. 395]. В частности, численная модель правильно предсказывает место отрыва потока.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод интегро-дифференциального уравнения позволяет свести задачи гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости к интегро-дифференциальному уравнению относительно одного векторного поля — поля вихрей. Данное поле имеет существенно отличное от нуля значение только вблизи обтекаемого тела и в области вихревого следа, поэтому при численном решении полученных уравнений поле вихрей потребуется аппроксимировать лишь в этой ограниченной области пространства. Поле же скоростей с помощью полученных интегральных выражений может быть определено по известному полю вихрей во всем пространстве.

Уменьшение и ограничение размера области аппроксимации функции, описывающей поток жидкости вокруг тела, является существенным преимуществом предложенного метода.

Метод интегро-дифференциального уравнения в данной работе предложен применительно к задаче внешнего плоского обтекания кругового цилиндра. Однако данный метод может быть с успехом применен и к задачам внутреннего обтекания, а также использоваться для представления уравнения движения в интегро-дифференциальной форме в задачах вынужденной и свободной конвекции и других задачах тепло- и массопереноса, как двумерных, так и трехмерных.

Литература

1. Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Наука, Москва (1974).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Уч. пособие*, В 10 т., Т. VI. Гидродинамика.-3-е изд., Наука, Москва (1986), стр. 73.
3. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, *Фейнмановские лекции по физике*. Том 7 - Физика сплошных сред. Мир, Москва (1977), стр. 253–262.