ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 3(9), стр. 818–827

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА ДЛЯ АТОМА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С КЛАССИЧЕСКИМ МНОГОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ

М. З. Смирнов

Лазерный центр
Санкт-Перербургского государственного института точной механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 28 февраля 1997 г.

Рассмотрена открытая квантовая система, включающая «одетый» двухуровневый атом, т. е. атом, взаимодействующий с классическим многочастотным полем излучения, и квантованную моду электромагнитного поля. При совпадении частоты квантованной моды с одной из частот перехода между уровнями квазиэнергии могут быть реализованы два различных механизма взаимодействия, отличающихся динамикой населенностей квазиэнергетических состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени опубликовано большое число теоретических работ, посвященных исследованию модели Джейнса и Каммингса — замкнутой квантовой системы, включающей двухуровневый атом и одну квантованную моду электромагнитного поля [1]. Аналитическое решение уравнений Гейзенберга для операторов атома и поля было получено в рамках приближения дипольного взаимодействия и приближения вращающейся волны [2–4]. Это решение позволяет продемонстрировать некоторые фундаментальные эффекты, возникающие и в более сложных системах, в частности, пульсации населенностей атомных уровней и генерацию сжатых квантовых состояний поля излучения [3, 5, 6].

Нелинейную динамику модели Джейнса и Каммингса можно качественно охарактеризовать следующим образом. Если в начальный момент времени атом находится в основном квантовом состоянии, а в квантованной моде имеется n фотонов, то в дальнейшем происходит периодический обмен энергией между атомом и полем. Населенности атомных уровней и дипольный момент атома испытывают пульсации, частота которых (обобщенная частота Раби) зависит от n. Если начальное число фотонов n не точно определено в квантовомеханическом смысле (например, в начальный момент времени квантованная мода возбуждена в когерентное состояние $|\alpha\rangle$), то пульсации представляют собой суперпозицию колебаний с разными частотами и имеют характер повторяющихся коллапсов и возрождений (при согласовании фаз составляющих колебаний) [3, 5]. Осциллирующие решения получены и для более сложных замкнутых систем, обобщающих модель Джейнса и Каммингса [7–10]. Такие системы включают трех- или четырехуровневый атом, взаимодействующий с одной или несколькими квантованными модами электромагнитного поля. Получены также некоторые решения, не использующие приближения вращающейся волны [11].

В последнее время появились интересные экспериментальные приложения модели Джейнса и Каммингса [7]. В частности, эксперименты с одноатомным мазером [12, 13] позволили наблюдать пульсации населенности возбужденного состояния атома при его взаимодействии с электромагнитным полем в высокодобротном сверхпроводящем резонаторе. Эти эксперименты значительно стимулировали интерес к обобщению модели Джейнса–Каммингса для описания более сложных квантовых систем [14–18]. Одним из перспективных направлений представляется обобщение данной модели на случай открытых систем. В этой связи можно отметить работу [19], где рассмотрено влияние релаксации на флуктуации фазы квантованного поля.

В настоящей статье вводится модифицированная модель Джейнса–Каммингса — «одетый» атом, взаимодействующий с одной квантованной модой электромагнитного поля. Согласно принятой терминологии, под «одетым» атомом понимается атом, взаимодействующий с внешним классическим полем [20]. Такой атом является открытой квантовой системой, и его энергия не сохраняется. Вместе с тем, если классическое поле обладает эквидистантным частотным спектром, то для «одетого» атома можно ввести понятие квазиэнергии, которая в определенном смысле сохраняется [20–23] (соответствующий формализм кратко рассмотрен в следующем разделе). Таким образом, «одетый» двухуровневый атом характеризуется бесконечным числом уровней квазиэнергии, взаимное расположение которых зависит от параметров классического поля. При взаимодействии такого атома с пробным излучением [24, 25] или с вакуумом электромагнитного поля (резонансная флуоресценция [26, 27]) возникают резонансные эффекты, обусловленные квантовыми переходами между уровнями квазиэнергии и пересечением (антипересечением) этих уровней.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разд. 2 на основе работ [23, 28] кратко описаны свойства квазиэнергетических состояний «одетого» атома. Существенной особенностью изложения по сравнению с опубликованными работами является использование представления Гейзенберга, которое более удобно при решении проблемы Джейнса и Каммингса. В разд. 3 решается оригинальная задача о взаимодействии «одетого» атома с квантованной модой электромагнитного поля. Разд. 4 является заключительным и содержит обзор основных результатов.

2. КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА

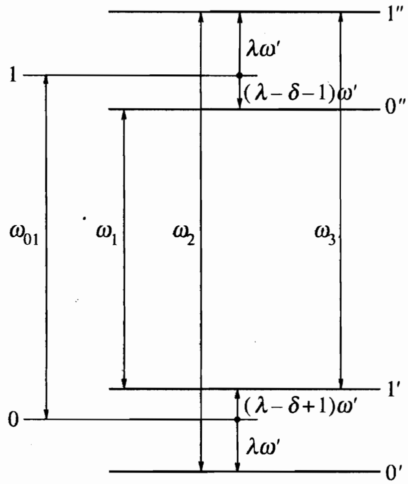
Рассмотрим двухуровневый атом, взаимодействующий с периодически-модулированным классическим полем излучения:

$$E(t) = \tilde{E} g(\omega' t) \exp(i\Omega t) + \text{c.c.}, \tag{1}$$

где $\tilde{E}$ — комплексная амплитуда поля, $g(\omega' t)$ — 2π-периодическая функция модуляции (комплексная), ω' — частота модуляции, Ω — несущая оптическая частота. При использовании приближения дипольного взаимодействия и приближения вращающейся волны [4] гамильтониан атома во внешнем поле записывается в виде

$$\hat{H}_a = \hbar\omega \hat{b}^+ \hat{b} - \hbar\omega' \sigma g(\omega' t) \exp\left[i(\Omega t + \psi)\right] \hat{b} + \text{H.c.}, \tag{2}$$

ω — частота перехода между уровнями атома, $\sigma \equiv |\mu_{01}\tilde{E}/(\hbar\omega')|$ — частота Раби, нормированная на частоту модуляции, μ_{01} — матричный элемент дипольного момента перехода, $\psi \equiv \arg[\mu_{01}\tilde{E}/(\hbar\omega')]$, $\hat{b} = |0\rangle\langle 1|$ — оператор перехода между нижним ($|0\rangle$) и



Квазиуровневая структура «одетого» атома: 0 и 1 — уровни энергии невозмущенного атома, $0'$, $1'$, $0''$, $1''$ — квазиуровни (представлено по одному квазиуровню из каждой эквидистантной серии)

верхним ($|1\rangle$) энергетическими уровнями атома, Н.с. обозначает выражение, эрмитово-сопряженное первым двум слагаемым в соотношении (2). Уравнение Шредингера с гамильтонианом (2) имеет два ортонормированных решения, называемых квазиэнергетическими состояниями [20, 25]:

$$|\theta_1\rangle = \exp(i\lambda\tau)\left[\varphi_1(\tau)|0\rangle + \exp(-i\Omega t)\varphi_2(\tau)|1\rangle\right],$$
$$|\theta_2\rangle = \exp\left[i(\delta-\lambda)\tau\right]\left[\varphi_2^*(\tau)|0\rangle + \exp(-i\Omega t)\varphi_1^*(\tau)|1\rangle\right], \qquad (3)$$

где $\tau = \omega' t$ — безразмерное время, $\delta = (\Omega-\omega)/\omega'$ — отстройка частоты поля от частоты перехода, нормированная на частоту модуляции. Значение действительной величины λ определяется (по модулю 2) из условия, что система уравнений (получаемая подстановкой соотношений (3) в уравнение Шредингера)

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_1 = -i\lambda\varphi_1 + i\sigma g(\tau)\varphi_2,$$
$$\frac{d}{d\tau}\varphi_2 = -i(\delta-\lambda)\varphi_1 + i\sigma g^*(\tau)\varphi_1 \qquad (4)$$

имеет ограниченные 2π-периодические решения. Введение условия нормировки

$$1 = \langle\theta_1|\theta_1\rangle = \langle\theta_2|\theta_2\rangle = |\varphi_1(\tau)|^2 + |\varphi_2(\tau)|^2$$

позволяет однозначно (с точностью до фазового множителя) определить 2π-периодические функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ из системы уравнений (4). Следует отметить, что эти результаты, полученные в приближении вращающейся волны, справедливы, если

$$\omega', \lambda\omega', \delta\omega', \sigma\omega' \ll \Omega. \qquad (5)$$

С физической точки зрения введенная здесь величина λ определяет квазиэнергию атома. При наличии классического поля каждый из уровней энергии атома расщепляется на две эквидистантные последовательности квазиуровней. Энергии квазиуровней определяются как [23]

$$\hbar\omega'(-\lambda+2n), \quad \hbar\omega'(\lambda-\delta+2m+1)$$

вблизи нижнего уровня энергии изолированного атома и

$$\hbar\omega + \hbar\omega' [\delta - \lambda - (2m+1)], \quad \hbar\omega + \hbar\omega'(\lambda - 2n)$$

вблизи верхнего уровня; здесь $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое расщепление уровней (динамическое расщепление Штарка) в периодически-модулированном поле схематически показано на рисунке. Каждая последовательность квазиуровней имеет период по энергии $2\hbar\omega'$ и представлена на рисунке одним квазиуровнем: $0'$, $1'$, $0''$ или $1''$. Квазиуровни (последовательности квазиуровней) $0'$ и $0''$ соответствуют квазиэнергетическому состоянию $|\theta_0\rangle$, а $1'$ и $1''$ — состоянию $|\theta_1\rangle$. Из рисунка видно, что имеются три частоты перехода между квазиуровнями, которые определяются (по модулю $2\hbar\omega'$) значениями ω_1, ω_2 и ω_3. Со спектроскопической точки зрения квазиуровневая структура проявляет себя аналогично энергетическим уровням изолированного атома. В частности, в спектрах резонансной флуоресценции «одетого» атома наблюдаются резонансные пики на частотах переходов между квазиуровнями [26, 27]. Однако при рассмотрении нелинейного взаимодействия излучения с атомом возникают важные различия между квазиуровнями и уровнями энергии, которые анализируются в следующем разделе.

Свойства квазиуровней и квазиэнергетических состояний в различных случаях рассмотрены в работах [23–25, 28]. В [28] предложено обобщение изложенного здесь формализма на случай многоуровневого атома. В ряде работ, в частности в [20–22], используется другой подход, приводящий к тем же значениям квазиэнергий. Однако при этом последнем подходе предполагается введение бесконечного множества «состояний Флоке» вместо двух квазиэнергетических состояний, что значительно затрудняет, на наш взгляд, анализ нелинейного взаимодействия «одетого» атома с квантованным электромагнитным полем.

В дальнейшем изложении вместо представления Шредингера будет использоваться представление Гейзенберга. Динамика одетого атома описывается уравнением Гейзенберга

$$\frac{d}{dt}\hat{b} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{b}, \hat{H}_a\right] = -i\omega\hat{b} + i\omega'\sigma g^*(\omega' t)\exp\left[i(\omega t + \psi)\right]\left(\hat{I} - 2\hat{b}^+\hat{b}\right), \tag{6}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор. Оператор перехода между квазиэнергетическими состояниями можно представить в виде

$$\hat{c} \equiv |\theta_0\rangle\langle\theta_1| = \exp\left[i(2\lambda - \delta)\tau\right]\left[\varphi_1\varphi_2\left(\hat{I} - 2\hat{b}^+\hat{b}\right) - \exp(i\Omega t')\varphi_1^2\hat{b} + \exp(-i\Omega t')\varphi_2^2\hat{b}^+\right], \tag{7}$$

где $\Omega t' \equiv \Omega t + \psi$ и использованы соотношения (3). Дифференцируя (7) по времени и принимая во внимание соотношения (4) и (6), получаем, что $(d/dt)\hat{c} = 0$, т.е. оператор $\hat{c}$ является интегралом движения «одетого» атома. Сохранение оператора $\hat{c}$ следует фактически из определения квазиэнергетических состояний как решений уравнения Шредингера с гамильтонианом $\hat{H}_a$.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ «ОДЕТОГО» АТОМА С МОДОЙ КВАНТОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Внешнее воздействие на «одетый» атом (например, со стороны термостата или электромагнитного поля) должно вызывать в общем случае квантовые переходы между уровнями квазиэнергии. С формальной точки зрения, это означает, что оператор $\hat{c} \equiv |\theta_0\rangle\langle\theta_1|$

перестает быть интегралом движения и скорость его изменения во времени пропорциональна интенсивности воздействия. В проблеме Джейнса и Каммингса роль внешнего воздействия играет квантованное электромагнитное поле. Мы рассмотрим одну моду квантованного поля и запишем оператор напряженности в виде

$$\hat{E}_q = i\mathbf{e}\left[u(\mathbf{r})\hat{a}(t) - u^*(\mathbf{r})\hat{a}^+(t)\right], \tag{8}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации, $u(\mathbf{r})$ — нормированная собственная функция, $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ — операторы уничтожения и рождения фотона. Гамильтониан взаимодействия «одетого» атома с квантованным полем (8) можно представить в виде

$$\hat{V}_{aq} = i\hbar\omega'\kappa\hat{b}\hat{a}^+ + \text{H.c.}, \tag{9}$$

где использованы обычные приближения дипольного взаимодействия и вращающейся волны и введена константа взаимодействия $\kappa = (\boldsymbol{\mu}_{01}\mathbf{e})u(\mathbf{r})/(\hbar\omega')$. В последнем выражении вектор $\mathbf{r}$ определяет положение атома. Полный гамильтониан рассматриваемой далее модифицированной модели Джейнса–Каммингса имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hbar\omega_q\hat{a}^+\hat{a} + \hat{V}_{aq}, \tag{10}$$

где ω_q — частота квантованного поля. Уравнения Гейзенберга для атома и квантованного поля можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\hat{c} &= -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{c},\hat{H}\right] = \\ &= \exp(i\delta_q\tau)\kappa_q^*\left\{\varphi_1^2(\tau)\left(\hat{I}-2\hat{c}^+\hat{c}\right)\exp\left[i(2\lambda-\delta)\tau\right] - 2\varphi_1(\tau)\varphi_2^*(\tau)\hat{c}\right\}\hat{a}_q + \\ &+ \exp(-i\delta_q\tau)\kappa_q^*\left\{\varphi_2^2(\tau)\left(\hat{I}-2\hat{c}^+\hat{c}\right)\exp\left[i(2\lambda-\delta)\tau\right] - 2\varphi_1^*(\tau)\varphi_2(\tau)\hat{c}\right\}\hat{a}_q^+,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\hat{a}_q &= -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{a}_q,\hat{H}\right] = \exp(-i\delta_q\tau)\kappa_q \times \\ &\times\left\{\varphi_1^*(\tau)\varphi_2(\tau)\left(\hat{I}-2\hat{c}^+\hat{c}\right) + \exp\left[i(2\lambda-\delta)\tau\right]\varphi_2^2(\tau)\hat{c}^+ - \exp\left[-i(2\lambda-\delta)\tau\right]\varphi_1^{*2}(\tau)\hat{c}\right\},\end{aligned} \tag{12}$$

где $\delta_q \equiv (\Omega-\omega_q)/\omega'$ — разность частот классического и квантованного полей, нормированная на частоту модуляции, $\kappa_q = \kappa\exp(-i\psi)$, $\hat{a}_q = \hat{a}\exp(i\omega_q t)$. При анализе решений системы уравнений (11) квантованное поле предполагается достаточно слабым, а именно, $|\kappa_q| = |\kappa| \ll 1$. При этом мы имеем в виду, что классическое поле является сильным в спектроскопическом смысле, т. е. константа взаимодействия σ больше или порядка единицы. Это позволяет не рассматривать динамику классического поля и трактовать его как заданное внешнее воздействие.

Как уже отмечалось, функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ являются периодическими с периодом 2π. В работе [23] показано, что задача взаимодействия атома с классическим полем всегда может быть сформулирована таким образом, что $\varphi_1(\tau)$ представляет собой суперпозицию только четных, а $\varphi_2(\tau)$ — нечетных гармоник:

$$\varphi_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\exp(-2in\tau), \quad \varphi_2(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m\exp\left[i(2m+1)\tau\right]. \tag{13}$$

Из соотношений (11)–(13) и сделанного выше предположения о малости параметра κ следует, что взаимодействие «одетого» атома с полем будет иметь резонансный характер (в правой части уравнений (11) и (12) будут появляться медленно осциллирующие слагаемые) при выполнении одного из следующих приближенных равенств:

$$\begin{aligned} &1)\quad 2\lambda - \delta + \delta_q \approx 2m_1 \quad \text{или} \quad \omega_q \approx \omega_1 - 2\omega' m_1,\\ &2)\quad 2\lambda - \delta - \delta_q \approx 2m_2 \quad \text{или} \quad \omega_q \approx \omega_2 + 2\omega' m_2,\\ &3)\quad \delta_q \approx 2m_3 + 1 \quad \text{или} \quad \omega_q \approx \omega_3 - 2\omega' m_3,\end{aligned} \tag{14}$$

где $\omega_1 = \omega + 2\lambda\omega'$, $\omega_2 = \omega + 2(\delta - \lambda)\omega'$ и $\omega_3 = \omega + (\delta - 1)\omega'$ — частоты перехода между уровнями квазиэнергии, показанные на рисунке, а m_1, m_2 и m_3 — произвольные целые числа, которые нумеруют уровни квазиэнергии в эквидистантных последовательностях $0'$, $0''$, $1'$, $1''$.

В случаях 1) и 2) квантовые переходы происходят между уровнями квазиэнергии, которые соответствуют различным квазиэнергетическим состояниям. Действительно, в случае 1) (2)) роль нижнего состояния выполняет $|\theta_0\rangle$ ($|\theta_1\rangle$), а верхнего — $|\theta_1\rangle$ ($|\theta_0\rangle$). Этот тип взаимодействия можно условно трактовать, как «неупругое» взаимодействие.

В случае 3) верхний и нижний квазиуровни соответствуют одному и тому же квазиэнергетическому состоянию ($|\theta_0\rangle$ или $|\theta_1\rangle$). Таким образом, несмотря на взаимодействие с квантованной модой, квазиэнергетические состояния $|\theta_0\rangle$ и $|\theta_1\rangle$ продолжают оставаться стационарными состояниями атома. Такой тип взаимодействия является специфическим для открытых систем и может условно трактоваться, как «упругое» взаимодействие. При «упругом» взаимодействии атом излучает фотон в квантованную моду или поглощает фотон, оставляя неизменным значение своей квазиэнергии (в рамках нашего подхода квазиэнергия определена по модулю $2\hbar\omega'$).

Таким образом, в зависимости от частоты ω_q квантованной моды может быть реализован «неупругий» либо «упругий» механизм взаимодействия атома и поля. Различие между ними исчезает, если квазиуровни из различных последовательностей сближаются на расстояние порядка $\hbar\omega'$ (параметрический резонанс, см. [20, 25, 28]). В дальнейшем предполагается, что минимальное расстояние между уровнями квазиэнергии значительно превышает $\hbar\omega'$, что дает возможность раздельно рассматривать «неупругое» и «упругое» взаимодействия.

При «неупругом» взаимодействии (случай 1)) частота квантованной моды определяется соотношением

$$\delta_q = \delta - 2\lambda + 2m_1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1, \tag{15}$$

где m_1 — порядок резонанса, ε — нормированная отстройка частоты ω_q квантованной моды от резонансной частоты $\omega_1 - 2\omega' m_1$. Подставляя (15) в правую часть соотношений (11) и (12) и опуская все слагаемые, кроме медленно осциллирующих, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\hat{c} = \kappa^*_{m_1} \exp(i\varepsilon\tau) \left(\hat{I} - 2\hat{c}^+\hat{c}\right) \hat{a}_q, \quad \frac{d}{d\tau}\hat{a}_q = -\kappa_{m_1} \exp(-i\varepsilon\tau)\hat{c}, \tag{16}$$

где

$$\kappa_{m_1} = \kappa_q \left\langle \varphi_1^{*2}(\tau) \exp(-2im_1\tau)\right\rangle \tag{17}$$

— эффективная константа связи атома и поля, а угловые скобки обозначают усреднение по периоду 2π.

Преобразуя оператор уничтожения фотона согласно выражению $\hat{a}_q = \exp(-i\varepsilon\tau)\hat{a}_1$, можно переписать уравнения (16) в форме уравнений Гейзенберга:

$$\frac{d}{d\tau}\,\hat{c} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{c}, \hat{H}^{eff}_{m_1}\right], \quad \frac{d}{d\tau}\,\hat{a}_1 = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{a}_1, \hat{H}^{eff}_{m_1}\right], \tag{18}$$

где эффективный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}^{eff}_{m_1} = -\hbar\omega'\varepsilon\hat{a}_1^+\hat{a}_1 - i\hbar\omega'\left(\kappa_{m_1}\hat{a}^+\hat{c} - \kappa^*_{m_1}\hat{a}\hat{c}^+\right). \tag{19}$$

Таким образом, в приближении неупругого взаимодействия рассматриваемая нами модель формально эквивалентна первоначальной модели Джейнса и Каммингса [1]. Параметрами модели являются отстройка от резонанса ε и константа взаимодействия κ_{m_1}. Рассмотрим в качестве примера случай, когда на атом действует бихроматическое (амплитудно-модулированное) поле, средняя частота которого совпадает с частотой перехода ω:

$$\Omega = \omega, \quad \delta = 0, \quad g(\tau) = \cos\tau. \tag{20}$$

Квазиэнергетические состояния определяются при этом соотношениями (3), где [28]

$$\lambda = 0, \quad \varphi_1(\tau) = \cos(\sigma\sin\tau), \quad \varphi_2(\tau) = \sin(\sigma\sin\tau), \tag{21}$$

и выражение (17) для константы связи преобразуется к виду

$$\kappa_{m_1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\kappa_q\,[1 + J_0(2\sigma)] = \dfrac{1}{2}\,\kappa\exp(-i\psi)\,[1 + J_0(2\sigma)]\,, & m_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\kappa_q J_{2m_1}(2\sigma) = \dfrac{1}{2}\,\kappa\exp(-i\psi) J_{2m_1}(2\sigma), & m_1 \neq 0. \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, наблюдение «неупругих» резонансов высоких порядков ($m_1 \gg 1$) возможно только в сильных классических полях ($\sigma \gg 1$).

Второй случай «неупругого» взаимодействия

$$\delta_q = 2\lambda - \delta - 2m_2 - \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{23}$$

рассматривается аналогично первому. Смена верхнего и нижнего состояний квантового перехода приводит к перемене местами операторов $\hat{c}$ и $\hat{c}^+$ в выражении для эффективного гамильтониана:

$$\hat{H}^{eff}_{m_2} = \hbar\omega'\varepsilon\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + i\hbar\omega'\left(\kappa_{m_2}a_2^+c^+ - \kappa^*_{m_2}a_2c\right), \tag{24}$$

где

$$\hat{a}_q = \exp(i\varepsilon\tau)\hat{a}_2, \quad \kappa_{m_2} = \kappa_q\langle\varphi_2^2(\tau)\exp(2im_2\tau)\rangle. \tag{25}$$

Рассмотрим случай «упругого» взаимодействия:

$$\delta_q = 2m_3 + 1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{26}$$

Сохраняя в правой части уравнений (11) и (12) лишь медленно осциллирующие слагаемые, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\,\hat{c} = 2\kappa^*_{m_3}\exp(i\varepsilon\tau)\hat{c}\hat{a}_q - 2\kappa_{m_3}\exp(-i\varepsilon\tau)\hat{c}\hat{a}_q^+, \tag{27}$$

$$\frac{d}{d\tau}\hat{a}_q = \kappa_{m_3}\exp(-i\varepsilon\tau)\left(\hat{I} - 2\hat{c}^+\hat{c}\right), \tag{28}$$

где

$$\kappa_{m_3} = \kappa_q \left\langle \varphi_1^*(\tau)\varphi_2(\tau)\exp\left[-i(2m_3+1)\tau\right]\right\rangle. \tag{29}$$

Преобразуя оператор уничтожения фотона согласно выражению $\hat{a}_q = \exp(i\varepsilon\tau)\hat{a}_3$, уравнения (27) и (28) можно переписать в форме уравнений Гейзенберга с эффективным гамильтонианом

$$H_{m_3}^{eff} = -\hbar\omega'\left[\varepsilon\hat{a}_3^+\hat{a}_3 + i\left(\kappa_{m_3}^*\hat{a}_3 - \kappa_{m_3}\hat{a}_3^+\right)\left(\hat{I} - 2\hat{c}^+\hat{c}\right)\right]. \tag{30}$$

Оператор $\hat{N}(\tau) = \hat{c}^+(\tau)\hat{c}(\tau)$ коммутирует с гамильтонианом (30) и является интегралом движения системы:

$$\hat{c}^+(\tau)\hat{c}(\tau) = \hat{c}^+(0)\hat{c}(0) = \hat{c}_0^+\hat{c}_0. \tag{31}$$

Из (31) следует, что населенности квазиэнергетических состояний $|\theta_0\rangle$ и $|\theta_1\rangle$ при «упругом» взаимодействии не меняются во времени. Подставляя (31) в (28) и интегрируя уравнение для оператора уничтожения фотона, получаем

$$\hat{a}_q(\tau) = \hat{a}_q(0) + i\kappa_{m_3}\frac{\exp(-i\varepsilon\tau) - 1}{\varepsilon}\left(\hat{I} - 2\hat{c}_0^+\hat{c}_0\right), \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\hat{n}(\tau) = \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(\tau) = \hat{a}_q^+(\tau)\hat{a}_q(\tau) = \hat{n}_0 + 4|\kappa_{m_3}|^2\frac{\sin^2(\varepsilon\tau/2)}{\varepsilon^2} + \frac{i}{\varepsilon}\left(\hat{I} - 2\hat{c}_0^+\hat{c}_0\right) \times \\ \times\left\{\kappa_{m_3}\left[\exp(-i\varepsilon\tau) - 1\right]a_0^+ - \kappa_{m_3}^*\left[\exp(i\varepsilon\tau) - 1\right]a_0\right\},\end{aligned} \tag{33}$$

где $\hat{a}_0 \equiv \hat{a}(0)$, $\hat{n}_0 \equiv \hat{a}_0^+\hat{a}_0$. При выводе соотношения (33) для оператора $\hat{n}(\tau)$ числа фотонов в квантованной моде использовано выражение $(\hat{I} - 2\hat{c}_0^+\hat{c}_0)^2 = \hat{I}$. Осцилляции числа фотонов при «упругом» взаимодействии происходят на частоте $\varepsilon\omega'$. При точном резонансе между «одетым» атомом и квантованной модой ($\varepsilon = 0$) выражение для числа фотонов имеет вид

$$\hat{n}(\tau) = \hat{n}_0 + |\kappa_{m_3}|^2\tau^2 + \left(\hat{I} - 2\hat{c}_0^+\hat{c}_0\right)\left(\kappa_{m_3}a_0^+ - \kappa_{m_3}^*a_0\right)\tau. \tag{34}$$

Таким образом, «упругий» механизм взаимодействия в отличие от «неупругого» дает возможность эффективно перекачивать энергию из классического поля в квантованную моду. Это обусловлено отсутствием эффекта насыщения инверсии заселенностей квазиэнергетических состояний при «упругом» взаимодействии.

Предположим, что в начальный момент времени «одетый» атом и квантованная мода статистически независимы и квантованная мода находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Используя соотношение (33), можно получить следующее выражение для среднего числа фотонов $\overline{n}$ и дисперсии числа фотонов $(\Delta n)^2$

$$\overline{n}(\tau) = |\alpha|^2 + |\eta(\tau)|^2 + \gamma(\tau)\Delta N, \tag{35}$$

$$\frac{(\Delta n)^2}{\overline{n}} = 1 + \frac{\gamma(\tau)^2\left[1-(\Delta N)^2\right]}{\overline{n}}, \tag{36}$$

где $\Delta N = \langle \hat{I} - 2\hat{c}_0^+\hat{c}_0\rangle = \langle \hat{c}_0\hat{c}_0^+ - \hat{c}_0^+\hat{c}_0\rangle$ — средняя разность населенностей квазиэнергетических состояний $|\theta_0\rangle$ и $|\theta_1\rangle$ (угловые скобки обозначают квантовомеханическое усреднение),

$$\eta(\tau) = i\kappa_{m_3}\left[\exp(-i\varepsilon\tau) - 1\right]/\varepsilon, \quad \gamma(\tau) = \alpha^*\eta(\tau) + \alpha\eta^*(\tau).$$

Таким образом, при $\alpha = 0$ статистика фотонов в квантованной моде является пуассоновской в любой момент времени ($(\Delta n)^2 = \overline{n}$). Тот же вывод о статистике фотонов справедлив при произвольном значении α, если атом находится в одном из квазиэнергетических состояний, т. е. $\Delta N = \pm 1$. В остальных случаях статистика фотонов является надпуассоновской ($(\Delta n)^2 > \overline{n}$).

Для оценки наивысшего порядка резонанса m_3, который может быть реализован в конкретном эксперименте, необходимо провести усреднение по времени за период 2π в выражении (29). В частности, для случая амплитудно-модулированного (бихроматического) классического поля (20) получаем

$$\kappa_{m_3} = -\frac{i}{2}\,\kappa_q J_{2m_3+1}(2\sigma) = -\frac{i}{2}\,\kappa\exp(-i\psi)J_{2m_3+1}(2\sigma). \tag{37}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена нелинейная динамика связанной системы, включающей «одетый» атом и одну квантованную моду электромагнитного поля. Под «одетым» атомом понимается двухуровневый атом, взаимодействующий с интенсивным классическим полем излучения. Использованы приближения дипольного взаимодействия, вращающейся волны и заданного классического поля.

Если классическое поле обладает эквидистантным частотным спектром, то для «одетого» атома могут быть введены два стационарных квазиэнергетических состояния и бесконечное число уровней квазиэнергии. Взаимодействие «одетого» атома с квантованной модой имеет резонансный характер, если частота квантованной моды близка к одной из частот перехода между уровнями квазиэнергии. В зависимости от частоты квантованной моды могут быть реализованы два принципиально различных механизма взаимодействия: «неупругий» и «упругий».

При «неупругом» взаимодействии уровни квазиэнергии, между которыми происходит квантовый переход, соответствуют различным квазиэнергетическим состояниям «одетого» атома. При этом излучение или поглощение фотона из квантованной моды сопровождается переходом «одетого» атома из одного квазиэнергетического состояния в другое. Уравнения «неупругого» взаимодействия могут быть формально сведены к уравнениям, описывающим динамику первоначальной модели Джейнса и Каммингса (двухуровневый атом + одна квантованная мода).

В случае «упругого» взаимодействия оба уровня квазиэнергии соответствуют одному и тому же квазиэнергетическому состоянию. Излучение или поглощение фотона «одетым» атомом не сопровождается изменением населенностей квазиэнергетических состояний. При точном совпадении частоты квантованной моды с частотой перехода между уровнями квазиэнергии число фотонов в квантованной моде может неограниченно нарастать во времени (до тех пор, пока справедливо приближение заданного классического поля). Если в начальный момент времени квантованная мода находится в когерентном квантовом состоянии $|\alpha\rangle$, то затем статистика фотонов в квантованной моде может быть пуассоновской ($(\Delta n)^2 = \overline{n}$) либо надпуассоновской ($(\Delta n)^2 > \overline{n}$). Случай пуассоновской статистики реализуется при $\alpha = 0$ либо при произвольном значении α, если атом находится в одном из квазиэнергетических состояний.

Литература

1. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
2. J. R. Ackerhalt and K. Rzazewski, Phys. Rev. A **12**, 2549 (1975).
3. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
4. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
5. J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
6. P. Goldberg and L. C. Harrison, Phys. Rev. A **43**, 376 (1991).
7. H.-I. Yoo and J. H. Eberly, Phys. Rep. **118**, 241 (1985).
8. X.-S. Li and N.-Y. Bei, Phys. Lett. A **101**, 169 (1984).
9. N. N. Bogolubov Jr., F. L. Kien, and A. S. Shumovski, Phys. Lett. A **101**, 201 (1984).
10. В. В. Додонов, В. И. Манько, С. М. Чумаков, Труды ФИАН **176**, 57 (1986).
11. J. L. Gruver, J. Aliaga, H. A. Cerdeira, and A. N. Proto, Phys. Rev. A **50**, 5274 (1994).
12. D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).
13. G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
14. M. M. Ashraf, Phys. Rev. A **50**, 5116 (1994).
15. H. Huang and H. Fan, Phys. Lett. A **166**, 308 (1992).
16. H. Huang and H. Fan, Phys. Lett. A **159**, 323 (1991).
17. A. Ya. Kazakov, Phys. Lett. A **206**, 229 (1995).
18. А. Я. Казаков, Опт. и спектр. **81**, 549 (1996).
19. H. T. Dung and A. S. Shumovski, Phys. Lett. A **169**, 379 (1992).
20. C. Cohen-Tannoudji, in *Cargese Lectures in Physics*, ed. by M. Levy, Gordon and Breach, New York (1968), Vol. 2, p. 347.
21. T. Yabuzaki, S. Nakayama, Y. Marakami, and T. Ogawa, Adv. At. Mol. Phys. **10**, 1955 (1974).
22. J. H. Shirley, Phys. Rev. **138**, B979 (1965).
23. М. З. Смирнов, КЭ **22**, 903 (1995).
24. M. Z. Smirnov, J. Opt. Soc. Amer. B **9**, 2171 (1992).
25. M. Z. Smirnov, J. Opt. Soc. Amer. B **11**, 109 (1994).
26. Y. Zhu, Q. Wu, A. Lezama, D. J. Gauthier, and T. W. Mossberg, Phys. Rev. A **41**, 6574 (1990).
27. G. S. Agarwal, Y. Zhu, D. J. Gauthier, and T. W. Mossberg, J. Opt. Soc. Amer. B **8**, 1163 (1991).
28. M. Z. Smirnov, Phys. Rev. A **52**, 2195 (1995).