ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 1(7), стр. 313–324

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

*Э. В. Теодорович**

Институт проблем механики Российской академии наук
117526, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 ноября 1996 г.

Проводится вычисление эффективной проницаемости пористой среды вне рамок теории возмущений. В предположении, что распределение для проницаемости является логнормальным, получено точное выражение для эффективной проницаемости через двукратный интеграл по траекториям. В крупномасштабном пределе интегрирование по траекториям выполняется в общем виде. Полученный результат подтверждает известное утверждение о независимости эффективной проницаемости от структуры корреляционной функции, но не согласуется с предположением об экспоненциальной зависимости эффективной проницаемости от дисперсии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания фильтрационных течений в пористых средах является весьма актуальной в связи с ее приложениями к различным задачам гидрогеологии, нефтедобычи, химической технологии и др. Пористую среду естественно рассматривать как случайно-неоднородную и задавать ее свойства статистически с помощью функций распределения или статистических моментов и корреляционных функций различных порядков. В случае, когда масштабы случайных неоднородностей (длины корреляций) малы по сравнению с характерными масштабами фильтрационных течений, для их описания достаточно знать эффективную проницаемость, определяющую, согласно закону Дарси, связь между средним значением скорости фильтрационного течения и средним значением градиента давления.

Задача о вычислении эффективной проницаемости, сводящаяся к исследованию и нахождению статистических решений стохастических дифференциальных уравнений, имеет достаточно длительную историю. Наиболее простым и естественным способом ее решения является использование теории возмущений. При этом подходе решение представляется в виде ряда по степеням флуктуаций проницаемости и затем проводится почленное усреднение ряда с использованием тех или иных предположений о характере статистики для флуктуаций проницаемости (обычно принимается, что распределение является нормальным или логнормальным) [1–3]. Этот подход аналогичен предложенному Уайлдом в теории турбулентности методу описания, при котором решение представляется в виде функционального ряда по степеням плотности случайных ланжевеновских силовых источников, моделирующих возникновение стохастичности за счет развития неустойчивостей [4]. При вычислении эффективной проницаемости

*E-mail: teodor@ipmnet.ru

авторы большинства работ ограничивались первым неисчезающим приближением теории возмущений. В качестве граничных условий принималось, что градиент давления является заданной постоянной величиной, и задача сводилась к вычислению средней скорости фильтрационного потока. Для оценки роли высших приближений были выполнены соответствующие расчеты [5, 6], которые показали, что результаты второго приближения теории возмущений не противоречат сформулированному в [2] предположению о том, что результат первого приближения является первым членом разложения в ряд Тейлора экспоненты, определяющей точное решение задачи (по крайней мере в случае логнормального распределения проницаемости среды). Из полученных в низших приближениях теории возмущений результатов также следует, что эффективная проницаемость не зависит от формы корреляционной функции, а определяется только дисперсией флуктуирующей величины в данной точке [5].

Возникает вопрос о том, в какой мере описанные выше выводы об экспоненциальной зависимости эффективной проницаемости от дисперсии и ее независимости от формы корреляционных функций связаны с использованием теории возмущений. В частности, в недавней работе Де Вита [7] на основе расчетов вплоть до третьего порядка теории возмущений было показано, что предположение об экспоненциальной зависимости эффективной проницаемости от дисперсии не оправдывается и что в случае произвольной статистики в высших приближениях проницаемость оказывается зависящей от функциональной формы парной корреляционной функции флуктуаций проницаемости, а не только от дисперсии. Описание структуры произвольного члена ряда теории возмущений, а также улучшение теории возмущений путем частичного суммирования некоторых бесконечных подпоследовательностей полного ряда могут быть осуществлены в рамках заимствованных из квантовой теории поля методов с использованием фейнмановских диаграмм, уравнений Дайсона и процедуры перенормировок, аналогичных подходу Уайлда [4]. В рамках полевого подхода и в предположении, что при малых флуктуациях логнормальное распределение для проницаемостей эквивалентно гауссову распределению, Кинг [8] воспроизвел результаты, полученные в низших приближениях теории возмущений, однако при этом ему не удалось обосновать гипотезу об экспоненциальной зависимости эффективной проницаемости от дисперсии.

С нашей точки зрения представляет интерес найти эффективную проницаемость вне рамок теории возмущений, поскольку даже применение методов квантовой теории поля фактически основывается на теории возмущений и ее улучшении путем частичного суммирования диаграмм определенного вида. Непертурбационный подход может быть сформулирован на основе представления решения стохастического дифференциального уравнения в форме фейнмановского интеграла по траекториям, реализованного ранее автором в задаче о диффузии пассивной примеси в поле случайных скоростей [9] без использования предположения о малости относительных флуктуаций проницаемости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Связь между скоростью фильтрационного потока $\mathbf{v}$ и градиентом давления p определяется законом Дарси, который для изотропной системы имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -k(\mathbf{r})\nabla p(\mathbf{r}), \tag{2.1}$$

где коэффициент восприимчивости (проницаемости) $k(\mathbf{r})$ является некоторой случайной функцией координат (обобщение на случай анизотропной среды требует специального рассмотрения). Для несжимаемой жидкости условие неразрывности задается уравнением

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \tag{2.2}$$

$\rho(\mathbf{r})$ — плотность реальных детерминированных источников или эквивалентных источников, определяющих граничные условия задачи. Из (2.1), (2.2) следует, что давление является решением уравнения со случайными коэффициентами

$$\nabla\,[k(\mathbf{r})\nabla]\,p(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}). \tag{2.3}$$

Определим оператор эффективной проницаемости среды с помощью соотношения

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r})\rangle = -\widehat{k}_{eff}\langle \nabla p(\mathbf{r})\rangle. \tag{2.4}$$

В общем случае $\widehat{k}_{eff}$ является некоторым интегральным оператором вида

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r})\rangle = -\int d\mathbf{r}_1 k_{eff}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\langle \nabla p(\mathbf{r}_1)\rangle. \tag{2.5}$$

Для статистически однородной среды интегральное ядро $k_{eff}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ зависит только от разности координат, и в этом случае при переходе в пространство фурье-образов соотношение (2.5) примет вид

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{q})\rangle = k_{eff}(\mathbf{q})i\mathbf{q}\langle p(\mathbf{q})\rangle. \tag{2.5$'$}$$

Вычисление $k_{eff}(\mathbf{q})$ и его фурье-образа $k_{eff}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$ и является предметом данной работы.

Из (2.2) после усреднения следует

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r})\rangle = \nabla^{-1}\rho(\mathbf{r}) + \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{2.6}$$

где оператор $\nabla^{-1} = \nabla\Delta^{-1}$ является хорошо определенным оператором, так как Δ^{-1} представляет собой функцию Грина для уравнения Лапласа. За исключением некоторых экзотических условий для анизотропной среды можно в формуле (2.6) положить $\mathbf{A} = 0$. В результате для фурье-образа обратного оператора эффективной проницаемости получим

$$k_{eff}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{q^2\langle p(\mathbf{q})\rangle}{\rho(\mathbf{q})}, \tag{2.7}$$

и задача сводится к вычислению фурье-образа среднего давления при заданной плотности источников.

Для удобства в дальнейшем введем обозначение $k(\mathbf{r}) = k_0 e^{u(\mathbf{r})}$. В этом выражении k_0 и $u(\mathbf{r}) = \ln[k(\mathbf{r})/k_0]$ определены неоднозначно, и имеющийся произвол в их определении будет использован при написании выражения для характеристического функционала случайной функции $u(\mathbf{r})$. В результате уравнение для давления примет вид

$$[\Delta + \nabla u\cdot\nabla]p = -k_0^{-1}e^{-u}\rho. \tag{2.8}$$

Формальное решение этого уравнения может быть представлено соотношением

$$p = k_0^{-1}(-\Delta - \nabla u\cdot\nabla)^{-1}e^{-u}\rho. \tag{2.9}$$

После усреднения (2.9) получим явное представление для $\langle p(\mathbf{r})\rangle$, позволяющее найти эффективную проницаемость согласно (2.4) или (2.7).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Для построения обратного оператора $(-\Delta - \nabla u \cdot \nabla)^{-1}$ (функции Грина) воспользуемся фейнмановским операторным формализмом, сущность которого заключается в следующем. В случае уравнения с постоянными коэффициентами $\nabla u = \mathrm{const}$ обратный оператор может быть представлен в предложенной Фоком форме операторной экспоненты:

$$(-\Delta - \nabla u \cdot \nabla)^{-1} = \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-(-\Delta - \nabla u \cdot \nabla)\tau\right\}. \tag{3.1}$$

которую следует понимать как разложение в бесконечный ряд Тейлора по степеням операторов. Однако в интересующем нас случае, когда коэффициенты оператора не являются постоянными, операторы $\nabla u(\mathbf{r})$ и ∇ некоммутативны, $(\partial_i)\cdot(\partial_j u)-(\partial_j u)\cdot(\partial_i) = (\partial_i \partial_j u)$, и при разложении экспоненты в ряд необходимо задать последовательность действия операторов дифференцирования ∂_i и умножения на функцию координат $\partial_j u$. Следуя Фейнману [10], введем параметр упорядочения s («собственное время»), приняв, что операторы действуют в последовательности, соответствующей нарастанию параметра s. После определения последовательности действия некоммутирующих операторов с ними можно обращаться как с числами, и в результате обратный оператор может быть представлен в форме

$$[-\Delta - \nabla u \cdot \nabla]^{-1} = \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-\int_0^\tau ds \left[-\nabla^2(s) - \nabla u(\mathbf{r}, s)\nabla(s)\right]\right\}. \tag{3.2}$$

Для «распутывания» операторной экспоненты необходимо убрать в показателе вторую степень оператора $\nabla(s)$, тогда оставшееся выражение может быть интерпретировано как оператор сдвига аргумента функции согласно соотношению

$$\exp\{\mathbf{a}\nabla\} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \tag{3.3}$$

С этой целью воспользуемся преобразованием Стратоновича [11], являющимся функциональным аналогом известного в теории интегральных преобразований преобразования Вейерштрасса [12]. В применении к интересующему нас случаю (см. Приложение А) это преобразование имеет вид

$$\begin{gathered}
\exp\left\{\int_0^\tau ds \left[\nabla^2(s) + \nabla u(\mathbf{r}, s)\nabla(s)\right]\right\} = \\
= A^{-1}\left(\frac{1}{4}, \tau\right) \int d[\mathbf{X}(s)] \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^\tau ds\, [\mathbf{X}(s) + \nabla u(\mathbf{r}, s)]^2\right\} \times \\
\times \exp\left\{-\int_0^\tau ds \mathbf{X}(s)\nabla(s)\right\}, \\
A(\alpha, \tau) = \int d[\mathbf{X}(s)] \exp\left\{-\alpha \int_0^\tau ds \mathbf{X}^2(s)\right\}
\end{gathered} \tag{3.4}$$

В (3.4) входит интеграл по всевозможным d-компонентным векторным функциям $\mathbf{X}(s)$, заданным на отрезке $0 \le s \le \tau$. Неоднозначность в определении задающей вес траекторий меры $d[\mathbf{X}(s)]$ оказывается несущественной, так как выражение (3.4) содержит интеграл по мере в числителе и знаменателе (через $A(\alpha, \tau)$).

Использование (2.9), (3.2), (3.4) и правила действия операторов сдвига аргумента (3.3) приводит к следующему представлению решения для $p(\mathbf{r})$:

$$p(\mathbf{r}) = k_0^{-1} \int_0^\infty d\tau A^{-1}\left(\frac{1}{4}, \tau\right) \int d[\mathbf{X}(s)]\, \rho\left(\mathbf{r} - \int_0^\tau ds \mathbf{X}(s)\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^\tau ds \left[\mathbf{X}(s) + \nabla u\left(\mathbf{r} - \int_s^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)\right]^2 - u\left(\mathbf{r} - \int_0^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)\right\} \qquad (3.5)$$

(в (3.5) явная зависимость $u(\mathbf{r}, s)$ от собственного времени s опущена, так как в показателе экспоненты не осталось некоммутирующих операторов).

Нахождение $\langle p(\mathbf{r})\rangle$ сводится к усреднению (3.5) по ансамблю реализаций проницаемости. При проведении усреднения оказывается удобным избавиться от стоящего в показателе экспоненты квадрата выражения, содержащего $\nabla u\left(\mathbf{r} - \int_s^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)$. С этой целью вторично воспользуемся функциональным преобразованием Вейерштрасса

$$\exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^\tau ds \left[\mathbf{X}(s) + \nabla u\left(\mathbf{r} - \int_s^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)\right]^2\right\} = A^{-1}(1, \tau) \int d[\mathbf{Y}(s)] \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_0^\tau ds \left[\mathbf{Y}(s)^2 + i\mathbf{Y}(s)\mathbf{X}(s) + i\mathbf{Y}(s)\nabla u\left(\mathbf{r} - \int_s^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)\right]\right\}. \qquad (3.6)$$

В результате получим

$$\langle p(\mathbf{r})\rangle = k_0^{-1} \int_0^\infty d\tau A^{-1}\left(\frac{1}{4}, \tau\right) A^{-1}(1, \tau) \int d[\mathbf{X}(s)]\, d[\mathbf{Y}(s)] \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_0^\tau ds \left[\mathbf{Y}^2(s) + i\mathbf{Y}(s)\mathbf{X}(s)\right]\right\} \rho\left(\mathbf{r} - \int_0^\tau ds\, \mathbf{X}(s)\right) \times$$
$$\times \left\langle \exp\left\{i\int_0^\tau ds \left[-\mathbf{Y}(s)\nabla + 2i\delta(s)\right] u\left(\mathbf{r} - \int_s^\tau ds' \mathbf{X}(s')\right)\right\}\right\rangle. \qquad (3.7)$$

Входящее в (3.7) среднее по реализациям случайного поля проницаемости, как это легко проверить, представимо в виде

$$\Psi[\theta(\mathbf{x})] = \left\langle \exp\left\{ i \int d\mathbf{x}\, \theta(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle,$$
$$\theta(\mathbf{x}) = \int_0^\tau ds\, [\mathbf{Y}(s)\nabla + 2i\delta(s)]\, \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{r} + \int_s^\tau ds'\, \mathbf{X}(s') \right) \tag{3.8}$$

и может быть интерпретировано как характеристический (производящий) функционал случайного поля $u(\mathbf{x})$, являющийся функциональным фурье-образом функции распределения для u.

Дальнейшее продвижение может быть осуществлено при определенных предположениях о характере статистики для поля проницаемости $k(\mathbf{x})$. Если принять, что распределение k является логнормальным (нормальным для $u = \ln[k(\mathbf{x})/k_0]$) [3, 6, 8], то характеристический функционал может быть легко вычислен, и в случае $\langle u \rangle = 0$ он имеет вид

$$\Psi[\theta(\mathbf{x})] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}'\, \theta(\mathbf{x})\, \theta(\mathbf{x}') B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right\}, \tag{3.9}$$

где $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — парная корреляционная функция случайного поля $u(\mathbf{x})$,

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle u(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}') \rangle, \tag{3.10}$$

которая в рассматриваемом нами случае статистически однородной системы зависит только от разности своих аргументов. Удовлетворить условию $\langle u \rangle = 0$ всегда возможно за счет неоднозначности выбора k_0.

После выполнения преобразования Фурье для $\langle p(\mathbf{r}) \rangle$ с учетом того, что функционал $\Psi[\theta]$ в (3.7) оказывается не зависящим от $\mathbf{r}$, подстановки $\langle p(\mathbf{q}) \rangle$ в (2.7) и использования (3.8), (3.9), получим выражение для фурье-образа обратной эффективной проницаемости:

$$\begin{aligned} k_{eff}^{-1}(\mathbf{q}) = k_0^{-1}\, q^2 \int_0^\infty d\tau\, A^{-1}\left(\frac{1}{4}, \tau \right) A^{-1}(1, \tau) \int d[\mathbf{X}(s)]\, d[\mathbf{Y}(s)] \times \\ \times \exp\left\{ - \int_0^\tau ds\, \left[\mathbf{Y}^2(s) + i\mathbf{Y}(s)\, \mathbf{X}(s) + i\mathbf{q}\mathbf{X}(s) \right] \right\} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\tau ds\, [-\mathbf{Y}(s)\nabla + 2i\delta(s)] \int_0^\tau ds'\, \left[\mathbf{Y}(s')\nabla + 2i\delta(s') \right] B\left(\int_{s'}^{s} ds''\mathbf{X}(s'') \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отметим, что формула (3.11) является точной при единственном условии, что статистика случайного поля проницаемости считается логнормальной; никаких предположений о малости флуктуаций проницаемости не делается. Независимость эффективной проницаемости от плотности источников ρ указывает на то, что эта величина характеризует среду и не связана со свойствами фильтрационных потоков.

4. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ В КРУПНОМАСШТАБНОМ ПРЕДЕЛЕ

Обычно рассматривается предельный случай, когда характерные масштабы фильтрационного потока велики по сравнению с масштабами неоднородностей проницаемости (крупномасштабный предел). В крупномасштабном пределе в формуле (2.5) можно под знаком интеграла положить $\langle p(\mathbf{r}')\rangle \simeq \langle p(\mathbf{r})\rangle$ и вынести это выражение из-под знака интеграла. Такому приближению соответствует замена

$$k_{eff}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \to \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int d\mathbf{r}' k_{eff}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') k_{eff}(\mathbf{q})\big|_{q=0}. \tag{4.1}$$

Таким образом, крупномасштабный предел для k_{eff} получится, если в (3.11) выполнить предельный переход $q \to 0$, который не является тривиальным ввиду неаналитичности интеграла в правой части (3.11) по q в точке $q = 0$. При осуществлении подобного перехода в формуле (3.11) можно выполнить подстановки $\tau \to \tau/q^2$, $s \to s/q^2$ и затем $\mathbf{X}(s/q^2) \to q\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{Y}(s/q^2) \to q\mathbf{Y}(s)$. Результатами этих подстановок окажутся исчезновение множителя q^2 в правой части (3.12) и замены

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q}_0 = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \quad B\left(\int\limits_{s'}^{s} ds''\mathbf{X}(s'')\right) \to B\left(\frac{1}{q}\int\limits_{s'}^{s} ds''\mathbf{X}(s'')\right).$$

Корреляционная функция $B(\mathbf{x})$ отлична от нуля в области порядка корреляционной длины. Замена $B(\mathbf{x}) \to B(\mathbf{x}/q)$ при $q \to 0$ соответствует случаю, когда корреляционная длина стремится к нулю. В результате в $B(\mathbf{x})$ будут давать вклад только траектории минимальной длины $x = \int\limits_{s'}^{s} ds''|\mathbf{X}(s'')|$. Поскольку траекториям с минимальной длиной соответствует движение с постоянной скоростью $\mathbf{X}(s) = \mathrm{const}$, то в крупномасштабном пределе $q \to 0$ в аргументе корреляционной функции в (3.11) можно положить $\mathbf{X}(s) \approx \mathbf{X}_0$.

В этом приближении функциональное интегрирование может быть выполнено до конца с помощью использования рядов Фурье [13]. Для этого заданные в интервале $(0, \tau)$ векторные функции $\mathbf{X}(s)$ и $\mathbf{Y}(s)$ представим в виде разложений:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n \cos\frac{\pi n s}{\tau}, \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Y}_n \cos\frac{\pi n s}{\tau}, \tag{4.2}$$

в результате чего интегрирование по траекториям заменяется на бесконечнократное интегрирование по коэффициентам $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n$.

Интегрирования по $\mathbf{X}_n$ выполняются с помощью легко проверяемой формулы

$$A_n^{-1}\left(\frac{1}{4}, \tau\right) A_n^{-1}(1, \tau) \int d\mathbf{X}_n \exp(i\mathbf{Y}_n\mathbf{X}_n\tau) = \delta(\mathbf{Y}_n), \tag{4.3}$$

что позволяет без труда выполнить последующие интегрирования по $\mathbf{Y}_n$. Далее с помощью тождества

$$\nabla B((s-s')\mathbf{X}_0) = \frac{\mathbf{X}_0}{\mathbf{X}_0^2}\frac{\partial}{\partial s} B\left((s-s')\mathbf{X}_0\right) = -\frac{\mathbf{X}_0}{\mathbf{X}_0^2}\frac{\partial}{\partial s'} B\left((s-s')\mathbf{X}_0\right) \tag{4.4}$$

и правил интегрирования с помощью δ-функций выполним интегрирование по s, s' и найдем

$$k_{eff}^{-1}(\mathbf{q}) = k_0^{-1}\, e^{B(0)/2} \int_0^\infty d\tau A^{-1}\left(\frac{1}{4},\tau\right) A^{-1}(1,\tau) \int d\mathbf{X}\, d\mathbf{Y} \times$$
$$\times \exp\{-(\mathbf{Y}^2 + i\mathbf{Y}\mathbf{X} + i\mathbf{q}\mathbf{X})\tau\} \exp\left\{-\frac{\mathbf{Y}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^2}\left(\frac{\mathbf{Y}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^2} + i\right)[B(0) - B(\mathbf{X}\tau)]\right\} \tag{4.5}$$

(в формуле (4.5) опущены индексы «0» у величин $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$ и $A_0(\alpha,\tau) = \int d\mathbf{X}_0 \exp(-\alpha \mathbf{X}_0^2 \tau)$).

Интегрирование по d-мерному вектору $\mathbf{Y}$ после подстановки $\mathbf{Y} \to \mathbf{Y} - i\mathbf{X}/2$ осуществляется с помощью соотношения

$$\int d\mathbf{Y} \exp\left\{-\mathbf{Y}^2\tau - \frac{(\mathbf{Y}\mathbf{X})^2}{\mathbf{X}^4}[B(0) - B(\mathbf{X}\tau)]\right\} =$$
$$= \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{d/2} \frac{1}{\sqrt{1 + [B(0) - B(\mathbf{X}\tau)]/\mathbf{X}^2\tau}}. \tag{4.6}$$

Выполнить остающееся интегрирование по $\mathbf{X}$ и предельный переход $q \to 0$ удобно с помощью обращения Фурье для $k_{eff}^{-1}(q)$ и последующего интегрирования по полному объему согласно (4.1).

После обратного преобразования Фурье под знаком интеграла в (4.5) появится $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{X}\tau)$, что позволяет выполнить интегрирование по $\mathbf{X}$. В результате найдем

$$k_{eff}^{-1}(\mathbf{r}) = -\frac{k_0^{-1}\, e^{B(0)/2}}{(4\pi)^{d/2}} \Delta \frac{1}{r^{d-2}} \varphi_d(\mathbf{r}),$$
$$\varphi_d(\mathbf{r}) = e^{-[B(0)-B(\mathbf{r})]/4} \int_0^\infty dt\, t^{(d-3)/2}\, [t + B(0) - B(\mathbf{r})]^{-1/2}\, e^{-t/4}, \tag{4.7}$$

где $t = r^2/\tau$. Интегрируя $k_{eff}^{-1}(\mathbf{r})$ по бесконечному объему и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, получаем

$$k_{eff}^{-1} \equiv k_{eff}^{-1}(q)\big|_{q=0} = -\frac{k_0^{-1} e^{B(0)/2}}{(4\pi)^{d/2}} S_d \left[r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi(r)}{r^{d-1}}\right]_{r\to\infty}, \tag{4.8}$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь поверхности d-мерной сферы единичного радиуса.

При вычислении производной в (4.8) следует учесть, что производная $\partial\varphi(r)/\partial r \sim \sim \partial B(r)/\partial r$, которая при $r \to \infty$ предполагается убывающей быстрее r^{-1}. В результате с учетом соотношения $\langle k^{-1}\rangle = k_0^{-1} \exp\{B(0)/2\}$ (см. Приложение В) найдем

$$k_{eff}^{-1} = \langle k^{-1}\rangle \frac{(d-2)\, S_d}{(4\pi)^{d/2}} \varphi_d(\infty). \tag{4.9}$$

Из (4.9) видно, что, поскольку $B(\infty) = 0$, эффективная проницаемость в крупномасштабном пределе действительно оказывается зависящей только от величины $B(0)$, связанной с относительной дисперсией проницаемости D соотношением $B(0) = \ln(1 + D)$ (см. Приложение В). Тем самым подтверждается сделанный на основе теории возмущений вывод о независимости эффективной проницаемости изотропной системы от структуры корреляционной функции.

В общем случае произвольной размерности d определяемый формулой (4.7) интеграл $\varphi(\infty)$ выражается через функции Уиттекера, имеющие при $d-2=0$ особенности вида $\Gamma\left(\pm(d-2)/2\right)$, в результате чего коэффициент k_{eff}^{-1} при $d=2$ оказывается конечным.

В представляющем непосредственный интерес пространственном случае ($d = 3$) величина $\varphi_3(\infty)$ выражается через интеграл вероятности. Результирующее выражение имеет вид

$$k_{eff} = \frac{\langle k\rangle}{(1+D)\,\left[1-\Phi(\sqrt{B(0)}/2)\right]}. \tag{4.10}$$

При малых флуктуациях можно принять $B(0)\approx D$ и представить k_{eff} в виде разложения по степеням D. Воспользовавшись разложением интеграла вероятности $\Phi(x)\approx 2x/\sqrt{\pi}$, нетрудно видеть, что разложение будет содержать полуцелые степени D и результаты теории возмущений не воспроизводятся. Это обстоятельство указывает но то, что разложение в ряд теории возмущений следует рассматривать как асимптотическое и учет высших приближений может существенно изменить представления о характере закономерностей, основанные на анализе результатов низших приближений. С другой стороны, не исключена возможность, что вывод об асимптотическом характере ряда теории возмущений связан с использованием логнормального распределения для восприимчивостей, и в случае другой статистики применение теории возмущений окажется правомерным. Тем не менее укажем на недостатки традиционно используемой схемы теории возмущений, при которой граничные условия соответствуют заданию постоянного градиента давления. Между тем имеет место перенормировка градиента давления, которая не принимается во внимание. В предлагаемом нами подходе перенормировка градиента давления учитывается тем, что в правой части уравнения (2.8) вместо ρ входит $\rho\exp(-u)$. Другая причина невоспроизводимости результатов теории возмущений может заключаться в том, что при проведении почленного усреднения функциональных рядов обычно учитывались только статистические моменты четных порядков, хотя в случае логнормального распределения отличны от нуля и статистические моменты нечетных порядков (см. Приложение В).

Из формулы (4.9), представляющейся точной в крупномасштабном пределе и при предположении о логнормальности распределения проницаемости, можно также сделать вывод о некорректности предположения о том, что низшие приближения теории возмущений соответствуют разложению экспоненты, представляющей точное решение задачи об эффективной проницаемости случайно-неоднородной среды.

В заключение отметим, что полученный результат (4.10) без каких-либо изменений применим также к задаче об эффективной электропроводности смесей и сплавов [14, 15] и ряду других проблем.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функциональное преобразование Вейерштрасса

Преобразованием Вейерштрасса называется соотношение [12]

$$\begin{gathered} \exp\{a\mathbf{F}^2(s)\} = A^{-1}(a)\int d\mathbf{X}\,\exp\left\{-a\left[\mathbf{X}^2+2\mathbf{X}\mathbf{F}(s)\right]\right\}, \\ A(a) = \int d\mathbf{X}\,\exp\{-a\mathbf{X}^2\}. \end{gathered} \tag{A.1}$$

Данное преобразование позволяет представить экспоненту от квадрата некоторой функции (векторной или скалярной) через экспоненту от первой степени этой функции.

Если функция $\mathbf{F}(s)$ задана в интервале $(0,\tau)$, то можно разбить интервал на N участков длиной Δs_i и аппроксимировать $\mathbf{F}(s)$ кусочно-постоянными функциями $\mathbf{F}_i$. Подобная аппроксимация в континуальном пределе $N\to\infty$, $\Delta s_i\to 0$ эквивалентна заданию функции $\mathbf{F}(s)$.

Рассмотрим тождество

$$\begin{gathered}\exp\{\alpha\,\mathbf{F}_i^2\Delta s_i\} = A_i^{-1}(\alpha)\int d\mathbf{X}_i\exp\left\{-\alpha(\mathbf{X}^2+2\mathbf{X}_i\mathbf{F}_i)\Delta s_i\right\},\\ A_i(\alpha)=\int d\mathbf{X}\exp\{-\alpha\mathbf{X}^2\Delta s_i\}.\end{gathered}\tag{A.2}$$

Возьмем произведение левых частей (A.2) и выполним переход к континуальному пределу:

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\exp\{\alpha\mathbf{F}_i^2\Delta s_i\} = \lim_{N\to\infty}\exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^2\Delta s_i\right\}\equiv\exp\left\{\alpha\int_0^{\tau}ds\mathbf{F}^2(s)\right\}.\tag{A.3}$$

Аналогично произведение правых частей (A.2) в континуальном пределе представим в виде

$$\begin{gathered}\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\left\{\int\frac{d\mathbf{X}_i}{A_i(\alpha)}\exp\left\{-\alpha(\mathbf{X}_i^2+2\mathbf{X}_i\mathbf{F}_i)\Delta s_i\right\}\right\}\equiv\\ \equiv\int d[\mathbf{X}(s)]\exp\left\{-\alpha\int_0^{\tau}ds\,\left[\mathbf{X}^2(s)+2\mathbf{X}(s)\mathbf{F}(s)\right]\right\},\end{gathered}\tag{A.4}$$

где интегральная мера

$$d\,[\mathbf{X}(s)] = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\left\{\frac{d\mathbf{X}_i}{A_i(\alpha)}\right\}$$

определяет вклад «траектории» $\mathbf{X}(s)$, проходящей через последовательность точек $\mathbf{X}_i$ из интервала $d\mathbf{X}_i$, взятых в «момент времени» s_i. Интеграл по мере в континуальном пределе следует рассматривать как интеграл по траекториям. Понятие интеграла по траекториям впервые было введено Эйнштейном и Смолуховским в теории броуновского движения и получило затем дальнейшее математическое обоснование в работах Винера.

Результирующая формула

$$\begin{gathered}\exp\left\{\alpha\int_0^{\tau}ds\mathbf{F}^2(s)\right\} = A^{-1}(\alpha,\tau)\int d\,[\mathbf{X}(s)]\exp\left\{-\alpha\int_0^{\tau}ds\,\left[\mathbf{X}^2(s)+2\mathbf{X}(s)\mathbf{F}(s)\right]\right\},\\ A(\alpha,\tau)=\int d\,[\mathbf{X}(s)]\exp\left\{-\alpha\int_0^{\tau}ds\mathbf{X}^2(s)\right\}\end{gathered}\tag{A.5}$$

является функциональным аналогом преобразования Вейерштрасса (A.1). Она была предложена Стратоновичем [11], и ее использование позволяет стоящий в экспоненте интеграл от квадрата некоторой функции выразить через экспоненту, содержащую интеграл от первой степени этой функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Формулы логнормального распределения

Случаю логнормального распределения для $k(\mathbf{x})$ соответствует нормальное распределение для $u(\mathbf{x}) = \ln[k(\mathbf{x})/k_0]$. Вместо функции распределения для $u(\mathbf{x})$ удобно рассматривать ее функциональный фурье-образ, называемый характеристическим функционалом:

$$\Psi[\theta(\mathbf{x})] = \left\langle \exp\left\{ i \int d\mathbf{x}\, \theta(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle. \tag{B.1}$$

Знание характеристического функционала позволяет находить статистические моменты $u(\mathbf{x})$ с помощью операций вариационного дифференцирования

$$\langle u(\mathbf{x}_1)\rangle = \left.\frac{\delta\Psi[\theta(\mathbf{x})]}{i\delta\theta(\mathbf{x}_1)}\right|_{\theta=0}, \quad \langle u(\mathbf{x}_1)u(\mathbf{x}_2)\rangle = -\left.\frac{\delta^2\Psi[\theta(\mathbf{x})]}{\delta\theta(\mathbf{x}_1)\,\delta\theta(\mathbf{x}_2)}\right|_{\theta=0}. \tag{B.2}$$

Статистические моменты для $k(\mathbf{x})$ вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{gathered} \langle k(\mathbf{x}_1)\rangle = k_0\,\Psi[-i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)], \\ \langle k(\mathbf{x}_1)k(\mathbf{x}_2)\rangle = k_0^2\Psi[-i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) - i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)], \\ \langle k^{-1}(\mathbf{x}_1)\rangle = k_0^{-1}\Psi[i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)] \end{gathered} \tag{B.3}$$

и т.д. Для логнормального распределения характеристический функционал задается формулой (3.9). Использование (B.3) в этом случае дает

$$\begin{gathered} \langle k(\mathbf{x})\rangle = k_0\, e^{B(0)/2}, \quad \langle k^{-1}(\mathbf{x})\rangle = k_0^{-1}\, e^{B(0)/2}, \\ \langle k(\mathbf{x}_1)k(\mathbf{x}_2)\rangle = \langle k\rangle^2\, e^{B(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}, \\ \langle k(\mathbf{x}_1)k(\mathbf{x}_2)k(\mathbf{x}_3)\rangle = \frac{\langle k(\mathbf{x}_1)k(\mathbf{x}_2)\rangle\langle k(\mathbf{x}_1)k(\mathbf{x}_3)\rangle\langle k(\mathbf{x}_2)k(\mathbf{x}_3)\rangle}{\langle k\rangle^3}. \end{gathered} \tag{B.4}$$

Из (B.4) в частности следует выражение для относительной дисперсии:

$$D = \frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle^2} - 1 = e^{B(0)} - 1, \quad B(0) = \ln(1+D). \tag{B.5}$$

Литература

1. A. L. Gutjahr, L. W. Geller, A. A. Bakr, and J. R. MacMillan, Water Resour. Res. **14**, 953 (1978).
2. L. W. Gelhar and C. L. Axness, Water Resour. Res. **19**, 161 (1983).
3. М. И. Швидлер, *Стохастическая гидродинамика пористых сред*, Недра, Москва (1985).
4. H. W. Wyld, Ann. Phys. **14**, 143 (1961).
5. P. Indelmann and B. Abramovich, Water Resour. Res. **30**, 1857 (1994).
6. G. Dagan, Trans. Porous Media **12**, 279 (1993).
7. A. De Wit, Phys. Fluids **7**, 2553 (1995).
8. P. R. King, J. Phys. A **20**, 4935 (1987).
9. Э. В. Теодорович, ПММ **55**, 275 (1992).
10. R. P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 118 (1951).
11. Р. Л. Стратонович, Докл. АН СССР **115**, 1097 (1957).
12. Н. И. Хартман, Д. В. Уиддер, *Преобразования типа свертки*, ИИЛ, Москва (1958).
13. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
15. B. Abramovich and P. Indelman, J. Phys. A **28**, 693 (1995).