ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 1(7), стр. 167–179

ЭКСИТОННЫЕ ПОЛОСЫ ПОГЛОЩЕНИЯ И УСИЛЕНИЯ СВЕТА В ПРИСУТСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. А. Москаленко, В. Г. Павлов

Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
MD-2028, Кишинев, Молдова

Поступила в редакцию 17 июня 1996 г.

Рассмотрены полосы поглощения и усиления слабого зондирующего сигнала в присутствии бозе-эйнштейновской конденсации экситонов, возникающей в неравновесных условиях в поле когерентного лазерного излучения с волновым вектором $\mathbf{k}_0$. Полагается, что расстройка резонанса $\tilde{\Delta}$ между энергией экситонного уровня, сдвинутого за счет экситон-экситонного взаимодействия $\hbar\omega_{ex}(\mathbf{k}_0) + L_0$, и энергией фотона лазера $\hbar\omega_L$ в общем случае отлична от нуля. Спектр элементарных возбуждений, состоящий из квазиэкситонной и квазиэнергетической ветвей, определяет оптические свойства системы. В условиях вынужденной реальной бозе-эйнштейновской конденсации при $\tilde{\Delta} = 0$ две ветви спектра касаются друг друга, так же как и при спонтанной бозе-эйнштейновской конденсации. При вынужденной виртуальной бозе-эйнштейновской конденсации, когда $\tilde{\Delta} < 0$, в определенных областях $\mathbf{k}$-пространства возникают нестабильности в спектре, обусловленные реальным выходом двух фотонов лазера и их превращением в две внеконденсатные квазичастицы. Неравновесные внеконденсатные экситоны существенно влияют на поглощение и усиление пробного светового сигнала. Показано, что поглощение света обусловлено квантовым переходом из основного состояния кристалла на квазиэкситонную ветвь спектра. Усиление сигнала происходит за счет перехода из квазиэнергетической ветви спектра в основное состояние кристалла. Этот же переход может быть объяснен реальным выходом двух фотонов лазера с их последующим превращением в фотон вакуума с частотой $\hbar cq$ и экситон кристалла с волновым вектором $2\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}$. Показано, что экситонные полосы поглощения и усиления света являются существенно анизотропными при $\tilde{\Delta} \approx 0$ и зависят от ориентаций векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптический эффект Штарка в экситонной области спектра был изучен в ряде экспериментальных и теоретических работ [1–6]. Интерпретация наблюдаемого явления, предложенная Шмитт-Ринком, Чемла и Хаугом [3, 4], основана на идее вынужденной бозе-эйнштейновской конденсации экситонов, индуцированной внешним когерентным лазерным излучением. В отличие от работы Келдыша и Козлова [7], посвященной спонтанной бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в электронно-дырочном описании, роль химического потенциала играет частота лазерного излучения. Вынужденная бозе-эйнштейновская конденсация может быть реальной, но неравновесной [8], когда когерентные фотоны лазера возбуждают резонансные экситоны в зоне с тем же значением волнового вектора, либо виртуальной, когда частота лазерного излучения существенно отличается от частоты экситонного перехода [3–6]. Именно этот вариант был осуществлен экспериментально в работах [1, 2], где энергия фотонов была меньше энергии самого низкого экситонного уровня. На опыте наблюдалось смещение экситонного уровня после включения ультракороткого лазерного импульса и его возвращение в исходное положение после выключения импульса. Теоретические работы, посвященные этому явлению [3-6], позволили определить ряд особенностей экситонов в полупроводниках в присутствии лазерного излучения, вызывающего макроскопическую когерентную поляризацию кристалла. Так, например, авторы работ [3, 4] показали, что заполнение фазового пространства виртуальными электронами и дырками, возникающими при когерентной макроскопической поляризации, а также их обменное взаимодействие изменяют внутреннюю электронную структуру экситона. Эти явления совершенно аналогичны тем, что имеют место при спонтанной бозе-эйнштейновской конденсации [7]. С ростом концентрации электронно-дырочных пар (или экситонов) n_{ex} в пределе малой плотности $n_{ex}a_{ex}^3 < 1$, где a_{ex} есть боровский радиус экситона, в приближении Хартри–Фока–Боголюбова экситонный уровень смещается в фиолетовую область спектра. Однако, как показано в работе [9], в объемных кристаллах это смещение компенсируется при учете экранирования и корреляционных поправок. Вследствие этого в объемных кристаллах при бозе-эйнштейновской конденсации экситонов экситонный уровень практически не смещается. Тем не менее имеют место его сближение со сплошным спектром электронно-дырочной пары и уменьшение энергии связи экситона. Причиной является понижение энергии основного состояния, приходящейся на одну электронно-дырочную пару в электронно-дырочной плазме, и эффективное уменьшение ширины запрещенной зоны полупроводника при концентрациях $n_{ex}a_{ex}^3 < 1$ [9].

В работе Елесина и Копаева [10] показано, что плотность бозе-конденсированных электронно-дырочных пар в условиях $n_{ex}a_{ex}^3 < 1$ неоднозначно зависит от интенсивности лазерного излучения, а также от расстройки резонанса между частотами лазера и экситонного перехода. Имеют место амплитудный и частотный гистерезисы, присущие явлению оптической бистабильности.

В работах [5, 6] было изучено влияние вынужденного бозе-конденсата экситонов на энергетический спектр внеконденсатных квазичастиц. Спектр элементарных возбуждений в условиях оптического эффекта Штарка существенно отличается от энергетического спектра в теории неидеального бозе-газа и сводится к нему лишь в определенном частном случае. Важной особенностью энергетического спектра внеконденсатных квазичастиц (экситонов, фононов и фотонов вакуума) в присутствии лазерного излучения является его нестабильность. Математически она проявляется в том, что в системе, где затухание не учитывалось, энергетический спектр в определенных областях $\mathbf{k}$-пространства становится комплексным. Одно из двух комплексно-сопряженных решений имеет положительную мнимую часть, что означает неограниченное нарастание во времени его амплитуды и нестабильность в системе. С физической точки зрения нестабильность связана с реальными превращениями двух фотонов лазера в две внеконденсатные квазичастицы, например, в два экситона или в экситон и фотон вакуума. Эти процессы являются реальными, так как сопровождаются одновременным выполнением законов сохранения энергии и импульса, связывающих начальные и конечные состояния. Эти превращения происходят через промежуточные виртуальные состояния. Так, например, два фотона лазера виртуально превращаются в два экситона индуцированного бозе-кондесата, после чего эти два экситона конденсата превращаются виртуально в две внеконденсатные квазичастицы. Реальным процессом является превращение двух фотонов лазера в две внеконденсатные квазичастицы.

Нарастание новых волн в системе может происходить за счет энергии, черпаемой из лазерного излучения, которое полагается для простоты заданным, а значит, неисчерпаемым. Не удивительно, что при такой постановке вопроса возникают неограниченно возрастающие новые волны в системе. Нестабильности могут быть конвективными или абсолютными. В первом случае волны усиливаются по мере проникновения в глубь среды. Система может работать как усилитель волн. Во втором случае нарастающая волна не покидает область зарождения. Она охватывает все большую область кристалла и нарастает во времени. Как отмечено в [11], понятия абсолютной и конвективной нестабильностей являются относительными. Они зависят от системы координат, в которой происходит их наблюдение. В системе координат, движущейся вместе с распространяющейся волной, конвективная нестабильность превращается в абсолютную, а абсолютная — в конвективную. Важно подчеркнуть, что числа заполнения бозевских квазичастиц в областях $\mathbf{k}$-пространства, где возникают нестабильности в спектре элементарных возбуждений, становятся аномально большими. В простейшем варианте системы экситонов без затухания появление нестабильностей является беспороговым процессом. Это означает, что нестабильность появляется при любых малых концентрациях n_{ex} бозе-конденсированных экситонов. В этом простейшем варианте числа заполнения элементарных возбуждений в областях $\mathbf{k}$-пространства, где возникают нестабильности, становятся бесконечно большими. Поскольку процесс экситонного поглощения света связан с переходом из основного состояния кристалла с рождением квазичастицы в конечном состоянии, вероятность этого процесса пропорциональна $(1 + n_{\mathbf{q}})$, где $n_{\mathbf{q}}$ есть среднее число заполнения квазичастиц в конечном состоянии. Когда $\mathbf{q}$ приближается к области нестабильности в пространстве волновых векторов, этот множитель стремится к бесконечности, что обусловливает особенности в спектре экситонного поглощения.

В этом и состоит объяснение некоторых результатов, которые мы приведем ниже. Другая их часть связана с особенностями функции распределения Бозе–Эйнштейна и с анизотропией, обусловленной когерентной макроскопической поляризацией среды. На самом деле в системе имеется затухание и процесс возникновения нестабильности имеет пороговый характер. Нестабильность может иметь место только тогда, когда плотность когерентных экситонов n_{ex} превышает пороговое значение n_c, определяемое затуханием экситонных уровней и константой экситон-экситонного взаимодействия. Квантовые статистические свойства поляритонных систем вблизи соответствующих порогов возникновения нестабильностей изучены в работах Келдыша и Тиходеева [12, 13] на примере стоксова рассеяния когерентных поляритонов на акустических фононах и в работе [14] на примере поляритон-поляритонного комбинационного рассеяния. Келдыш и Тиходеев показали, что вблизи порога вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна в области волновых векторов, где имеет место стоксово рассеяние и возникает нестабильность, функции Грина, описывающие рассеянные поляритоны и акустические фононы, имеют особенность типа $1/\lambda$, где λ есть мера отклонения плотности когерентных поляритонов от порогового значения:

$$n_{ex} = n_c(1 - \lambda), \quad 0 < \lambda \ll 1.$$

Такую же особенность имеют и числа заполнения рассеянных квазичастиц. Этот результат позволяет лучше понять ранее сделанный вывод о стремлении к бесконечности в беспороговом случае средних чисел заполнения элементарных возбуждений с волновыми векторами, лежащими в области нестабильности. Как показано в [14], вынужденное комбинационное рассеяние когерентно-возбуждаемых поляритонов имеет размытый порог. По-видимому, этот факт может сгладить сингулярность типа $1/\lambda$.

Ниже мы изучим вероятность поглощения и усиления слабого зондирующего светового сигнала при переходе из основного состояния кристалла в экситонное состояние в случае, когда кристалл находится в поле интенсивного когерентного лазерного излучения, вызывающего когерентную макроскопическую поляризацию среды. Речь идет о вероятности перехода, когда рождается еще один экситон в присутствии большого числа реальных или виртуальных экситонов, созданных в стационарных условиях когерентным лазерным излучением. Присутствие лазерного излучения и когерентной поляризации среды есть тот важный фактор, который приводит к возможности усиления слабого сигнала и отличает данное экситонное поглощение от ранее изученного в невозбужденных кристаллах.

2. ГАМИЛЬТОНИАН И ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Гамильтониан экситонов, взаимодействующих между собой, с лазерным излучением и с фотонами вакуума, имеет вид [5, 6]

$$H = \sum_{\mathbf{p}} E_{ex}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}} \hbar c p \mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}} \lambda_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} \mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+}) +$$

$$+ \lambda_{\mathbf{k}_0} (a_{\mathbf{k}_0}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{k}_0} + a_{\mathbf{k}_0} \mathscr{C}_{\mathbf{k}_0}^{+}) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{k}} \nu(k) a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{q}}^{+} a_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}, \tag{1}$$

где E_{ex} — энергия экситона, $\hbar c p$ — энергия фотона, $a_{\mathbf{p}}^{+}$, $a_{\mathbf{p}}$, $\mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\mathscr{C}_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения экситонов и фотонов, $\nu(k)$, $\lambda_{\mathbf{p}}$ — константы экситон-экситонного и экситон-фотонного взаимодействий соответственно, $\lambda_{\mathbf{k}_0}$ — константа взаимодействия экситонов с лазерным излучением, V — объем системы.

Предполагается, что лазерное излучение имеет волновой вектор $\mathbf{k}_0$ и частоту фотонов $\omega_L = ck_0$. Антирезонансные члены взаимодействия не учитываются. Когерентное лазерное излучение вводится в (1) заменой операторов $\mathscr{C}_{\mathbf{k}_0}^{+}$, $\mathscr{C}_{\mathbf{k}_0}$ на выражения типа

$$C_{\mathbf{k}_0} = \sqrt{F_{\mathbf{k}_0}} \exp(-i\omega_L t - i\varphi), \quad F_{\mathbf{k}_0} \sim V. \tag{2}$$

Квантовые одночастичные состояния фотонов с $\mathbf{p} \neq \mathbf{k}_0$ описывают электромагнитное поле вакуума и слабого широкополосного пробного сигнала. Явная зависимость от времени в гамильтониане (1), возникающая после замены операторов $\mathscr{C}_{\mathbf{k}_0}^{+}$, $\mathscr{C}_{\mathbf{k}_0}$ на выражения (2), может быть исключена переходом во вращающуюся с частотой ω_L систему координат. Это достигается унитарным преобразованием

$$\hat{V} = e^{-i\omega_L t \hat{N}}; \quad \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}} + \mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{p}}) \tag{3}$$

и рассмотрением нового гамильтониана

$$\mathscr{H} = V^{+} H V - \hbar \omega_L \hat{N}, \tag{4}$$

у которого свободные квазичастицы характеризуются энергетическим спектром, отсчитанным от частоты ω_L:

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{p}} \hbar \Big[\omega_{ex}(\mathbf{p}) - \omega_L \Big] a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}} \hbar \left(cp - \omega_L \right) \mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}} \lambda_{\mathbf{p}} \left(\mathscr{C}_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^{+} \mathscr{C}_{\mathbf{p}} \right) +$$

$$+ \sqrt{F_{\mathbf{k}_0}} \left(a_{\mathbf{k}_0}^{+} + a_{\mathbf{k}_0} \right) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{k}} \nu(k) a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{q}}^{+} a_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}. \tag{5}$$

Линейные по операторам $a^+_{\mathbf{k}_0}$, $a_{\mathbf{k}_0}$ члены могут быть устранены операцией сдвига Боголюбова [15]

$$a_{\mathbf{p}} = \sqrt{N_{\mathbf{k}_0}} e^{-i\phi} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}_0} + \alpha_{\mathbf{p}}, \tag{6}$$

$\alpha_{\mathbf{p}}$ — малая квантовая добавка. Макроскопическое заполнение $N_{\mathbf{k}_0}$ экситонной моды $\mathbf{k}_0$ связано с $F_{\mathbf{k}_0}$ соотношениями [10]

$$\begin{gathered} n_{\mathbf{k}_0} = \frac{\lambda^2_{\mathbf{k}_0} f_{\mathbf{k}_0}}{\tilde{\Delta}^2 + \gamma^2_{ex}}, \quad n_{\mathbf{k}_0} = \frac{N_{\mathbf{k}_0}}{V}, \quad f_{\mathbf{k}_0} = \frac{F_{\mathbf{k}_0}}{V}, \\ \tilde{\Delta} = \hbar\Big[\omega_{ex}(\mathbf{k}_0) - \omega_L\Big] + L_0, \quad L_{\mathbf{k}} = \nu(k) n_{\mathbf{k}_0}. \end{gathered} \tag{7}$$

Мы всюду полагаем, что между экситонами преобладает отталкивание $L_{\mathbf{k}} > 0$. Затухание γ_{ex} введено здесь феноменологически. Оно входит в выражение, которое описывает явление оптической бистабильности в экситонной области спектра. После разложения гамильтониана (5) по малым операторам $\alpha^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k} \neq 0$, можно выделить аддитивную константу, квадратичную часть и члены более высокого порядка малости. Для нас представляет интерес только квадратичная часть, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{(2)} = {} & \sum_{\mathbf{k}} \Big\{\hbar\big[\omega_{ex}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) - \omega_L\big] + L_0 + L_{\mathbf{k}}\Big\} \alpha^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}} \left(e^{-2i\phi} \alpha^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \alpha^+_{\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + e^{2i\phi} \alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}\right) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \left(c|\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}| - \omega_L\right) \mathscr{C}^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \mathscr{C}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \left(\mathscr{C}^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} + a^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} \mathscr{C}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Ниже мы будем рассматривать фотоны вакуума как причину квантовых переходов и воспользуемся диагонализацией экситонной части гамильтониана (8), выполненной в [6]. В этом случае, не нарушая общности, можно положить $\phi = 0$.

Диагонализация была достигнута [6] введением операторов $\xi^+_{\mathbf{k}}$, $\xi_{\mathbf{k}}$ с помощью унитарного преобразования Боголюбова [15]:

$$\xi_k = \frac{\alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}} \alpha^+_{\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - |A_{\mathbf{k}}|^2}}, \quad \alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} = \frac{\xi_{\mathbf{k}} - A_{\mathbf{k}} \xi^+_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - |A_{\mathbf{k}}|^2}}, \tag{9}$$

где коэффициенты $A_{\mathbf{k}}$ зависят от энергии элементарного возбуждения в виде

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{\tilde{\Delta} + T_{\mathbf{k}} + L_{\mathbf{k}} - \mathscr{E}(\mathbf{k})}{L_{\mathbf{k}}}. \tag{10}$$

Здесь

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \sqrt{\left(\tilde{\Delta} + L_{\mathbf{k}} + T_{\mathbf{k}}\right)^2 - L^2_{\mathbf{k}}} \tag{11}$$

есть составная часть полной энергии элементарного возбуждения $E(\mathbf{k})$

$$E(\mathbf{k}) = \mathscr{E}(\mathbf{k}) + \hbar \mathbf{V}_s \mathbf{k}, \quad \mathbf{V}_s = \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{m_{ex}}, \tag{12}$$

которая зависит от скорости $\mathbf{V}_s$ движения индуцированного конденсата. Она определяется импульсом фотона лазера $\hbar \mathbf{k}_0$ и трансляционной массой экситона m_{ex}. Для того чтобы коэффициенты $A_\mathbf{k}$ удовлетворяли во всей области $\mathbf{k}$-пространства условию

$$|A_\mathbf{k}| \leq 1, \tag{13}$$

необходимо выбрать такой знак перед квадратным корнем в (11), который совпадает со знаком выражения $(\tilde{\Delta}+T_\mathbf{k}+L_\mathbf{k})$. Это решение будем обозначать через $\mathscr{E}_1(\mathbf{k})$ и определим его по правилу

$$\operatorname{sign} \mathscr{E}_1(k) = \operatorname{sign}(\tilde{\Delta} + T_\mathbf{k} + L_\mathbf{k}). \tag{14}$$

Тогда коэффициенты $A_{\mathbf{k},1}$ удовлетворяют условию (13). Выбранная таким образом энергия $E_1(\mathbf{k})$ в общих чертах повторяет закон дисперсии исходной экситонной ветви спектра $(\hbar\omega_{ex}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) - \hbar\omega_L + L_0 + L_\mathbf{k})$, которая присутствует в эффективном гамильтониане (8). Поэтому элементарные возбуждения с энергией $E_1(\mathbf{k})$ будем называть квазиэкситонными элементарными возбуждениями. Наряду с энергией $E_1(\mathbf{k})$ имеется и вторая квазиэнергетическая ветвь спектра с энергией $E_2(\mathbf{k})$, которая определяется значением $\mathscr{E}_2(\mathbf{k}) = -\mathscr{E}_1(\mathbf{k})$ и свойством

$$E_2(\mathbf{k}) = \mathscr{E}_2(\mathbf{k}) + \hbar \mathbf{V}_s \mathbf{k} = -\mathscr{E}_1(\mathbf{k}) + \hbar \mathbf{V}_s \mathbf{k} = -E_1(-\mathbf{k}). \tag{15}$$

Она повторяет в общих чертах исходную квазиэнергетическую ветвь спектра $(\hbar\omega_L - \hbar\omega_{ex}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) - L_0 - L_k)$. Коэффициенты $A_{\mathbf{k},2}$ получаются при подстановке в (10) $\mathscr{E}_2(\mathbf{k})$ вместо $\mathscr{E}(\mathbf{k})$. Они обладают свойствами

$$A_{\mathbf{k},2} A_{\mathbf{k},1} = 1, \quad |A_{\mathbf{k},2}| \geq 1. \tag{16}$$

Хотя имеются два близких уровня энергии: один квазиэкситонный и другой квазиэнергетический, есть лишь один набор независимых операторов $\xi_\mathbf{k}^+, \xi_\mathbf{k}$ (9) со всеми возможными значениями $\mathbf{k}$. В качестве такого набора выберем операторы, соответствующие коэффициентам $A_{\mathbf{k},1}$ и энергии элементарного возбуждения $E_1(\mathbf{k})$. Для простоты значок «1» у операторов $\xi_{\mathbf{k},1}^+, \xi_{\mathbf{k},1}$ и у коэффициентов $A_{\mathbf{k},1}$ опустим, сохранив его лишь у ветви спектра $E_1(\mathbf{k})$.

Полный набор операторов $\xi_\mathbf{k}^+, \xi_\mathbf{k}, \xi_{-\mathbf{k}}^+, \xi_{-\mathbf{k}}$ с коэффициентами $|A_\mathbf{k}| \leq 1$ и энергиями $E_1(\mathbf{k})$ является достаточным для описания элементарных возбуждений обоих типов и квантовых переходов в системе.

Как будет видно из дальнейшего, для этого необходимо учесть как резонансные, так и антирезонансные квантовые переходы. После диагонализации экситонной части квадратичного гамильтониана (8) и введения новых фотонных операторов

$$\eta_\mathbf{k} = \mathscr{C}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}},$$

гамильтониан $\mathscr{H}^{(2)}$ примет вид

$$\mathscr{H}^{(2)} = \sum_\mathbf{k} E_1(\mathbf{k}) \xi_\mathbf{k}^+ \xi_\mathbf{k} + \sum_\mathbf{k} \hbar \left(c|\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}| - \omega_L \right) \eta_\mathbf{k}^+ \eta_\mathbf{k} +$$
$$+ \sum_\mathbf{k} \frac{\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - |A_\mathbf{k}|^2}} \left(\xi_\mathbf{k}^+ \eta_\mathbf{k} + \eta_\mathbf{k}^+ \xi_\mathbf{k} - A_\mathbf{k}^* \xi_{-\mathbf{k}} \eta_\mathbf{k} - A_\mathbf{k} \xi_\mathbf{k}^+ \eta_{-\mathbf{k}}^+ \right). \tag{17}$$

Основное состояние системы экситонов в кристалле, поляризованном когерентным лазерным излучением, является вакуумным состоянием для операторов элементарных возбуждений $\xi_{\mathbf{k}}$:

$$\xi_{\mathbf{k}}|0\rangle_{ex} = 0. \tag{18}$$

Неравновесная функция распределения элементарных возбуждений, следуя работе [14], зависит от абсолютного значения их энергии $N(E_1(\mathbf{k})) = N(|E_1(\mathbf{k})|)$. Поэтому основное состояние (18) стабильно, даже если значения $E_1(\mathbf{k})$ во вращающейся системе координат отрицательны. Даже в этом случае элементарные возбуждения самопроизвольно не возникают.

Однако в этом состоянии кристалла имеются отличные от нуля числа заполнения исходных экситонных состояний

$$\langle \alpha^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}\rangle = n^{ex}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} = \frac{|A_{\mathbf{k}}|^2}{|1-|A_{\mathbf{k}}|^2|}, \tag{19}$$

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}\alpha^+_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}\rangle = 1 + n^{ex}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} = \frac{1}{|1-|A_{\mathbf{k}}|^2|}. \tag{20}$$

Таким образом, в присутствии резонансного или нерезонансного лазерного излучения возникает экситонный газ большой плотности, состоящий из реальных или виртуальных экситонов. Виртуальные экситоны отличаются от реальных квазичастиц тем, что они существуют только в течение действия лазерного импульса и исчезают одновременно с его выключением. Реальные экситоны продолжают существовать в течение времени их жизни. В нулевом приближении состояния поляризованного кристалла и фотонного поля вакуума являются независимыми, так как экситон-фотонный гамильтониан служит в данном случае лишь причиной квантовых переходов. Учет поляритонного эффекта в присутствии когерентной макроскопической поляризации был выполнен в [5]. Следуя работе [16], рассмотрим квантовый переход под действием света из основного состояния $|0\rangle$ когерентно поляризованного кристалла в квазиэкситонное состояние с волновым вектором $\mathbf{P}$, определяемом как $\xi^+_{\mathbf{P}}|0\rangle$. Начальное и конечное состояния двухкомпонентной системы, состоящей из поляризованного кристалла и поля вакуума, запишем во вращающейся системе координат в виде

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |0\rangle_{ex}\eta^+_{\mathbf{Q}}|0\rangle_{ph}, \quad E_i = \hbar\left(c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \omega_L\right), \\ |f\rangle &= \xi^+_{\mathbf{P}}|0\rangle_{ex}|0\rangle_{ph}, \quad E_f = E_1(\mathbf{P}) = \mathscr{E}_1(\mathbf{P}) + \hbar\mathbf{V}_s\mathbf{P}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $|0\rangle_{ph}$ есть основное состояние фотонов вакуума.

Амплитуда перехода на гамильтониане взаимодействия, входящего в (19), равна

$$\langle i|H_{int}|f\rangle = \delta_{\mathbf{Q},\mathbf{P}}\frac{\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{P}}}{\sqrt{1-|A_{\mathbf{P}}|^2}}. \tag{22}$$

Вероятность перехода, просуммированная по конечным состояниям $\mathbf{P}$ при заданном векторе $\mathbf{Q}$ фотона в начальном состоянии, равна

$$P_{absorb}(\mathbf{Q}) = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{|\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}}|^2}{|1-|A_{\mathbf{Q}}|^2|}\delta\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L - E_1(\mathbf{Q})\right). \tag{23}$$

Вероятность перехода зависит от волнового вектора фотона вакуума $\mathbf{Q}$, отсчитанного от волнового вектора фотона лазера $\mathbf{k}_0$. Полный волновой вектор фотона вакуума есть $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{Q}$. Его энергия есть $\hbar\omega = \hbar cq = \hbar c|\mathbf{k}_0 + \mathbf{Q}|$. Вероятность перехода, записанная как функция от волнового вектора $\mathbf{q}$, имеет вид

$$P_{absorb}(\mathbf{q}) = \frac{2}{\hbar}\frac{|\lambda_{\mathbf{q}}|^2}{|1-|A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2|}\frac{\Gamma(\mathbf{q}-\mathbf{k}_0)}{(\hbar\omega - \hbar\omega_L - E_1(\mathbf{q}-\mathbf{k}_0))^2 + \Gamma^2(\mathbf{q}-\mathbf{k}_0)}, \quad \hbar cq = \hbar\omega. \tag{24}$$

Здесь введено затухание $\Gamma(\mathbf{Q})$ для элементарного возбуждения с энергией $E_1(\mathbf{Q})$ и использовано представление для δ-функции в виде лоренциана

$$\delta(\chi) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma}{\chi^2+\Gamma^2}, \quad \Gamma \to 0. \tag{25}$$

Вероятность перехода существенно зависит от ориентации вектора $\mathbf{q}$ по отношению к вектору $\mathbf{k}_0$. Эта зависимость особенно сильно проявляется через коэффициенты $|A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2$ и будет обсуждена в следующем разделе.

Однако квантовый переход с поглощением фотона, сопровождаемый стоксовым процессом рождения квазиэкситонного элементарного возбуждения, не является единственным. Имеются еще три возможных квантовых перехода. Один из них — это антистоксов процесс поглощения фотона и квазиэкситонного элементарного возбуждения. Это антирезонансный квантовый переход. Однако вероятность этого перехода равна нулю. Это связано с тем, что при $T = 0$ в основном состоянии отсутствуют квазиэкситонные элементарные возбуждения.

Остается стоксов процесс излучения света с одновременным рождением квазиэкситонного элементарного возбуждения. Для него начальным состоянием является вакуумное состояние, а конечным состоянием является двухчастичное состояние:

$$\begin{aligned} &|i\rangle = |0\rangle_{ex}|0\rangle_{ph}, \\ &|f\rangle = \xi^+_{\mathbf{P}}|0\rangle_{ex}\eta^+_{\mathbf{Q}}|0\rangle_{ph}, \\ &E_f = \hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L + E_1(\mathbf{P}), \quad E_i = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Этот переход также является антирезонансным. В конечном двухчастичном состоянии имеется фотон с фиксированным волновым вектором $\mathbf{Q}$ и вторая квазичастица, а именно, — квазиэкситонное элементарное возбуждение с произвольным волновым вектором $\mathbf{P}$. Вероятность перехода на третьем члене гамильтониана взаимодействия (17), просуммированная по конечным состояниям $\sum_{\mathbf{P}}$ и усредненная по начальным состояниям, которое в данном случае является одним единственным, имеет вид

$$P_{emit}(\mathbf{Q}) = \frac{2\pi|\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}}|^2}{\hbar}\frac{|A_{\mathbf{Q}}|^2}{|1-|A_{\mathbf{Q}}|^2|}\delta\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L + E_1(-\mathbf{Q})\right). \tag{27}$$

Закон сохранения энергии, отвечающий этому двухчастичному антирезонансному процессу, имеет вид

$$\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L + E_1(-\mathbf{Q}) = 0, \quad \hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| = \hbar\omega_L + E_2(\mathbf{Q}). \tag{28}$$

Помня, что ветвь спектра $\hbar\omega_L + E_1(-\mathbf{Q})$ приближенно напоминает закон дисперсии экситона $\hbar\omega_{ex}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{Q})$, уравнение (28) можно приближенно переписать в виде

$$\hbar c|\mathbf{k}_0 + \mathbf{Q}| + \hbar\omega_{ex}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{Q}) \approx 2\hbar\omega_L. \tag{29}$$

Оно свидетельствует о протекании в системе реакции превращения двух фотонов лазера в фотон слабого источника и внеконденсатный экситон по схеме

$$\text{фотон}(\mathbf{k}_0) + \text{фотон}(\mathbf{k}_0) = \text{фотон}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{Q}) + \text{экситон}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{Q}). \tag{30}$$

Эти соображения показывают, что единственная причина излучения и усиления слабого сигнала есть внешнее лазерное излучение. Здесь уместно напомнить результаты, полученные ранее [17, 18] при исследовании форм полос поглощения и люминесценции при $T = 0$ в условиях спонтанной квазиравновесной бозе-эйнштейновской конденсации экситонов в полупроводниках. Формы полос состояли из острых центральных пиков на частотах, близких к энергии бозе-конденсированных экситонов, и более широких крыльев. Крыло полосы поглощения находилось со стороны больших энергий по отношению к центральному пику. Интенсивность крыла определялась коэффициентами $U_{\mathbf{q}}^2 = 1 + n_{\mathbf{q}}^{ex}$. В процессе поглощения света рождалось одновременно и элементарное возбуждение. Крыло полосы люминесценции находилось со стороны меньших энергий по отношению к центральному пику, поскольку одновременно с излученным фотоном излучалось и элементарное возбуждение. Интенсивность крыла была пропорциональна коэффициенту $V_{\mathbf{q}}^2 = n_{\mathbf{q}}^{ex}$, который меньше, чем $U_{\mathbf{q}}^2$. Аналогичная ситуация описана формулой (31). Заметим, что вероятность антистоксова процесса излучения фотона с одновременным поглощением квазиэкситонного элементарного возбуждения равна нулю, так как при $T = 0$ элементарные возбуждения отсутствуют. Таким образом, имеется вероятность поглощения света (23) и вероятность излучения фотона (27) в этой же системе. Вероятность поглощения света за вычетом вероятности его излучения дает вероятность истинного поглощения:

$$\begin{aligned} P_{net\,absorb}(\mathbf{Q}) &= P_{absorb}(\mathbf{Q}) - P_{emit}(\mathbf{Q}) = \\ &= \frac{2\pi|\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}}|^2}{\hbar}\left[\frac{1}{|1-|A_Q|^2|}\delta\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L - E_1(\mathbf{Q})\right) - \right. \\ &\left. - \frac{|A_Q|^2}{|1-|A_Q|^2|}\delta\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L + E_1(-\mathbf{Q})\right)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

В тех областях частот $\hbar\omega$, где эта разность положительна, имеет место истинное поглощение света, а там, где она отрицательна, имеет место истинное излучение или усиление света. После замены δ-функций на лоренцианы найдем искомую вероятность при $T = 0$ в виде

$$\begin{aligned} P_{net\,absorb}(\mathbf{Q}) = \frac{2|\lambda_{\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}}|^2}{\hbar}&\left[\frac{1}{|1-|A_Q|^2|}\,\frac{\Gamma(\mathbf{Q})}{\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L - E_1(\mathbf{Q})\right)^2 + \Gamma^2(\mathbf{Q})} - \right. \\ &\left. - \frac{|A_Q|^2}{|1-|A_Q|^2|}\,\frac{\Gamma(-\mathbf{Q})}{\left(\hbar c|\mathbf{k}_0+\mathbf{Q}| - \hbar\omega_L + E_1(-\mathbf{Q})\right)^2 + \Gamma^2(-\mathbf{Q})}\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

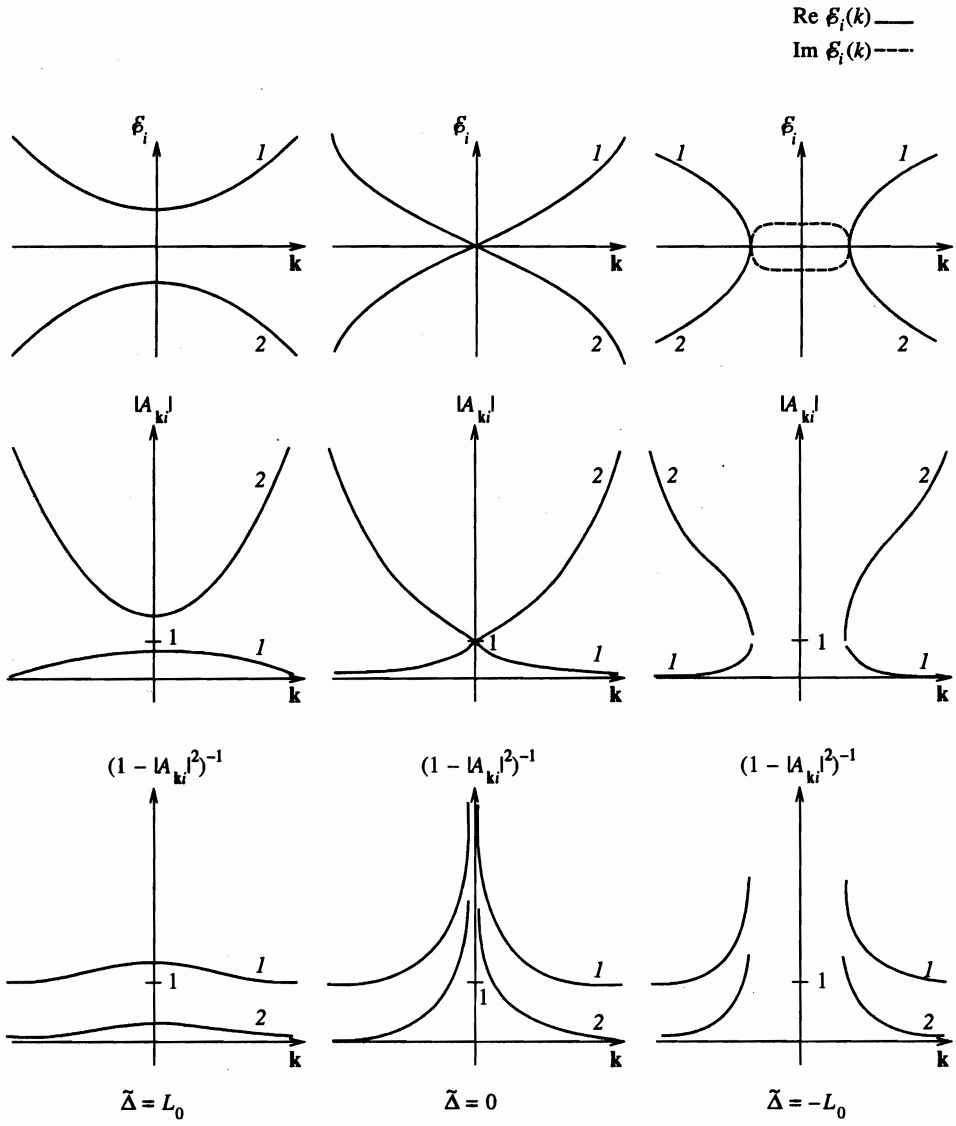

Рис. 1. Зависимости энергетического спектра $\mathscr{E}_i(\mathbf{k})$, коэффициентов $|A_{\mathbf{k}i}|$ и множителя $(1-|A_{\mathbf{k}i}|^2)^{-1}$ от волнового вектора $\mathbf{k}$ при различных значениях расстройки резонанса $\tilde{\Delta}$. *1* — решение первого типа, *2* — решение второго типа

3. АНИЗОТРОПИЯ ЭКСИТОННЫХ ПОЛОС ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ В КОГЕРЕНТНО ПОЛЯРИЗОВАННОМ КРИСТАЛЛЕ

На рис. 1 приведены зависимости от волнового вектора $\mathbf{k}$ энергетического спектра $\mathscr{E}_i(\mathbf{k})$ (11), коэффициентов $A_{\mathbf{k}i}$ (10) и выражения $(1-|A_{\mathbf{k}i}|^2)^{-1}$ для некоторых значений расстройки резонанса $\tilde{\Delta}$ (7), равных $\tilde{\Delta}=L_0$, 0, $-L_0$. Функции $\mathscr{E}_i(\mathbf{k})$ были получены ранее в [6]. Однако коэффициенты $A_{\mathbf{k}i}$ и вероятности квантовых переходов не были исследованы.

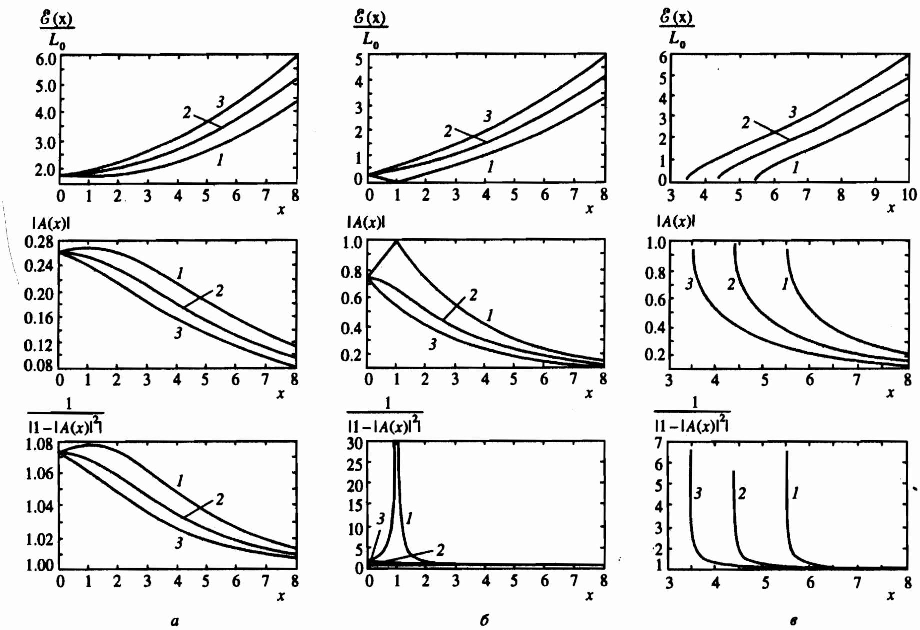

Рис. 2. Частотные зависимости $\mathscr{E}_1(x)$, $|A(x)|$ и $(1-|A(x)|^2)^{-1}$ при различных расстройках резонанса (*а* — $\tilde{\Delta} = L_0$, *б* — $\tilde{\Delta} = 0$, *в* — $\tilde{\Delta} = -L_0$) и для трех ориентаций волнового вектора $\mathbf{q}$ зондирующего света по отношению к волновому вектору $\mathbf{k}_0$ лазерного излучения: *1* — $\mathbf{q} \uparrow\uparrow \mathbf{k}_0$, *2* — $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}_0$, *3* — $\mathbf{q} \downarrow\uparrow \mathbf{k}_0$

Эти же выражения, рассмотренные как функции от $|\mathbf{q}-\mathbf{k}_0|$, зависят от ориентации вектора $\mathbf{q}$ зондирующего света по отношению к вектору $\mathbf{k}_0$ лазерного излучения, создающего когерентную макроскопическую поляризацию среды. Представляют интерес три возможные геометрии наблюдения коэффициента поглощения света, а именно $\mathbf{q} \uparrow\uparrow \mathbf{k}_0$, $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{q} \downarrow\uparrow \mathbf{k}_0$, т. е. когда зондирующее излучение распространяется вдоль направления лазерного излучения, перпендикулярно или антипаралельно ему.

Модуль $|(\mathbf{q}-\mathbf{k}_0)/\mathbf{k}_0|$ принимает различные значения при одном и том же значении модуля $|\mathbf{q}| = x|\mathbf{k}_0|$, где $\infty > x > 0$, в зависимости от ориентации вектора $\mathbf{q}$ по отношению к вектору $\mathbf{k}_0$. Они равны $|x-1|$, $\sqrt{x^2+1}$ и $(x+1)$ соответственно для параллельной, перпендикулярной и антипараллельной ориентаций.

По этой причине энергетический спектр $\mathscr{E}_1(\mathbf{q}-\mathbf{k}_0)$, коэффициенты $|A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|$ и множитель $(1-|A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2)^{-1}$ как функции от x приведены для трех ориентаций вектора $\mathbf{q}$ по отношению к вектору $\mathbf{k}_0$. Зависимости от x означают в то же время зависимости от частоты поглощаемого света, поскольку $\hbar\omega = \hbar c q = x\hbar c k_0 = x\hbar\omega_L$, где $x > 0$. Эти зависимости приведены на рис. 2*а, б, в*. Каждый из этих трех рисунков приведен для определенной расстройки резонанса $\tilde{\Delta}$ и содержит частотные зависимости $\mathscr{E}_1(x)$, $|A(x)|$ и $(1-|A(x)|^2)^{-1}$ для трех геометрий наблюдения.

Зависимость множителя $(1-|A(x)|^2)^{-1}$, изображенная на рис. 2, имеет четко выраженную анизотропию. Она проявляется при положительной расстройке резонанса $\tilde{\Delta} = L_0$ и составляет около 2%. При больших положительных значениях $\tilde{\Delta}$ анизотропия становится исчезающе малой, так как коэффициенты $|A_\mathbf{k}|$ для экситоноподобной ветви спектра становятся много меньше единицы. При $\tilde{\Delta} = 0$ мы имеем реальный, но неравновесный вынужденный бозе-конденсат экситонов с волновым вектором $\mathbf{k}_0$. Числа заполнения экситонов (15) $n^{ex}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}}$ при $k \to 0$ становятся бесконечно большими, как это следует из функции распределения Бозе–Эйнштейна с химическим потенциалом равным нулю. Возникает резкое различие между числами заполнения

$$n^{ex}_{\mathbf{k}_0+\mathbf{k}} = n^{ex}_{\mathbf{q}} = \frac{|A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2}{1 - |A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k} \tag{33}$$

для случаев, когда вектор $\mathbf{q}$ стремится к вектору $\mathbf{k}_0$ или к вектору $-\mathbf{k}_0$. Поскольку коэффициенты поглощения света пропорциональны множителю $(1 + n^{ex}_{\mathbf{q}})$, возникает резкая анизотропия поглощения света.

При отрицательных значениях $\tilde{\Delta}$ возникают нестабильности в спектре. Они были обсуждены выше. В областях волновых векторов, где имеют место нестабильности, коэффициенты $|A_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ и соответствующие числа заполнения обращаются в бесконечность.

В этих областях волновых векторов канонические преобразования (9) не применимы. Здесь имеет место генерация новых волн и вынужденное рассеяние экситонов. В нашем случае оно беспороговое, так как не учтено затухание энергетического спектра затравочных экситонов. Поскольку числа неравновесных экситонов в окрестностях этих областей в $\mathbf{k}$-пространстве становятся аномально большими, то и коэффициент поглощения света становится также аномально большим. Это и наблюдается на рис. 2*в*. Интересно отметить, что и области, где возможно аномальное поглощение света, также смещаются на энергетической шкале в зависимости от геометрии наблюдения. Помимо множителя $(1 - |A(x)|^2)^{-1}$ вероятности истинного поглощения света (31), (32) содержат второй множитель, который в одном случае имеет вид δ-функции, а в другом — вид лоренциана. Лоренциан также может обнаружить различную частотную зависимость при различных ориентациях векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_0$. Однако лоренциан зависит от малой разности таких величин как $\hbar\omega$ и $\hbar\omega_L$, каждая из которых является большой по сравнению со спектром элементарных возбуждений $E_1(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0) = \mathscr{E}_1(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0) + \hbar\mathbf{V}_s(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0)$. Поэтому анизотропия более четко проявляется через множитель $(1 - |A_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_0}|^2)^{-1}$. Более того, если аргументы под знаком δ-функций в формуле (31) или у соответствующих лоренцианов совпадали бы точно, то всякая анизотропия, обсужденная выше, исчезала бы. В этом случае области, где имеет место чистое поглощение и чистое излучение, налагаются друг на друга и их анизотропии в точности компенсируются.

Таким же образом анизотропия становится незаметной, если лоренцианы имеют полуширину, большую, чем ширина $2|\mathscr{E}_1(\mathbf{Q})|$. Наиболее благоприятные условия наблюдения анизотропии полос поглощения и люминесценции соответствуют случаю $\Gamma(\mathbf{Q}) < |\mathscr{E}_1(\mathbf{Q})|$ и небольшим расстройкам резонанса $\tilde{\Delta}$, когда $|A_{\mathbf{Q}}|^2$ близки к единице.

Напомним, что анизотропия двухфотонного поглощения при переходе из основного состояния кристалла в биэкситонное состояние в присутствии лазерного излучения была изучена в работе [19]. В случае вырожденных экситонных уровней возможно их расщепление и поляризация соответствующих квантовых переходов. Эти вопросы в условиях оптического эффекта Штарка были изучены Комбеско [20]. В отличие от этой работы, в нашем случае экситонный уровень не вырожден, а анизотропия квантовых переходов зависит от направления распространения зондирующего сигнала по отношению к волновому вектору лазерного излучения.

В заключение заметим, что свойства полос поглощения и усиления света существенно зависят от значений $n_{\mathbf{k}_0}$ и $\tilde{\Delta}$. Эти величины взаимозависимы и должны быть определены самосогласованным образом по формуле (7). В общем случае они описывают бистабильную кривую, обладающую амплитудным и частотным гистерезисами. Стационарные значения $n_{\mathbf{k}_0}$, расположенные в области петель гистеререзиса или в их окрестностях, как правило, нестабильны по Ляпунову. В этих случаях амплитуда когерентной волны испытывает самопульсации и стационарный режим превращается в автоколебательный. Самопульсации могут быть циклическими, если фазовая траектория описывает предельный цикл. В более сложных случаях фазовая траектория может двигаться по поверхности тора или образовать странный аттрактор [21]. Тем более такие самопульсации могут возникнуть в момент включения или выключения когерентной накачки. Это явление было исследованно в случае вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна в работе Келдыша и Тиходеева [13]. Показано, что самопульсации амплитуды антистоксовой компоненты происходят с частотой, определяемой расщеплением фоноритонных кривых. Амплитуда стоксовой компоненты испытывает неограниченное возрастание во времени, если плотность когерентных поляритонов превышает пороговое значение. Это связанно с возникновением абсолютной или конвективной нестабильности в поляритон-фононной системе. Аналогичные явления могут иметь место и в изучаемой нами системе. Авторы признательны С. Г. Тиходееву, обратившему наше внимание на эти эффекты.

Выполнение данной работы стало возможным благодаря финансовой поддержке, полученной в рамках международного проекта INTAS (грант № 94-324). Авторы выражают благодарность координатору проекта К. Клингсхирну, а также М. С. Бродину за сотрудничество.

Литература

1. A. Mysyrowicz, D. Hulin, A. Antonetti et al., Phys. Rev. Lett. **56**, 2748 (1986).
2. A. von Lehmen, D. S. Chemla, J. E. Zucker, and J. P. Heritage, Opt. Lett. **11**, 609 (1986).
3. S. Schmitt-Rink and D. S. Chemla, Phys. Rev. Lett. **57**, 2752 (1986).
4. S. Schmitt-Rink, D. S. Chemla, and H. Haug, Phys. Rev. B **37**, 941 (1988).
5. В. Р. Мисько, С. А. Москаленко, М. И. Шмиглюк, ФТТ **35**, 3213 (1993).
6. С. А. Москаленко, В. Р. Мисько, Укр. физ. журн. **37**, 1812 (1992).
7. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968).
8. С. А. Москаленко, ФТТ **4**, 276 (1962).
9. R. Zimmermann, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 191 (1976).
10. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ, **63**, 1447 (1972).
11. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика. Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), § 62–64.
12. Л. В. Келдыш, С. Г. Тиходеев, ЖЭТФ **90**, 1852 (1986).
13. Л. В. Келдыш, С. Г. Тиходеев, ЖЭТФ **91**, 78 (1986).
14. В. Р. Мисько, С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, Ю. М. Швера, ЖЭТФ **99**, 1215 (1991).
15. Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов*, Наук. думка, Киев (1971).
16. A. I. Bobrysheva, M. I. Shmiglyuk, and S. S. Russu, Proc. SPIE **1807**, 79 (1993).
17. А. В. Леляков, С. А. Москаленко, ФТТ **11**, 3260 (1969).
18. С. А. Москаленко, *Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов и биэкситонов*, РИО, Кишинев (1970).
19. А. И. Бобрышева, С. А. Москаленко, Х. Н. Кам, ЖЭТФ **103**, 301 (1993).
20. M. Combescot, Phys. Rev. B **41**, 3517 (1990).
21. В. А. Залож, С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, ЖЭТФ **95**, 601 (1989).