ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 1(7), стр. 163–166

НЕЛОКАЛЬНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

О. В. Тельковская, К. В. Чукбар

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 октября 1996 г.

На основе численного эксперимента проверяется и подтверждается гипотеза о нелокальном характере ричардсоновской относительной диффузии.

Интерес к процессу относительной диффузии, т. е. к расхождению в турбулентном потоке двух первоначально близких частиц пассивной примеси связан, в первую очередь, с возможностью обойти здесь принципиальные трудности, стоящие на пути полного аналитического описания турбулентного перемешивания. Действительно, поскольку даже турбулентное течение, как было отмечено еще в классических работах [1, 2] (см. также [3]), на масштабе порядка пространственного периода данной пульсации есть течение регулярное, то динамика примеси в реальном турбулентном поле с широким спектром (инерционным интервалом) обладает свойством «памяти», чрезвычайно затрудняющим аналитические подходы к задаче.

С другой стороны, кинетика $T(\mathbf{l}, t)$ — плотности вероятности того, что в данном эксперименте две первоначально близкие частицы в момент t находятся на концах вектора $\mathbf{l}$ — вследствие использования в определении усреднения по различным реализациям турбулентного движения (различным экспериментам) лишается «памяти» и, наоборот, должна обладать свойством «потери информации» (идет процесс перемешивания, энтропия растет).

Тем не менее, и это кинетическое уравнение не удается вывести «из первых принципов», и приходится вводить его в теорию путем простого постулирования (что, как отмечал в свое время Б. Рассел, имеет много преимуществ, совпадающих с присущими воровству по сравнению с честным трудом). Обычно по традиции, восходящей к Ричардсону (который, собственно, и ввел само понятие относительной диффузии), все сводят к привычному уравнению диффузии и спорят лишь о зависимости его коэффициента от параметров задачи [1, 2, 4].

В работе [5] было высказано предложение расширить аналитические возможности, перейдя в область интегральных уравнений типа свертки. (Наиболее очевидной физической причиной нелокальности является то обстоятельство, что в скорость расхождения двух частиц, находящихся в инерционном интервале, основной вклад дает турбулентная гармоника того же масштаба, что и текущее расстояние между ними. Впервые на принципиальную возможность нелокального варианта, по-видимому, обращено внимание в [6] (см. также [7]).) Конкретно для T выписывалось следующее модельное уравнение (в безразмерных единицах):

$$\frac{\partial T(\mathbf{l}, t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\Gamma(2/3)\,\Delta\int \frac{T(\mathbf{l}', t)}{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|^{5/3}}\, d^3\mathbf{l}'. \tag{1}$$

Показатель степени в интегральном ядре, совпадающий с показателем Колмогорова–Обухова, возникает из необходимости удовлетворить закону Ричардсона $\langle l \rangle \propto t^{3/2}$, описывающему изменение характерного диаметра облака примеси в турбулентной среде [1–4], а сложный численный коэффициент (Γ — гамма-функция Эйлера) — из единицы в фурье-представлении. Настоящая работа посвящена проверке этой гипотезы, поскольку только эксперимент (в том числе, численный) может подтвердить или опровергнуть теоретический постулат. Обсудим его особенности.

Уравнение (1), подобно классическому уравнению диффузии, легко решается вследствие своей локальности в фурье-пространстве и описывает подобную же «потерю информации» — выход любого начального профиля распределения примеси на конечнопараметрическое автомодельное решение. Кардинальное же его отличие заключается в наличии у этого решения степенного «хвоста» при $l \to \infty$, т. е. расходимости некоторых степенных моментов у автомодельной функции T, являющейся частным случаем функции Леви [5, 7, 8]. На практике это свойство означает степенную малость вероятности обнаружить в данном эксперименте облако с диаметром, существенно превышающим средний ричардсоновский, а вовсе не степенной характер убывания концентрации примеси на периферии данного облака — как уже говорилось, (1) не описывает собственно процесс турбулентного перемешивания подобно тому, как одна плоская проекция не дает полного представления о трехмерном теле (а в данном случае более уместной является аналогия с бесконечномерным телом): см. также [2–4]. Особенно просто увидеть наличие такого «хвоста», переписав (1) в искомом пределе, вынося $|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|^{5/3} \simeq l^{5/3}$ из-под знака интеграла в левой части и пользуясь условием нормировки $\int T\, d^3\mathbf{l} \equiv 1$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Delta\frac{1}{l^{5/3}} \propto \frac{1}{l^{11/3}}, \quad l \gg t^{3/2}. \tag{2}$$

Из (2) сразу следует еще одно характерное свойство процесса относительной «диффузии», описываемой уравнением (1), — вероятность найти пару частиц, разошедшихся на расстояние значительно большее ричардсоновского, есть линейная функция времени. Нетрудно видеть, что это свойство в отличие от показателя степени у l не зависит ни от спектра турбулентности, ни от размерности задачи, а связано лишь с гипотезой о нелокальности процесса, и именно его как наиболее устойчивое удобно выбрать в качестве проверяемого параметра.

Исходя из возможностей авторов такая проверка была осуществлена на основе численного эксперимента. Турбулентность моделировалась заданным двумерным несжимаемым течением с квазиколмогоровским спектром. А именно, потоковая функция Ψ ($\mathbf{v} = \{v_x, v_y\} = [\mathbf{e}_z \nabla\Psi]$) была выбрана в виде суммы 140 гармоник, объединенных группами по 7 в 20 масштабных классов, т. е.

$$\Psi = \sum_{i=1}^{20}\Psi_i, \qquad \Psi_i = A_i\sum_{j=1}^{7}\sin(\omega_{ij}t - \mathbf{k}_{ij}\mathbf{r} + \alpha_{ij}),$$

где модули всех волновых векторов в каждой группе одинаковы $|\mathbf{k}_{ij}| = k_i$, и их соотношение в соседних классах составляет $k_i/k_{i+1} = 1.4 \simeq \sqrt{2}$ ($k_1 = 1$). Такой выбор позволил охватить масштабный диапазон турбулентных пульсаций в 3 порядка (т. е. 1.4^{20}). Амплитуды A_i согласно закону Колмогорова–Обухова были равны $k_i^{-4/3}$. Углы поворота $\mathbf{k}_{ij}$ относительно осей x и y, а также фазы α_{ij} выбирались случайно в интервале

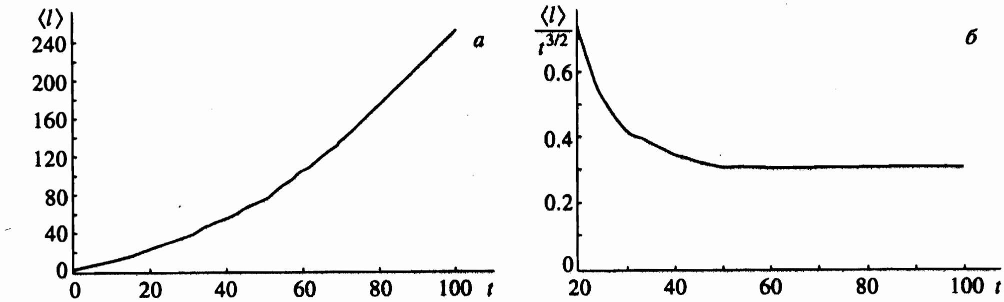

Рис. 1. Выполнение закона Ричардсона: *а*) — исходные данные, *б*) — обработка

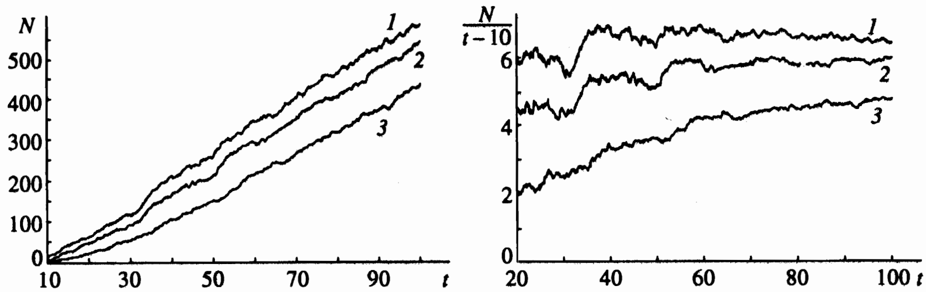

Рис. 2. Зависимость числа пар с межчастичным расстоянием, большим фиксированного l_0 (*1* — l_0 = 80, *2* — 100, *3* — 150), от времени: *а*) — исходные данные, *б*) — обработка

$(0, 2\pi)$ и число гармоник в каждом классе — 7 — считалось достаточным для обеспечения изотропии турбулентности. Частоты ω_{ij} были порядка $k_i v_i$, то есть определялись по формуле $\omega_{ij} = \beta_{ij} k_i^{2/3}$, где β_{ij} — случайные величины в интервале $(1/2, 3/2)$.

В этом заданном поле скоростей изучалось движение 1004 пар точек, с первоначальной дистанцией в каждой паре равной 3 (т. е. порядка полуволны самой мелкомасштабной гармоники Ψ). Для усреднения по реализациям турбулентного течения пары располагались на расстоянии 3000 друг от друга (т. е. порядка полуволны самой крупномасштабной гармоники Ψ) — здесь, кстати, снова видно отличие моделируемого процесса от расплывания какого-либо фиксированного облака.

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 1 и 2. Первый демонстрирует точность соблюдения закона Ричардсона для данной модели. Видно, что выход на автомодельный режим происходит не слишком быстро — за время больше 30, когда частицы в парах в среднем расходятся на дистанцию около 40. Второй, ключевой рисунок, отражает степень соответствия гипотезы о нелокальности процесса численному расчету (временной сдвиг на 10 в обработке не противоречит линейности и навеян исходными данными). Теория [5] соответствует постоянству функций на рис. 2*б* (и их пропорциональности $l_0^{-2/3}$), по крайней мере до тех пор, пока $l_0 \gg \langle l \rangle$ (см. рис. 1). Очевидно, совпадение выглядит достаточно убедительным. Иными словами, уравнение (1) весьма хорошо описывает процесс относительной «диффузии».

Авторы благодарны В. В. Янькову, обсуждения с которым стимулировали выполнение данной работы. Она была поддержана также Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 96–02–17249а) и программой Министерства науки «Нелинейная динамика».

Литература

1. L. F. Richardson, Proc. R. Soc. London Ser. A **110**, 709 (1926).
2. G. K. Batchelor, Proc. Cambrige Phil.Soc. **48**, 345 (1952).
3. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, ч. 2, § 24, Наука, Москва (1967).
4. H. G. E. Hentshel and I. Procaccia, Phys. Rev. A **29**, 1461 (1984).
5. К. В. Чукбар, Письма в ЖЭТФ **58**, 87 (1993).
6. M. F. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).
7. J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen, Physics Today 33 (February 1996).
8. E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, in *Studies in statistical mechanics*, Vol. 11, ed. by J. Leibowitz, E. W. Montroll, Noth-Holland, Amsterdam (1984), p. 1.