

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЭХО ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕОДНОРОДНО УШИРЕННЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

С. А. Баруздин

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
197376, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 1996 г.

Определены кросс-корреляционные функции третьего порядка сигнала свободной индукции неоднородно уширенной двухуровневой системы и возбуждающего ее белого гауссова шума. Установлено, что временные свойства кросс-корреляционных функций третьего порядка соответствуют характеристикам обычных двух- и трехимпульсных спиновых и световых (фотонных) эхо, возбуждаемых детерминированными радиоимпульсами. Исследованы нелинейные свойства корреляционных эхо в зависимости от параметров шумового импульса. Показано, что амплитуда корреляционных эхо определяется не только параметрами шумового импульса, но и зависит также от временного положения отсчетов шума, формирующего данный тип эха. Обсуждаются особенности спинового и светового корреляционных эхо в соответствующих диапазонах.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое возбуждение впервые было предложено в спектроскопии ЯМР Эрнстом [1, 2] с целью снижения мощности возбуждения и обеспечения его широкополосности. Этот метод получил название стохастического резонанса. Его использование также позволяет получать многомерные спектры, а снижение мощности возбуждения облегчает решение проблемы «мертвого времени» приемника. Наряду с ЯМР стохастическое возбуждение используется также при исследованиях электронного парамагнитного резонанса и в оптике [3, 4].

Реализация метода, однако, требует более трудоемкой обработки данных. Так, для измерения импульсной характеристики линейной системы  $h(t)$ , связанной с частотным коэффициентом передачи преобразованием Фурье, ее возбуждают не дельтаобразным импульсом, а белым шумом  $x(t)$  со спектральной плотностью мощности  $N_0$  и с корреляционной функцией

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = N_0\delta(t_1 - t_2).$$

При этом определяют кросс-корреляционную функцию между выходным процессом системы

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t - \xi)d\xi$$

и задержанным на время  $\sigma$  входным процессом

$$C_1(\sigma) = \langle y(t)x(t - \sigma) \rangle = N_0h(\sigma). \quad (1)$$

Таким образом, короткие когерентные импульсы в эксперименте заменяют половым белым шумом, что позволяет снизить мощность возбуждения на несколько порядков. При этом, правда, вместо непосредственного формирования  $h(t)$  в реальном времени необходимо в соответствии с (1), во-первых, проводить статистическое усреднение произведения  $y(t)x(t - \sigma)$ , а во-вторых, измерять функцию  $h(t)$  по точкам, изменяя каждый раз время задержки  $\sigma$ . Возможно и одновременное измерение нескольких точек импульсной характеристики при параллельной обработке данных.

Наряду с изучением характеристик линейных систем белый гауссовский шум, используемый при возбуждении, является удобной моделью, позволяющей проводить исследования свойств и нелинейных систем [1–5]. В этом случае вместо кросс-корреляционной функции (1) исследуют кросс-корреляционные функции высших порядков, которым можно поставить в соответствие импульсные характеристики соответствующего порядка.

Теоретические исследования корреляционных свойств откликов двухуровневых спиновых систем, описываемых уравнениями Блоха, при их возбуждении белым гауссовым шумом проводились в работах [1, 6]. При этом возбуждение носило непрерывный характер, а спиновая система находилась в установившемся стационарном состоянии.

Наряду с непрерывным возбуждением используется также импульсное стохастическое возбуждение. В работе [7] исследовались статистические свойства сигнала свободной индукции неоднородно уширенной спиновой системы, возбуждаемой финитными выборками белого гауссовского шума. Было, в частности, отмечено, что сигнал свободной индукции является в этом случае нестационарным гауссовым процессом с нулевым математическим ожиданием, которое не содержит информации об исследуемой системе. Отметим, что в оптическом диапазоне сигнал свободной индукции — световая свободная индукция [8].

Тем не менее, используя стохастическое возбуждение, можно формировать отклики, математическое ожидание которых отлично от нуля. Так, в эксперименте с возбуждением стимулированного светового эха первый и второй дельтаобразные когерентные импульсы возбуждения были заменены двумя более длинными шумовыми импульсами [4, 9]. Эти импульсы были сформированы из некогерентного излучения импульсного лазера, расщепленного на два луча, которые были задержаны во времени друг относительно друга. Таким образом, отсчеты шума первого и второго импульсов, отстоящие друг от друга на время полученной задержки, были когерентны между собой, что обеспечивало их когерентное сложение в составе стимулированного светового эха. Оно было названо «эхом с внутренней когерентностью», под которой подразумевалась когерентность двух шумовых импульсов внутри каждого периода возбуждения. Измеряя зависимость среднего значения амплитуды этого эха от времени задержки между импульсами возбуждения, можно получать информацию о временах продольной  $T_1$  и поперечной  $T_2$  релаксаций исследуемой системы. Аналогичным образом можно возбуждать стимулированное спиновое эхо. Его нелинейные свойства исследовались в работе [10].

В эксперименте, описанном в [3], исследован стохастический аналог стимулированного спинового эха, возбуждаемого квазинепрерывным белым гауссовым шумом  $x(t)$ . Передатчик и приемник попеременно стробировались для выделения отклика путем временного разделения с возбуждающим процессом. С помощью коррелятора вычислялась кросс-корреляционная функция третьего порядка между откликом нелинейной спиновой системы  $y(t)$  и возбуждением

$$C_3(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)x(t - \sigma_3)dt, \quad (2)$$

где  $\sigma_i$  — время задержки в корреляторе.

Спиновая система находилась в установившемся состоянии, при котором как  $x(t)$ , так и  $y(t)$  рассматривались как стационарные процессы, что, собственно, и позволяло вычислять кросс-корреляционные функции (2) путем временного усреднения подинтегрального произведения<sup>1)</sup>. По этой причине функция  $C_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  не зависит от времени  $t$ .

Функция  $C_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  последовательно измерялась коррелятором точка за точкой. При этом величины задержек выбирались из условия

$$\sigma_1 - \sigma_2 = t_1 = \text{const}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = t_2 = \text{const},$$

а задержка  $\sigma_3 = t_3$  изменялась. При  $\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2$  наблюдался максимум функции  $C_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Этот результат можно сопоставить с моментом возникновения стимулированного эха, возбуждаемого тремя обычными дельтаобразными импульсами. Если расстояние между первыми двумя импульсами возбуждения равно  $t_1 = \sigma_1 - \sigma_2$ , а между вторым и третьим импульсами  $t_2 = \sigma_2 - \sigma_3$ , то стимулированное эхо формируется спустя время  $t_3 = \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2$  после третьего импульса. Таким образом, максимум функции  $C_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  соответствует моменту формирования стимулированного эха, сама же кросс-корреляционная функция третьего порядка (2) подобна отклику на три дельтаобразных импульса, т. е. является стохастическим аналогом стимулированного эха. В то же время использование стохастического возбуждения позволило снизить его мощность в описываемом эксперименте на три порядка и легко решить проблему «мертвого времени» приемника.

Измеренные кросс-корреляционные функции были искажены системным шумом, что вызвано конечным временем интегрирования в корреляторе при усреднении. При этом отношение сигнал/шум увеличивается пропорционально квадратному корню из времени интегрирования.

В работе отмечается также возможность и целесообразность перенесения описанных экспериментов на электронный парамагнитный резонанс и оптику.

Целью настоящей работы является исследование нелинейных свойств корреляционных эхо — откликов, возбуждаемых в неоднородно уширенных двухуровневых спиновых и оптических системах финитными выборками полосового белого гауссова шума

<sup>1)</sup> В формуле (2), взятой из работы [3], проводится усреднение произведения стационарных процессов по времени. Формально эта процедура записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)dt,$$

что отмечено в ссылке [20] цитируемой работы. Отметим, что для эргодических процессов результаты усреднения по ансамблю и по времени совпадают.

длительностью  $\tau$ . Эти эхо могут быть выделены из состава сигнала свободной индукции при вычислении кросс-корреляционных функций третьего порядка.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Если длительность шумового импульса  $\tau \ll T_1, T_2$ , то влиянием релаксационных процессов можно пренебречь. Также будем считать, что период, с которым импульсы возбуждения воздействуют на систему, гораздо больше  $T_1$ , так что к приходу очередного импульса возбуждения система возвращается к своему равновесному термодинамическому состоянию.

Рассмотрим сначала неоднородно уширенную двухуровневую спиновую систему. Уравнение движения вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  с учетом сказанного выше имеет вид [2]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M}\mathbf{B}], \quad (3)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение.

Пусть на спиновую систему, находящуюся в неоднородном магнитном поле с индукцией  $B_z \mathbf{e}_z$ , на интервале  $|t| \leq \tau/2$  действует магнитное поле с круговой поляризацией

$$\mathbf{B}_1(t) = B(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \mathbf{e}_x - B(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \mathbf{e}_y,$$

где  $B(t)$  и  $\varphi(t)$  — функции, описывающие закон изменения амплитуды и фазы магнитной индукции;  $\omega_0$  — частота колебания, совпадающая с центральной частотой неоднородно уширенной линии поглощения.

В системе координат, вращающейся с частотой  $\omega_0$  вокруг продольной оси, уравнение движения вектора намагниченности имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{dm_+}{dt} &= \left( \frac{dm_-}{dt} \right)^* = i\Omega m_+ - i\tilde{R}(t)m_z, \\ \frac{dm_z}{dt} &= -\frac{i}{2}R^*(t)m_+ + \frac{i}{2}\tilde{R}(t)m_-, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m_+ = (m_-)^*$  — комплексные поперечные компоненты вектора намагниченности,  $m_z$  — его продольная компонента,

$$\tilde{R}(t) = \gamma\tilde{B}(t) = \gamma B(t) \cos\varphi(t) - i\gamma B(t) \sin\varphi(t), \quad \Omega = \gamma B_z - \omega_0 = \omega - \omega_0.$$

В соответствующих двухуровневых системах оптического диапазона вместо магнитодипольных переходов используются электродипольные. При этом уравнению движения (3) будет соответствовать уравнение движения псевдоэлектрического диполя  $\mathbf{P}$  в псевдоэлектрическом поле  $\mathbf{E}$  [8, 11, 12]:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \gamma_e[\mathbf{P}\mathbf{E}], \quad (5)$$

где  $\gamma_e$  — гиروهлектрическое отношение.

Аналогия между уравнениями (3) и (5) определяется использованием общей векторной модели, применяемой для анализа сигнала свободной индукции, спинового и светового эха в неоднородно уширенных двухуровневых системах [8, 13, 14].

Уравнение (5), таким образом, можно также записать во вращающейся системе координат в форме (4), если в последней заменить компоненты  $m_{\pm}$  и  $m_z$  на соответствующие компоненты вектора псевдополяризации  $p_{\pm}$  и  $p_z$ , а под  $\tilde{R}(t)$  понимать комплексную огибающую возбуждающего процесса, связанную с псевдоэлектрическим полем  $\tilde{E}(t)$  соотношением  $\tilde{R}(t) = \gamma_e \tilde{E}(t)$  [15].

Введем новый вектор состояния системы  $Y$ , компоненты которого связаны с компонентами ранее введенных векторов соотношениями

$$\begin{aligned} y_{\pm}(t) &= [p_{\pm}(t, \Omega) \text{ или } m_{\pm}(t, \Omega)] \exp[\pm i\Omega(t - t_0)], \\ y_z(t) &= p_z(t, \Omega) \text{ или } m_z(t, \Omega), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t_0 = -\tau/2$ . Введение этих компонент эквивалентно переходу в систему координат, вращающуюся с частотой  $\omega = \omega_0 + \Omega$  вокруг продольной оси.

Для новых переменных уравнение движения вектора состояния системы (4) может быть представлено в матричном виде

$$\frac{dY}{dt} = Q(t)Y, \quad (7)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ y_z \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tilde{s}(t) \\ 0 & 0 & -s^*(t) \\ s^*(t)/2 & \tilde{s}(t)/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\tilde{s}(t) = i\tilde{R}(t) \exp[-i\Omega(t + \tau/2)]. \quad (9)$$

До возбуждения система находится в равновесном состоянии, при котором компоненты вектора  $Y$  определяются начальными условиями

$$y_{\pm}(-\tau/2) = 0, \quad y_z(-\tau/2) = Y_0.$$

Значение  $Y_0$  равно равновесному значению намагниченности  $M_0$  либо псевдополяризации  $P_0$ .

Для дальнейшего анализа удобно ввести две матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В результате уравнение движения вектора состояния системы (7) может быть записано в виде [16]

$$\frac{dY}{dt} = \tilde{s}(t)Q_1Y + s^*(t)Q_2Y. \quad (11)$$

Уравнение (11) может быть проинтегрировано в двух симметричных формах

$$Y(t) = \exp \left[ Q_1 \int_{t_0}^t \bar{s}(t') dt' \right] Y(t_0) + \int_{t_0}^t \exp \left[ Q_1 \int_{\xi}^t \bar{s}(t') dt' \right] s^*(\xi) Q_2 Y(\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$Y(t) = \exp \left[ Q_2 \int_{t_0}^t s^*(t') dt' \right] Y(t_0) + \int_{t_0}^t \exp \left[ Q_2 \int_{\xi}^t s^*(t') dt' \right] \bar{s}(\xi) Q_1 Y(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Справедливость уравнений (12) и (13) проверяется их дифференцированием с получением уравнения (11).

### 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СПИНОВЫЕ И СВЕТОВЫЕ ЭХО

Для анализа нелинейных свойств корреляционного двухимпульсного эха, формируемого отсчетами шума  $\bar{R}(u_1)$  и  $\bar{R}(u_2)$ , необходимо определить кросс-корреляционную функцию третьего порядка между сигналом свободной индукции и возбуждением. Для этого определим сначала соответствующую кросс-корреляционную функцию для одной спектральной составляющей нестационарного отклика неоднородно уширенной системы

$$C_e(t) = \langle \Phi(t) \rangle = \langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 Y(t) \rangle, \quad 2u_2 - u_1 > \frac{\tau}{2}, \quad t \geq \frac{\tau}{2}. \quad (14)$$

Временная диаграмма огибающих импульса возбуждения, отклика системы в виде сигнала свободной индукции и выделяемого из его состава корреляционного двухимпульсного эха представлена на рис. 1.

Будем считать, что система возбуждается полосовым белым шумом с гауссовым распределением и с нулевым средним, причем ширина спектра шума значительно больше ширины возбуждаемой неоднородной линии. В этом случае корреляционные функции комплексной огибающей шума могут быть аппроксимированы соотношениями

$$\langle \bar{R}(t) R^*(u) \rangle = N_0 \delta(t - u), \quad \langle \bar{R}(t) \bar{R}(u) \rangle = 0, \quad |t, u| < \tau/2, \quad (15)$$

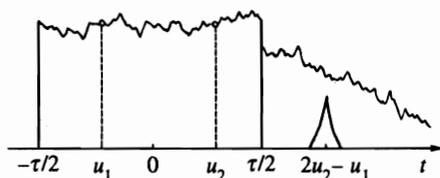


Рис. 1

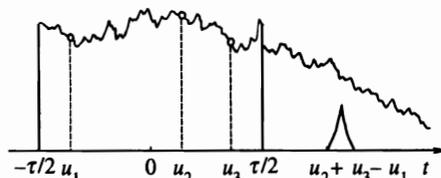


Рис. 2

Рис. 1. Временная диаграмма возбуждения двухимпульсного корреляционного эха от двух отсчетов шума в моменты времени  $u_1$  и  $u_2$

Рис. 2. Временная диаграмма возбуждения стимулированного корреляционного эха от трех отсчетов шума в моменты времени  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$

где  $N_0$  — спектральная плотность мощности комплексного гауссовского процесса  $\tilde{R}(t)$ .

Для вычисления кросс-корреляционной функции (14) умножим уравнение (12) на  $\tilde{s}(u_1)[s^*(u_2)]^2$  и проведем усреднение, полагая  $t > t_0 = u_2$ . Тогда получим

$$C_e(t) = D_1 + D_2, \quad (16)$$

$$D_1 = \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' \right] \Phi(u_2) \right\rangle,$$

$$D_2 = \left\langle \int_{u_2}^t \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{\xi}^t \tilde{s}(t') dt' \right] s^*(\xi) \mathbf{Q}_2 \Phi(\xi) d\xi \right\rangle.$$

При усреднении примем во внимание, что отклик физически реализуемой системы  $Y(t)$  не зависит от возбуждения  $\tilde{s}(\xi)$  и от функций от этого процесса при  $\xi > t$  в силу принципа причинности, а также то обстоятельство, что моменты гауссова процесса факторизуются [17]. Вектор  $Y$ , входящий в выражения  $D_1$  и  $D_2$ , может быть определен путем решения уравнения (7) методом последовательных приближений [7]

$$Y(t) = \left[ \mathbf{I} + \int_{-\tau/2}^t d\xi_1 \mathbf{Q}(\xi_1) + \int_{-\tau/2}^t d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 \mathbf{Q}(\xi_1) \mathbf{Q}(\xi_2) + \dots \right] Y\left(-\frac{\tau}{2}\right), \quad (17)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Согласно (17) и (8), компоненты вектора  $Y$  определяются рядом, члены которого выражаются через произведения возбуждающего процесса, что позволяет производить факторизацию  $D_1$  и  $D_2$ . При этом можно записать, что

$$D_1 = \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' \right] \right\rangle C_e(u_2) + \left\langle [s^*(u_2)]^2 \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' \right] \right\rangle \langle \tilde{s}(u_1) Y(u_2) \rangle. \quad (18)$$

Усреднение сомножителей, содержащих матричные экспоненты, в (18) выполняется путем разложения их в ряд с учетом того, что  $\tilde{s}(t)$  — комплексный гауссов процесс, определяемый (9) и (15):

$$\begin{aligned} & \left\langle [s^*(u_2)]^2 \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' \right] \right\rangle = \\ & = \left\langle [s^*(u_2)]^2 \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' + \frac{1}{2!} \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \tilde{s}(t') dt' \right]^2 + \dots \right\} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{2!} \mathbf{Q}_1^2 \int_{u_2}^t dt' \int_{u_2}^t dt'' \langle \tilde{s}(t') s(t'') [s^*(u_2)]^2 \rangle = \\ & = \frac{N_0^2 \mathbf{Q}_1^2}{2} \int_{u_2}^t dt' \int_{u_2}^t dt'' 2\delta(t' - u_2) \delta(t'' - u_2) = \frac{N_0^2 \mathbf{Q}_1^2}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если в (19) принять  $s^*(u_2) = 1$ , то получим

$$\left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \bar{s}(t') dt' \right] \right\rangle = I. \tag{20}$$

После подстановки (19) и (20) в (18)  $\mathbf{D}_1$  примет вид

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{C}_e(u_2) + \frac{N_0^2 \mathbf{Q}_1^2}{4} \langle \bar{s}(u_1) \mathbf{Y}(u_2) \rangle. \tag{21}$$

Выражение, описывающее  $\mathbf{D}_2$ , можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 &= \int_{u_2}^t \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{\xi}^t \bar{s}(t') dt' \right] \right\rangle \mathbf{Q}_2 \langle s^*(\xi) \Phi(\xi) \rangle d\xi + \\ &+ \int_{u_2}^t \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{\xi}^t \bar{s}(t') dt' \right] s^*(\xi) \right\rangle \mathbf{Q}_2 \mathbf{C}_e(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{22}$$

После усреднения сомножителей, содержащих матричные экспоненты в (22), получим

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{Q}_2 \int_{u_2}^t \mathbf{C}_e(\xi) d\xi + \frac{N_0 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2}{2} \int_{u_2}^t \mathbf{C}_e(\xi) d\xi. \tag{23}$$

Определим далее кросс-корреляционную функцию (14), взяв за основу уравнение (13):

$$\mathbf{C}_e(t) = \mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_4, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3 &= \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_2 \int_{u_2}^t s^*(t') dt' \right] \Phi(u_2) \right\rangle = \mathbf{C}_e(u_2), \\ \mathbf{D}_4 &= \int_{u_2}^t \left\langle \exp \left[ \mathbf{Q}_2 \int_{\xi}^t s^*(t') dt' \right] \bar{s}(\xi) \mathbf{Q}_1 \Phi(\xi) \right\rangle d\xi = \\ &= \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \langle \bar{s}(\xi) \Phi(\xi) \rangle d\xi + \frac{N_0 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2}{2} \int_{u_2}^t \mathbf{C}_e(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Если проинтегрировать уравнение (11), умножить результат на  $\bar{s}(u_1)[s^*(u_2)]^2$  и усреднить, то та же кросс-корреляционная функция может быть представлена в форме

$$\mathbf{C}_e(t) = \mathbf{C}_e(u_2) + \mathbf{Q}_1 \int_{u_2}^t \langle \bar{s}(\xi) \Phi(\xi) \rangle d\xi + \mathbf{Q}_2 \int_{u_2}^t \langle s^*(\xi) \Phi(\xi) \rangle d\xi. \tag{25}$$

Суммируя (16) с (24) и вычитая из результата (25), получим

$$C_e(t) = \frac{N_0^2 Q_1^2}{4} \langle \bar{s}(u_1) Y(u_2) \rangle + C_e(u_2) + N_0 L \int_{u_2}^t C_e(\xi) d\xi, \quad (26)$$

$$L = \frac{Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1}{2}. \quad (27)$$

После дифференцирования (26) получим уравнение

$$\frac{dC_e}{dt} = N_0 L C_e(t),$$

решение которого имеет вид

$$C_e(t) = \exp[N_0 L(t - u_2)] C_e(u_2), \quad t \geq u_2. \quad (28)$$

Для определения корреляционного момента  $C_e(u_2)$  в (28) положим в уравнении (13)  $t_0 = u_1 < t < u_2$ , умножим его на  $\bar{s}(u_1)[s^*(t)]^n$  ( $n = 1$  или  $2$ ) и усредним:

$$\begin{aligned} \langle \bar{s}(u_1) [s^*(t)]^n Y(t) \rangle &= \left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(t)]^n \exp \left[ Q_2 \int_{u_1}^t s^*(t') dt' \right] Y(u_1) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(t)]^n \int_{u_1}^t \exp \left[ Q_2 \int_{\xi}^t s^*(t') dt' \right] \bar{s}(\xi) Q_1 Y(\xi) d\xi \right\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

При  $n = 2$  первое слагаемое в (29) равно нулю, а второе можно представить в виде

$$C_e(t) = 2 \int_{u_1}^t \langle s^*(t) \bar{s}(\xi) \rangle \left\langle \exp \left[ Q_2 \int_{\xi}^t s^*(t') dt' \right] \bar{s}(u_1) s^*(t) Q_1 Y(\xi) \right\rangle d\xi.$$

С учетом (9) и (15) получим

$$C_e(t) = N_0 Q_1 \langle \bar{s}(u_1) s^*(t) Y(t) \rangle. \quad (30)$$

Для определения  $\langle \bar{s}(u_1) s^*(t) Y(t) \rangle$  положим в (29)  $n = 1$ . При этом первое слагаемое также равно нулю и результат будет иметь вид

$$\langle \bar{s}(u_1) s^*(t) Y(t) \rangle = \frac{N_0 Q_1}{2} \langle \bar{s}(u_1) Y(t) \rangle, \quad t \geq u_1. \quad (31)$$

На основании (30) и (31) при  $t = u_2$  получим

$$C_e(u_2) = \frac{N_0^2 Q_1^2}{2} \langle \bar{s}(u_1) Y(u_2) \rangle. \quad (32)$$

Для определения  $\langle \bar{s}(u_1) Y(u_2) \rangle$  в (32) воспользуемся корреляционным моментом (28)

$$C_e(t) = \langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 Y(t) \rangle = \exp[N_0 L(t - u_2)] \langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 Y(u_2) \rangle, \quad (33)$$

в котором положим  $s^*(u_2) = 1$ , после чего заменим  $u_2$  на  $u_1$ . Тогда при  $t = u_2$  будем иметь

$$\langle \bar{s}(u_1)\mathbf{Y}(u_2) \rangle = \exp[N_0\mathbf{L}(u_2 - u_1)] \langle \bar{s}(u_1)\mathbf{Y}(u_1) \rangle. \quad (34)$$

Для определения  $\langle \bar{s}(u_1)\mathbf{Y}(u_1) \rangle$  в (34) воспользуемся уравнением, полученным из (12):

$$\begin{aligned} \langle \bar{s}(t)\mathbf{Y}(t) \rangle &= \left\langle \bar{s}(t) \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{-\tau/2}^t \bar{s}(t') dt' \right] \right\rangle \mathbf{Y} \left( -\frac{\tau}{2} \right) + \\ &+ \int_{-\tau/2}^t \left\langle \bar{s}(t) \exp \left[ \mathbf{Q}_1 \int_{\xi}^t \bar{s}(t') dt' \right] s^*(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{Y}(\xi) \right\rangle d\xi, \quad t \leq u_1. \end{aligned} \quad (35)$$

Первое слагаемое в (35) равно нулю, а после усреднения второго слагаемого получим

$$\langle \bar{s}(t)\mathbf{Y}(t) \rangle = N_0 \int_{-\tau/2}^t \delta(t - \xi) \exp[-i\Omega(t - \xi)] \mathbf{Q}_2 \langle \mathbf{Y}(\xi) \rangle d\xi = \frac{N_0 \mathbf{Q}_2}{2} \langle \mathbf{Y}(t) \rangle. \quad (36)$$

Если в выражении (31), справедливом для  $t \geq u_1$ , положить  $\bar{s}(u_1) = 1$ , получим

$$\langle s^*(t)\mathbf{Y}(t) \rangle = \frac{N_0 \mathbf{Q}_1}{2} \langle \mathbf{Y}(t) \rangle.$$

В силу симметрии уравнений (12) и (13) можно записать, что

$$\langle \bar{s}(t)\mathbf{Y}(t) \rangle = \frac{N_0 \mathbf{Q}_2}{2} \langle \mathbf{Y}(t) \rangle, \quad t \geq u_1.$$

Тогда для  $t = u_1$  с учетом второй половины этого результата, описываемого выражением (36), получим

$$\langle \bar{s}(u_1)\mathbf{Y}(u_1) \rangle = N_0 \mathbf{Q}_2 \langle \mathbf{Y}(u_1) \rangle. \quad (37)$$

Наконец, для определения  $\langle \mathbf{Y}(u_1) \rangle$  воспользуемся (33), в котором возьмем  $\bar{s}(u_1)[s^*(u_2)]^2 = 1$ , после чего  $u_2$  заменим на  $-\tau/2$ :

$$\langle \mathbf{Y}(t) \rangle = \exp \left[ N_0 \mathbf{L} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \left\langle \mathbf{Y} \left( -\frac{\tau}{2} \right) \right\rangle. \quad (38)$$

Поскольку состояние системы в начальный момент времени, определяемое начальными условиями, является детерминированным, при  $t = u_1$  соотношение (38) будет иметь вид

$$\langle \mathbf{Y}(u_1) \rangle = \exp \left[ N_0 \mathbf{L} \left( u_1 + \frac{\tau}{2} \right) \right] \mathbf{Y} \left( -\frac{\tau}{2} \right). \quad (39)$$

Кросс-корреляционная функция (14) в момент окончания импульса возбуждения может быть определена на основании (28), (32), (34), (37) и (39), если в (28) положить  $t = \tau/2$ . В результате получим

$$C_e\left(\frac{\tau}{2}\right) = \exp\left[N_0 L\left(\frac{\tau}{2} - u_2\right)\right] \frac{N_0^2 Q_1^2}{2} \exp\left[N_0 L(u_2 - u_1)\right] \times \\ \times N_0 Q_2 \exp\left[N_0 L\left(u_1 + \frac{\tau}{2}\right)\right] Y\left(-\frac{\tau}{2}\right). \quad (40)$$

После подстановки начальных условий, а также матриц (10) и (27) в (40) оказывается, что компоненты  $y_-$  и  $y_z$  вектора состояния не коррелированы с возбуждением, а корреляция компоненты  $y_+$  описывается выражением

$$\left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 y_+\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\rangle = \frac{N_0^3 Y_0}{4} \exp\left(-\frac{N_0 \alpha_e}{4}\right), \quad (41)$$

$$\alpha_e = \frac{3\tau}{2} + u_1. \quad (42)$$

По окончании импульса возбуждения при  $t > \tau/2$ , когда  $\tilde{s}(t) = 0$ , вектор состояния системы на основании (7) и (8) не меняется:  $Y(t) = Y(\tau/2)$  и

$$\left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 y_+(t) \right\rangle = \left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 y_+\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\rangle, \quad t \geq \frac{\tau}{2}. \quad (43)$$

Для суммирования вкладов всех спектральных составляющих неоднородно уширенной системы необходимо вернуться в исходную систему координат, вращающуюся с частотой  $\omega_0$ , используя соотношения (6) и (9) в (43).

Тогда в случае магнитного резонанса кросс-корреляция между спектральной составляющей поперечной компоненты вектора намагниченности  $m_+(t, \Omega)$ , имеющей расстройку частоты  $\Omega = \omega - \omega_0$  относительно центральной частоты линии, и возбуждением может быть представлена в виде

$$\left\langle \bar{R}(u_1) [R^*(u_2)]^2 m_+(t, \Omega) \right\rangle = i \exp[i\Omega(t + u_1 - 2u_2)] \left\langle \bar{s}(u_1) [s^*(u_2)]^2 y_+\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\rangle. \quad (44)$$

Для определения кросс-корреляционной функции третьего порядка между сигналом свободной индукции и возбуждением необходимо проинтегрировать (44) с весом, определяемым формой низкочастотного эквивалента неоднородно уширенной линии поглощения  $g(\Omega)$ :

$$\left\langle \bar{R}(u_1) [R^*(u_2)]^2 m_+(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) \left\langle \bar{R}(u_1) [R^*(u_2)]^2 m_+(t, \Omega) \right\rangle d\Omega. \quad (45)$$

В результате подстановки (41)–(44) в (45) окончательно получим

$$\left\langle \bar{R}(u_1) [R^*(u_2)]^2 m_+(t) \right\rangle = i\pi \frac{M_0 N_0^3}{2} \exp\left(-\frac{N_0 \alpha_e}{4}\right) G(t + u_1 - 2u_2), \quad (46)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) \exp(i\Omega t) d\Omega.$$

Так же можно определить кросс-корреляционную функцию третьего порядка

$$\left\langle \bar{R}(u_1) R^*(u_2) R^*(u_3) m_+(t) \right\rangle \quad (47)$$

для  $t > \tau/2 > u_3 > u_2 > u_1 > -\tau/2$  и  $u_2 + u_3 - u_1 > \tau/2$ . Этой функции будет соответствовать корреляционное стимулированное эхо. Временные диаграммы огибающих импульса возбуждения, сигнала свободной индукции и выделяемого из его состава корреляционного стимулированного эха, формируемого отсчетами шума  $\tilde{R}(u_1)$ ,  $\tilde{R}(u_2)$  и  $\tilde{R}(u_3)$ , представлены на рис. 2.

Используя приведенную выше методику, можно показать, что кросс-корреляционная функция (47) определяется выражением

$$\left\langle \tilde{R}(u_1)R^*(u_2)R^*(u_3)m_+(t) \right\rangle = i\pi M_0 N_0^3 \exp\left(-\frac{N_0\alpha_s}{4}\right) G(t + u_1 - u_2 - u_3), \quad (48)$$

$$\alpha_s = 3\tau/2 + u_1 - u_2 + u_3. \quad (49)$$

Соотношения (44)–(49) будут справедливы и для соответствующих неоднородно уширенных систем оптического диапазона, если  $m_+$  и  $M_0$  заменить в них на  $p_+$  и  $P_0$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Математические ожидания комплексных огибающих двухимпульсного и стимулированного корреляционных эхо описываются выражениями (46) и (48). Зависимости от времени, определяемые функциями  $G(t + u_1 - 2u_2)$  и  $G(t + u_1 - u_2 - u_3)$ , полностью соответствуют обычным двух- и трехимпульсным эхо — откликам, возбуждаемым детерминированными дельтаобразными радиоимпульсами в моменты времени  $u_1$  и  $u_2$  или  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  соответственно (рис. 1 и 2). Это относится как к форме эхо-откликов, так и к моментам их формирования.

Как уже отмечалось во Введении, в работе [3] был исследован стохастический аналог стимулированного спинового эха. Сравнение кросс-корреляционной функции (48) с результатами этого эксперимента показывает, что максимум функции  $G(t + u_1 - u_2 - u_3)$  совпадает с максимумом функции  $C_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  в (2) при  $u_i = t - \sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). При этом их формы одинаковы с точностью, определяемой наличием системных шумов, вызванных конечным временем усреднения.

Однако из-за нестационарного характера сигнала свободной индукции все усреднения в настоящей работе, в отличие от [3], выполнялись по ансамблю, а не по времени. В результате кросс-корреляционные функции (46) и (48) содержат наряду с функциями  $G(t + u_1 - 2u_2)$  и  $G(t + u_1 - u_2 - u_3)$  еще экспоненциальные множители, зависящие от положения отсчетов шума на оси времени  $u_i$  в соответствии с (42) и (49).

Кроме этого, в настоящей работе определена зависимость амплитуд корреляционных эхо от параметров шумового импульса. Эта зависимость в соответствии с (46) и (48) носит нелинейный характер, определяемый функцией

$$F(N_0) = N_0^3 \exp\left(-\frac{N_0\alpha}{4}\right), \quad (50)$$

где  $\alpha = \alpha_e$  — для двухимпульсного эха и  $\alpha = \alpha_s$  — для стимулированного эха. Графики этой функции для различных значений  $\alpha$  представлены на рис. 3.

При  $N_0\alpha \ll 4$  эта зависимость имеет кубический характер. В дальнейшем по мере увеличения  $N_0$  рост замедляется. Максимум нормированной амплитуды корреляционного эха, определяемый функцией  $F(N_0)$ , равен  $[12/\alpha e]^3$  и достигается при  $N_0\alpha = 12$ .

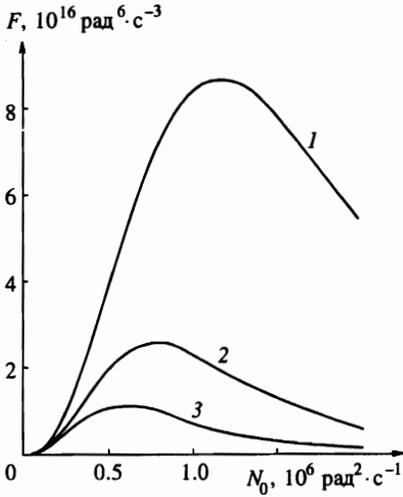


Рис. 3. Зависимость нормированной амплитуды корреляционного эха от спектральной плотности мощности шума  $N_0$ . Для двухимпульсного эха  $\alpha = \alpha_e = 3\tau/2 + u_1$ , для стимулированного эха  $\alpha = \alpha_s = 3\tau/2 + u_1 - u_2 + u_3$ . Значения параметра  $\alpha$  соответственно равны: 1 — 10 мкс, 2 — 15 мкс, 3 — 20 мкс

Экспоненциальная зависимость в (50) отражает факт влияния шума в промежутках между отсчетами шума, формирующими эхо-отклик. Проанализируем это влияние на примере двухимпульсного эха от отсчетов шума в моменты времени  $u_1$  и  $u_2$ . Эти моменты делят шумовой импульс на три интервала. При этом в момент времени  $u_1$  происходит преобразование продольной компоненты вектора состояния  $y_z$  в компоненту  $y_-$ , а в момент  $u_2$  компонента  $y_-$  преобразуется в  $y_+$ . Схема этого преобразования

$$y_z \rightarrow y_- \rightarrow y_+$$

Матричные экспоненты в (40) описывают процесс затухания компонент вектора состояния  $Y$  под действием шума на трех упомянутых интервалах. Из (40) следует, что продольная компонента  $y_z$  на первом интервале затухает по закону  $\exp[-N_0(u_1 + \tau/2)/2]$ , а поперечные компоненты  $y_-$  и  $y_+$  на втором и третьем интервалах затухают в два раза медленнее:  $\exp[-N_0(u_2 - u_1)/4]$  и  $\exp[-N_0(\tau/2 - u_2)/4]$  соответственно. Результирующее общее затухание определяется выражениями (41) и (42). При этом оказывается, что амплитуда двухимпульсного корреляционного эха зависит, согласно (41) и (42), как от длительности шумового импульса  $\tau$ , так и от момента времени  $u_1$ . Поскольку  $|u_1| < \tau/2$ , то при фиксированной длительности импульса  $\tau$  значения  $\alpha_e$  могут в зависимости от расположения  $u_1$  различаться в два раза. При  $N_0\alpha_e \ll 4$  положение  $u_1$  не влияет на амплитуду эха. В противном случае амплитуда эха будет зависеть от положения  $u_1$  и эта зависимость может быть довольно сильной. Так, например, при  $\tau = 10$  мкс значение  $\alpha_e$  может меняться от  $10^{-5}$  с при  $u_1 \rightarrow -\tau/2$  до  $2 \cdot 10^{-5}$  с при  $u_1 \rightarrow \tau/2$  (рис. 3). При этом для  $N_0 = 10^6$  рад<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup> амплитуда корреляционного эха изменится более чем на порядок.

Параметры шумового импульса, приведенные в данном примере, и графики функции  $F(N_0)$  на рис. 3 соответствуют параметрам шума, используемым при возбуждении ядерного спинового эха, и определяются исходя из условия

$$\tau = 10 \text{ мкс} \ll T_2.$$

В оптическом диапазоне время  $T_2$  составляет обычно несколько десятков наносекунд [8]. Тогда при длительности шумового импульса  $\tau = 10$  нс значение  $\alpha$  на рис. 3

будет в  $10^3$  раз меньше, а  $N_0$  станет в  $10^3$  раз больше. При этом сама функция  $F(N_0)$  возрастет в  $10^9$  раз.

Следует отметить, что большинство экспериментов по возбуждению светового эха осуществляется в условиях частичного возбуждения неоднородно уширенных линий, ширина которых составляет  $10^9$ – $10^{11}$  с $^{-1}$  [8, 11].

В этих условиях когерентные световые импульсы длительностью  $\sim 10$  нс [8] имеют ширину спектра  $\sim 10^8$  с $^{-1}$ . В то же время у шумового импульса длительностью  $\tau$  ширина спектра не зависит от длительности. Таким образом, при соответствующем выборе ширины спектра полосового белого шума импульс длительностью 10 нс может обеспечить равномерное возбуждение всей неоднородно уширенной линии. По этой причине функция  $G(t)$  может не совпадать с огибающей светового эха, сформированного при частичном возбуждении неоднородно уширенной линии.

Еще одной особенностью оптического диапазона по сравнению с диапазоном, используемым в ЯМР, является условие пространственного синхронизма [8]. В этом случае сигнал свободной индукции распространяется в том же направлении, что и возбуждающий его импульс в виде плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Содержащиеся в составе сигнала световой индукции двухимпульсные и стимулированные эхо формируются парами и тройками отсчетов шумового импульса.

Известно, что двухимпульсные и стимулированные световые эхо соответственно распространяются в направлениях [8]

$$\mathbf{k}_e = -\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2, \quad (51)$$

$$\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad (52)$$

где  $\mathbf{k}_i$  — волновой вектор  $i$ -го светового импульса возбуждения. Поскольку в рассматриваемом случае все отсчеты шума принадлежат одному и тому же шумовому импульсу возбуждения, распространяющемуся в направлении  $\mathbf{k}$ , то

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}. \quad (53)$$

Из (51)–(53) следует, что  $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_s = \mathbf{k}$  и все эхо распространяются в направлении распространения сигнала световой индукции.

В заключение обсудим коротко результаты, связанные с корреляционным стимулированным эхом. При его формировании в моменты времени  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  происходит преобразование компонент вектора состояния по схеме  $y_z \rightarrow y_- \rightarrow y_z \rightarrow y_+$ . Продольная компонента  $y_z$  затухает в два раза интенсивнее, чем поперечные компоненты. В результате общее затухание определяется экспоненциальным множителем в (48). При этом, согласно (49), амплитуда стимулированного эха зависит от положения всех трех отсчетов шума  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  на оси времени. Как и в случае двухимпульсного эха при фиксированной длительности шумового импульса  $\tau$  значения  $\alpha_s$  могут в зависимости от расположения  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  различаться в два раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (конкурс грантов 1995 г. по исследованиям в области электроники и радиотехники, проект 5-32, шифр ГР/ТОР-17).

## Литература

1. R. R. Ernst, J. Magn. Res. **3**, 10 (1970).
2. Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун, *ЯМР в одном и двух измерениях*, Мир, Москва (1990), гл. 4.
3. J. Paff and B. Blumich, Phys. Rev. A **43**, 3640 (1991).
4. R. Beach and S. R. Hartmann, Phys. Rev. Lett. **53**, 663 (1984).
5. В. И. Тихонов, *Нелинейные преобразования случайных процессов*, Радио и связь, Москва (1986), с. 142.
6. W. R. Knight and R. Keiser, J. Magn. Res. **48**, 293 (1982).
7. С. А. Баруздин, ФТТ **37**, 3497 (1995).
8. Э. А. Маныкин, В. В. Самарцев, *Оптическая эхо-спектроскопия*, Наука, Москва (1984), гл. 1-4.
9. R. Beach, D. De Beer, and S. R. Hartmann, Phys. Rev. A **32**, 3467 (1985).
10. С. А. Баруздин, Радиотехн. и электр. **41**, 959 (1996).
11. Н. Н. Ахмедиев, Б. С. Борисов, В. А. Зуйков, В. В. Самарцев, Р. Г. Усманов, Б. Ш. Хамидуллин, Изв. АН СССР, сер. физ. **50**, 1488 (1986).
12. А. Корпел, М. Чаттерджи, ТИИЭР **69**, 22 (1981).
13. В. С. Кузьмин, И. З. Рутковский, А. П. Сайко, А. Д. Тарасевич, Г. Г. Федорук, ЖЭТФ **97**, 880 (1990).
14. В. С. Кузьмин, И. З. Рутковский, А. П. Сайко, А. Д. Тарасевич, Г. Г. Федорук, Изв. АН СССР, сер. физ. **53**, 2358 (1989).
15. В. Б. Устинов, М. М. Ковалевский, С. А. Баруздин, Изв. АН СССР, сер. физ. **50**, 1495(1986).
16. С. А. Баруздин, в сб. *Тез. докл. I Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и их применениям*, изд-во Санкт-Петербургского ГТУ, Санкт-Петербург (1996), с. 25.
17. В. И. Тихонов, *Статистическая радиотехника*, Радио и связь, Москва (1982), с. 185.