

КИНЕТИКА НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЙ РЕЛАКСАЦИИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ ПОСЛЕ МГНОВЕННОГО НАГРЕВА ЭЛЕКТРОНОВ

А. И. Безуглый, В. А. Шкловский

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
310108, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 11 сентября 1996 г.,
после переработки 15 декабря 1996 г.

Теоретический анализ экспериментов по импульсному лазерному облучению металлических пленок, напыленных на диэлектрические подложки, обычно основывается на полуфеноменологических динамических уравнениях для электронной и фононной температур, что игнорирует неоднородность и нетепловой характер фононной функции распределения. В работе обсуждается микроскопическая модель, описывающая динамику электрон-фононной системы в терминах кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения. Такая модель дает микроскопическую картину нелинейной энергетической релаксации электрон-фононной системы быстро нагретой пленки. Установлено, что в относительно толстой пленке энергетическая релаксация электронов состоит из трех стадий: излучения «горячими» электронами неравновесных фононов, термализации электронов и фононов вследствие перепоглощения фононов и, наконец, остывания термализованной электрон-фононной системы в результате обмена фононами между пленкой и подложкой. В тонких пленках, где нет перепоглощения неравновесных фононов, энергетическая релаксация имеет только одну (первую из перечисленных) стадию. Релаксационная динамика экспериментально наблюдаемой величины — фононного вклада в электропроводность остывающей пленки — непосредственно связана с динамикой электронной температуры, что позволяет находить из эксперимента по релаксации напряжения на пленке времена электрон-фононных и фонон-электронных соударений, а также среднее время ухода фононов из пленки в подложку.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется экспериментальным исследованиям релаксационных процессов, возникающих в электрон-фононной системе металлической пленки после воздействия на нее ультракороткого (~ 100 фс) лазерного импульса (см., например, [1–3]). Для теоретического описания экспериментов, связанных с разогревом и релаксацией электронной подсистемы, обычно используется так называемое двухтемпературное приближение, предложенное еще в 1956 году в работе Каганова, Лифшица и Танатарова [4]. Двухтемпературное приближение предполагает, что электроны и фононы термализованы и характеризуются соответственно температурами T_e и T_p . Различие этих температур ($T_e > T_p$) фиксируется величиной теплового потока от электронов к фононам. Важно подчеркнуть, что величина этого теплового потока определяется только параметрами электрон-фононного взаимодействия в металле и никак не зависит от реальных условий теплоотвода, в которых находится исследуемый образец.

В последовавшей позднее серии теоретических работ Шкловского [5,6] и Маслова и Шкловского [7] были детально проанализированы на кинетическом уровне различные аспекты теории горячих электронов в тонких металлических пленках при низких температурах, не обсуждавшиеся в [4,8]. Основным стимулом для выполнения этих работ было выяснение тех физических условий, которым должен удовлетворять теплоотвод от пленок, нагреваемых постоянным электрическим током, и при выполнении которых только и возможно экспериментальное наблюдение предсказанных ранее [8,6] нелинейных поправок к закону Ома. Оказалось, что реализация двухтемпературного приближения [4] в стационарном эксперименте накладывает довольно жесткие условия на толщину пленки, акустическую прозрачность границы пленка-подложка [5], а также на ширину исследуемой пленки (см. заключительный раздел в работе [6]). Заметим, что позднее эти условия были, по-видимому, наиболее аккуратно выполнены в экспериментальных работах Бергмана с сотр. [9] и Гершензона с сотр. [10]. В большинстве же экспериментальных работ чаще всего реализуется не двухтемпературный режим (названный в работе [5] режимом электронного перегрева), а так называемый джоулев нагрев, когда в силу недостаточно хорошего акустического согласования довольно толстых пленок с подложкой электроны и фононы в пленке с хорошей точностью можно характеризовать одинаковой температурой. Величина этой температуры зависит от акустических характеристик металла и подложки в согласии с известной теорией акустического рассогласования Литтла [11]. В работе [5] был указан четкий теоретический критерий наблюдения размерного эффекта в теплоотводе от металлических пленок при низких температурах (см. ниже). В работе [6] указанные выше результаты были обобщены на случай произвольного электронного спектра и произвольной частотной зависимости функции Элиашберга $\alpha^2 F(\omega)$. Аналогичное обобщение позволило Аллену [12] в высокотемпературном пределе выразить скорость остывания электронов через константу электрон-фононной связи λ .

Заметим, однако, что в рассматриваемом нами случае низких температур и малых нагревов (когда частота характерных фононов мала по сравнению с дебаевской частотой ω_D) использование двухтемпературного приближения не вполне оправдано, так как в этой области температур фононная подсистема термализуется в основном благодаря столкновениям с электронами и в условиях термализации обе подсистемы должны характеризоваться единой температурой.

В другой полуфеноменологической модели, предложенной Перрином и Баддом [13] для описания экспериментов по генерации тепловых импульсов, фононная функция распределения считается отличающейся от бозевской и находится из условия баланса процессов излучения фононов нагретыми электронами и ухода фононов в подложку. Однако в этой модели фононная функция распределения предполагается однородной по толщине пленки, поскольку процесс ухода фононов описывается феноменологически в терминах среднего времени их ухода из пленки. Как следствие такой подход сам требует микроскопического обоснования.

Микроскопическое кинетическое рассмотрение, проведенное одним из авторов для стационарного нагрева [5], позволяет (при оправданном предположении об однородности электронной температуры по толщине пленки) рассмотреть как нетепловой характер, так и пространственную неоднородность фононной функции распределения в металлической пленке. Настоящая работа распространяет этот микроскопический подход на случай нестационарного нагрева пленок (разд. 2).

Концепция зависящей от времени электронной температуры решающим образом упрощает анализ системы двух связанных кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения при весьма общем предположении о степенном характере зависимости функции Элиашберга от частоты. Последнее позволяет феноменологически учесть возможную перенормировку электрон-фононного взаимодействия примесями (см., например, [14]) и, таким образом, сравнивать результаты этой статьи с экспериментом и в тех случаях, где такая перенормировка существенна.

В третьем разделе рассмотрена нелинейная кинетика энергетической релаксации электронной подсистемы после ее мгновенного нагрева, например, ультракоротким лазерным импульсом. Как оказывается, динамика остывания электронов существенно различна в случаях эффективно толстых и эффективно тонких пленок, т. е. в случаях, когда неравновесные фононы перепоглощаются электронами в пленке или в основном уходят в подложку без перепоглощения. Нами показано, что процесс остывания электронов в эффективно толстых пленках состоит из трех этапов, а именно: излучения неравновесных фононов «горячими» электронами, термализации взаимодействующих электронов и фононов и последующего остывания термализованной электрон-фононной системы вследствие обмена фононами между пленкой и подложкой. Длительности первых двух этапов совпадают по порядку величины с временами электрон-фононных соударений соответственно при начальной температуре электронов и температуре их термализации. Продолжительность последнего этапа определяется характерным временем ухода фононов в подложку. В тонкой пленке перепоглощение неравновесных фононов отсутствует, и поэтому характерным временем остывания электронов в тонкой пленке является время электрон-фононных столкновений при наинизшей температуре, т. е. температуре термостата.

Поскольку прямое измерение электронной температуры в быстро протекающих процессах, по-видимому, представляет трудность, в качестве возможного «индикатора» электронной температуры может использоваться фононный вклад в электросопротивление пленки. Именно поэтому в разд. 4 рассмотрена динамика изменения проводимости пленки в случае импульсного нагрева. Заметим, что сравнение результатов, полученных в разд. 4, с соответствующим экспериментом может дать полезную информацию о характерных временах релаксации электрон-фононной системы в «грязных» пленках (см. разд. 5). Последний раздел содержит краткое описание особенностей нашего подхода.

2. КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕЛАКСАЦИИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ. МОДЕЛЬ И ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим простую микроскопическую модель, в которой закон дисперсии электронов изотропен и квадратичен, т. е. энергия электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} (или с волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$) есть $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$, где m — эффективная масса. Предположим также, что фононы имеют одну акустическую ветвь с продольной поляризацией. Поскольку нас интересует область температур, низких по сравнению с дебаевской температурой Θ_D , будем считать закон дисперсии продольных фононов линейным: $\omega_q = sq$ (s — скорость продольного звука, $q = |\mathbf{q}|$ — модуль волнового вектора фонона). В стандартных обозначениях [15] система кинетических уравнений для электронной и фононной функций распределения в тонкой металлической пленке может быть записана как

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + e\mathbf{E} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} + \frac{p_z}{m} \frac{\partial f_p}{\partial z} = I_i(f_p) + I_{ep}(f_p, N_q), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} + s_z \frac{\partial N_q}{\partial z} = I_{pe}(N_q, f_p), \quad (2.2)$$

где предполагается, что ось z направлена перпендикулярно поверхности пленки. Интегралы электрон-фононных и фонон-электронных столкновений имеют хорошо известный вид (без учета процессов переброса)

$$I_{ep}(f_k, N_q) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} w(q) \{ f_{k+q}(1-f_k) [(N_q+1)\delta(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_k-\Omega) + N_{-q}\delta(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_k+\Omega)] - \\ - f_k(1-f_{k+q}) [N_q\delta(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_k-\Omega) + (N_{-q}+1)\delta(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_k+\Omega)] \}, \quad (2.3)$$

$$I_{pe}(N_q, f_k) = \int \frac{2d^3k}{(2\pi)^3} w(q) [f_{k+q}(1-f_k)(N_q+1) - f_k(1-f_{k+q})N_q] \delta(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_k-\Omega). \quad (2.4)$$

В выписанных выше формулах использованы следующие обозначения: e — заряд электрона, $\mathbf{E}(t)$ — напряженность электрического поля, возникающего в пленке при пропускании по ней слабого измерительного тока средней плотности j_0 ; $\Omega = \hbar\omega_q$. Функция $w(q)$ определяет интенсивность электрон-фононного взаимодействия (см. ниже). В зависимости от удобства в соотношениях (2.3), (2.4) и далее мы характеризуем электронные состояния либо волновым вектором \mathbf{k} , либо квазиимпульсом \mathbf{p} ($\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$).

Упругие столкновения электронов с примесями описываются интегралом столкновений

$$I_i(f_p) = n_i \int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} u(\mathbf{p}-\mathbf{p}') (f_p - f_{p'}) \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}), \quad (2.5)$$

где n_i — концентрация примесей, а функция $u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ пропорциональна квадрату модуля фурье-компоненты потенциала примеси. При доминировании электрон-примесных столкновений электронная функция распределения слабо анизотропна и ее можно приближенно записать как

$$f_p = f_0(\varepsilon_p) + \mathbf{p}\mathbf{f}_1(\varepsilon_p), \quad (2.6)$$

считая второе слагаемое малым по сравнению с первым. В этом приближении интеграл столкновений (2.5) сводится к так называемому τ -приближению:

$$I_i(f_p) = -\tau_i^{-1} \mathbf{p}\mathbf{f}_1(\varepsilon_p), \quad (2.7)$$

где частота электрон-примесных столкновений дается выражением

$$\tau_i^{-1} = \frac{1}{4} n_i N(0) \int_0^\pi u(\varphi) (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (2.8)$$

Введенная здесь плотность электронных состояний $N(0) = m\rho_F/\pi^2\hbar^3$; через φ обозначен угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{p}' .

В модели деформационного потенциала функция $w(q)$, пропорциональная квадрату матричного элемента электрон-фононного взаимодействия, линейно зависит от волнового вектора фонона:

$$w(q) = w_0(q) = \pi\mu^2\omega_q/\rho s^2, \quad (2.9)$$

где константа деформационного потенциала имеет порядок энергии Ферми: $\mu \sim \varepsilon_F = p_F^2/2m$, а ρ — плотность пленки. Чтобы иметь возможность феноменологически учитывать перенормировку электрон-фононного взаимодействия в грязных металлах и сравнивать наши результаты с экспериментами, мы далее будем рассматривать более общий случай произвольной степенной зависимости матричного элемента электрон-фононного взаимодействия от волнового вектора фонона и запишем (как в экспериментальных работах [9, 16])

$$w(q) = \pi \mu_1^2 \Omega^{1+r} / \rho s^2 \hbar = C_r q^{1+r}, \quad (2.9')$$

где число r не обязательно является целым. Представление (2.9') для функции $w(q)$ позволяет в полученных ниже формулах переходить к приближению деформационного потенциала с помощью простой подстановки $r = 0$, $\mu_1 = \mu$. Хорошо известно, что выражению (2.9) соответствует квадратичная зависимость функции Элиашберга от фононной частоты. Можно показать, что выражение (2.9') приводит к степенной частотной зависимости функции Элиашберга вида

$$\alpha^2 F(\omega_q) = N(0) \pi \mu_1^2 \Omega^{2+r} / 4 \rho s^2 (sp_F)^2 \propto \omega_q^{2+r}. \quad (2.10)$$

При этом характерное время электрон-фононных столкновений в функции температуры имеет вид $\tau_{ep} \propto T^{-(3+r)}$. Заметим, что в туннельных экспериментах часто наблюдается линейный ход функции Элиашберга $\alpha^2 F(\omega_q)$ в области малых фононных частот [17], а измерения на тонких пленках [9, 16] и массивных образцах [18] довольно часто дают квадратичную температурную зависимость τ_{ep}^{-1} , что соответствует $r = -1$. Вместе с тем, поскольку в экспериментах также были получены и другие значения r , а теоретические расчеты приводят к r от -1 до 1 , мы будем полагать величину r произвольным числом (не меньшим -1).

Возможность количественного описания динамики электрон-фононной системы металлической пленки в существенной степени связана с используемым нами важным упрощающим предположением о фермиевском виде изотропной части электронной функции распределения, т. е.

$$f_0(\varepsilon_p) = \{1 + \exp[(\varepsilon_p - \varepsilon_F)/k_B T_e(t)]\}^{-1}, \quad (2.11)$$

где $T_e(t)$ — зависящая от времени электронная температура. Следует отметить, что введение электронной температуры, будучи эквивалентно часто используемому предположению о мгновенной термализации электронной подсистемы, не всегда может быть строго обосновано. Так, в области очень низких температур $T_e < T^*$ (температура $T^* \sim \Theta_D^2/\varepsilon_F$), где электрон-электронные столкновения доминируют над электрон-фононными, электронная функция распределения термализуется за характерные времена электрон-электронного взаимодействия τ_{ee} . В обычных сравнительно чистых металлах $T^* \sim 1$ К, а в специально загрязненных пленках, где электрон-электронное взаимодействие усиливается из-за эффектов слабой локализации, T^* может быть порядка 10 К. При температурах $T_e > T^*$ (но $T_e \ll \Theta_D$) термализация электронов в относительно толстых пленках происходит вследствие не прямого электрон-электронного взаимодействия, а косвенного, осуществляющегося через обмен фононами. В работах [7] показано, что электронная функция распределения, близкая по виду к фермиевской, формируется и в относительно тонких пленках (из которых неравновесные фононы уходят в

подложку без перепоглощения электронами) в результате лишь процесса излучения фононов «горячими» электронами. В обоих случаях характерным временем термализации электронов является время электрон-фононных столкновений τ_{ep} . Таким образом, при относительно низких частотах внешних возмущений ($\omega \ll \tau_{ee}^{-1}$ при $T_e < T^*$ и $\omega \ll \tau_{ep}^{-1}$ при $T_e > T^*$) изотропную часть электронной функции распределения можно считать фермиевской. При рассмотрении высокочастотного воздействия на электронную подсистему выражение (2.11) следует рассматривать как приближение, сделанное на первом этапе и требующее впоследствии своего уточнения, возможно, в рамках подхода, предложенного в работе [19], где рассмотрена динамика как $T_e(t)$, так и нетепловой добавки к фермиевской электронной функции распределения.

Заметим также, что в оптически толстых пленках однородность электронной температуры по толщине пленки обеспечивается быстрым уходом электронов из области скин-слоя [20] и высокой электронной теплопроводностью по сравнению с фононной [5]. Вследствие дополнительного диффузионного уменьшения плотности «горячих» электронов скорость термализации электронной подсистемы существенно возрастает, и поэтому в оптически толстых пленках приближение мгновенной термализации дает хорошее согласие теории с экспериментом [20].

Перейдем теперь к вычислению анизотропной по импульсам части электронной функции распределения. Чтобы получить уравнение для $\mathbf{f}_1(\varepsilon_p)$, следует подставить выражение (2.6) в кинетическое уравнение (2.1) и, умножив его на \mathbf{p} , провести интегрирование по углам вектора \mathbf{p} . С учетом равенства

$$\int \frac{dO_p}{4\pi} p_i p_k = \frac{1}{3} p^2 \delta_{ik}, \quad (2.12)$$

где p_i и p_k — декартовы компоненты вектора \mathbf{p} , dO_p — элемент телесного угла в импульсном пространстве, а δ_{ik} — символ Кронекера, имеем уравнение для \mathbf{f}_1 вида

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \frac{e}{m} \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p} = -\frac{\mathbf{f}_1}{\tau_i} + \frac{3}{p^2} \int \frac{dO_p}{4\pi} \mathbf{p} I_{ep}^{(1)} \{f_0, \mathbf{f}_1, N_q\}. \quad (2.13)$$

Здесь $I_{ep}^{(1)}$ — линейризованный по \mathbf{f}_1 интеграл электрон-фононных столкновений:

$$I_{ep}^{(1)} \{f_0, \mathbf{f}_1, N_q\} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} [\mathbf{k}' f_1(\varepsilon_{k'}) B_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} - \mathbf{k} f_1(\varepsilon_{\mathbf{k}}) B_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}], \quad (2.14)$$

где $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$, а

$$B_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \hbar \omega (|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \times \\ \times \{ [1 - f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}'}) + N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Omega) + [f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}'}) + N_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \Omega) \}. \quad (2.15)$$

Будем считать, что характерные частоты ω изменения внешних параметров (протекающего через пленку тока, интенсивности лазерного пучка и т. п.) малы по сравнению с частотой упругого рассеяния электронов τ_i^{-1} которая, в свою очередь, меньше ε_F/\hbar . (При импульсном нагреве будем рассматривать только те стадии остывания пленки, когда внешний нагрев уже прекратился.) В этом случае в (2.13) производную по времени, а также вклад от рассеяния на фононах можно учесть по теории возмущений, записав

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1^{(0)} + \mathbf{f}_1^{(1)}. \quad (2.16)$$

Подстановка (2.16) в (2.13) дает для $f_1^{(0)}$ и $f_1^{(1)}$ выражения

$$f_1^{(0)} = -\frac{e\tau_i}{m} \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p}, \quad (2.17)$$

$$f_1^{(1)} = \frac{3\tau_i}{p^2} \int \frac{dO_p}{4\pi} \mathbf{p} I_{ep}^{(1)} \{f_0, f_1^{(0)}, N_q\} - \tau_i \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует соотношение между $f_1^{(0)}$ и $f_1^{(1)}$:

$$f_1^{(1)} \sim \max(\omega\tau_i, \tau_i/\tau_{ep}) f_1^{(0)} \ll f_1^{(0)}. \quad (2.19)$$

Величину $\mathbf{p} f_1^{(0)}$ можно оценить из (2.17) как

$$p_F f_1^{(0)} \sim \frac{\tau_i e E p_F}{m k_B T_e} \sim \frac{l_i e E}{k_B T_e} \ll 1, \quad (2.20)$$

где $l_i = v_F \tau_i$. Соотношения (2.19) и (2.20) представляют собой условия применимости теории возмущений для вычисления $f_1^{(0)}$ и $f_1^{(1)}$.

Теперь получим уравнение для электронной температуры $T_e(t)$, входящей через f_0 в выражения (2.17) и (2.18) для анизотропной части электронной функции распределения. Умножим кинетическое уравнение (2.1) на ε_p и проинтегрируем его по углам вектора \mathbf{p} . С учетом (2.6) и (2.12), а также однородности T_e по толщине пленки приходим к уравнению теплового баланса

$$c_e(T_e) \frac{dT_e}{dt} = \langle \mathbf{j}(t) \rangle \mathbf{E}(t) - \langle P_{ep}(t) \rangle + W(t). \quad (2.21)$$

Здесь удельная электронная теплоемкость $c_e(T_e) = \gamma T_e$, где постоянная $\gamma = (\pi^2/3) N(0) k_B^2$. Входящая в выражение для джоулева тепловыделения усредненная по толщине пленки плотность тока дается формулой

$$\langle \mathbf{j}(t) \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d dz \int \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e \mathbf{v}(\mathbf{f}_1 \mathbf{p}). \quad (2.22)$$

В дальнейшем, однако, мы будем пренебрегать первым слагаемым правой части уравнения (2.21) как вкладом мощности малого измерительного тока. Для средней (по толщине пленки) мощности, передаваемой в единице объема из электронной подсистемы в фононную, имеем

$$\langle P_{ep} \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d dz \int \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon_p I_{ep}(f_0, N_q). \quad (2.23)$$

В том случае, когда пленка нагревается не только током, но также, например, лучом лазера, в правую часть уравнения (2.21) необходимо включить величину $W(t)$ — удельную мощность однородного внешнего источника нагрева. Заметим, что $W(t)$ не изменяет анизотропную часть электронной функции распределения.

Важно иметь в виду, что в режиме заданного полного тока, протекающего через пленку, электронная температура T_e и напряженность электрического поля E могут

быть найдены из уравнений (2.21) и (2.22), поскольку эти уравнения образуют замкнутую систему относительно T_e и E . Чтобы выразить входящие в (2.21) и (2.22) величины через T_e и E , прежде всего необходимо найти фононную функцию распределения. Если, пренебрегая эффектами увлечения фононов, заменить в интеграле фонон-электронных столкновений (2.4) функцию $f_{\mathbf{k}}$ на $f^{(0)}(\varepsilon_{\mathbf{k}})$, то интегрирование по волновым векторам \mathbf{k} легко проводится. В результате получаем

$$I_{pe}(N_{\mathbf{q}}) = \nu [n_{\mathbf{q}}(T_e(t)) - N_{\mathbf{q}}(z, t)]. \quad (2.24)$$

Здесь $n_{\mathbf{q}}(T) = [\exp(\hbar\omega_{\mathbf{q}}/k_B T) - 1]^{-1}$ есть бозевская функция заполнения фононных состояний с волновым вектором \mathbf{q} , а частота фонон-электронных столкновений

$$\nu = \frac{m^2 \mu_1^2}{2\pi \hbar^4 \rho s} \Omega^{1+\tau}. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.2) с интегралом фонон-электронных столкновений (2.24) является линейным дифференциальным уравнением относительно $N_{\mathbf{q}}(z, t)$. Граничные условия к этому уравнению могут быть получены следующим образом (см. также [5]).

Пусть $\alpha(\vartheta)$ — вероятность прохождения в подложку (занимающую область $z < 0$) фонона, падающего под углом ϑ на границу $z = 0$. (Вероятность $\alpha(\vartheta)$ для различных материалов пленок и подложек может быть вычислена в рамках известной модели акустического рассогласования [11, 21].)

Если предположить, что вылетевшие из пленки в подложку фононы распространяются баллистически и не возвращаются обратно (из-за малой ширины пленки), граничное условие при $z = 0$ имеет вид

$$N_{\mathbf{q}}^>(0, t) = \alpha n_{\mathbf{q}}(T_B) + \beta N_{\mathbf{q}'}^<(0, t). \quad (2.26)$$

Здесь T_B — температура подложки, $\beta = 1 - \alpha$, а $N_{\mathbf{q}'}^<(N_{\mathbf{q}}^>)$ — функция распределения падающих (зеркально отраженных) фононов: $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$, $\mathbf{q}' = (q_x, q_y, -q_z)$, $q_z > 0$. На свободной границе пленки ($z = d$) условие зеркального отражения фононов дает

$$N_{\mathbf{q}'}^<(d, t) = N_{\mathbf{q}}^>(d, t). \quad (2.27)$$

Решение кинетического уравнения (2.2) с интегралом столкновений (2.24) и граничными условиями (2.26), (2.27) удобно искать, выполнив предварительно преобразование Фурье по времени. При этом для фурье-компоненты

$$N_{\mathbf{q}}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\mathbf{q}}(z, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.28)$$

кинетическое уравнение становится обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$s_z \frac{dN_{\mathbf{q}}(z, \omega)}{dz} + (\nu - i\omega) N_{\mathbf{q}}(z, \omega) = \nu n_{\mathbf{q}}(\omega), \quad (2.29)$$

где

$$n_{\mathbf{q}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n_{\mathbf{q}}[T_e(t)] e^{-i\omega t} dt. \quad (2.30)$$

Решение уравнения (2.29) имеет вид

$$N_q(z, \omega) = \frac{\nu}{\nu - i\omega} n_q(\omega) + C_q(\omega) \exp \left[-\frac{z(\nu - i\omega)}{s_z} \right]. \quad (2.31)$$

Коэффициенты $C_q^>$ и $C_q^<$ (для векторов q с $q_z > 0$ и $q_z < 0$) определяются граничными условиями. Подстановка выражения (2.31) в граничные условия (2.26) и (2.27) дает

$$C_q^>(\omega) = \left\{ 1 - \beta \exp \left[-\frac{2d(\nu - i\omega)}{|s_z|} \right] \right\}^{-1} \alpha(\vartheta) \left[2\pi\delta(\omega)n_q(T_B) - \frac{\nu}{\nu - i\omega} n_q(\omega) \right], \quad (2.32)$$

$$C_q^<(\omega) = \underline{C_q^>}(\omega) \exp \left[-\frac{2d(\nu - i\omega)}{|s_z|} \right]. \quad (2.33)$$

Проведя теперь довольно громоздкие вычисления $N_q(z, t)$ с помощью обратного преобразования Фурье, приходим к следующим выражениям для фоновой функции распределения:

$$N_q^>(z, t) = \alpha [1 - \beta x(0)]^{-1} \exp(-z\nu/s_z) n_q(T_B) + \int_{-\infty}^t dt' n_q [T(t')] \nu \exp [-\nu(t - t')] \beta^{|\tau+1-z/2d|}, \quad (2.34)$$

$$N_q^<(z, t) = \alpha [1 - \beta x(0)]^{-1} \exp [-(2d - z)\nu/|s_z|] n_q(T_B) + \int_{-\infty}^t dt' n_q (T(t')) \nu \exp [-\nu(t - t')] \beta^{|\tau+z/2d|}. \quad (2.35)$$

В этих выражениях $x(0) = \exp(-2d\nu/|s_z|)$, $\tau = |s_z|(t - t')/2d$, а квадратные скобки в показателе степени β обозначают целую часть числа.

Средняя по толщине пленки удельная мощность $\langle P_{ep} \rangle$, передаваемая от электронов к фононам, может быть выражена через интеграл фонон-электронных столкновений (2.24):

$$\begin{aligned} \langle P_{ep}(t) \rangle &= \frac{1}{d} \int_0^d dz \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Omega I_{pe}(N_q) = \\ &= \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_{q_z > 0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Omega \nu [n_q(T_e(t)) - N_q^>(z, t)] + \\ &+ \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_{q_z < 0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Omega \nu [n_q(T_e(t)) - N_q^<(z, t)]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Проведя явно усреднение фоновой функции распределения по координате z и подставив результат в формулу (2.21), приходим к окончательному виду уравнения теплового баланса:

$$c_e(T_e) \frac{dT_e}{dt} = W(t) + \langle j(t) \rangle E(t) - 2 \int_{q_s > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Omega \nu \left\{ n_q(T_e(t)) - n_q(T_B) - \int_{-\infty}^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \nu \exp[-\nu(t-t')] \beta^{|\tau|} (1 - \alpha\{\tau\}) \right\}. \quad (2.37)$$

При выводе уравнения (2.37) поглощаемая электронами мощность $W(t)$ считалась произвольной функцией времени. Кроме того, $[\tau]$ и $\{\tau\}$ обозначают соответственно целую и дробную части величины τ .

Фононный вклад в уравнение для электронной температуры (2.37) состоит из двух слагаемых. Первое из них (локальное по времени) описывает излучение неравновесных фононов в момент времени t , а второе (интегральное по времени) связано с перепоглощением неравновесных фононов, излученных в более ранние моменты $t' < t$. Нетрудно заметить, что последние два слагаемых в фигурных скобках представляют собой взятую с обратным знаком фононную функцию распределения, усредненную по толщине пленки.

Фононная функция распределения, найденная в результате решения уравнения (2.2), позволяет также записать следующее выражение для нестационарного потока тепла из пленки в подложку:

$$Q(t) = \int_{q_s > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Omega s_z [N_q^<(0, t) - N_q^>(0, t)] = \int_{q_s > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Omega s_z \alpha \nu \int_{-\infty}^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \exp[-\nu(t-t')] \beta^{|\tau|}. \quad (2.38)$$

Здесь зависимость $Q(t)$ от интенсивности теплового источника $W(t)$ неявно выражена через $T_e(t)$.

При стационарном нагреве, когда $W(t) = W_0$, температура электронов в пленке T_0 определяется уравнением

$$W_0 = \int_{q_s > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Omega \frac{\alpha s_z}{2d} \frac{1-x}{1-\beta x} [n_q(T_0) - n_q(T_B)]. \quad (2.39)$$

Физическая картина стационарного теплоотвода, следующая из уравнения (2.39), подробно проанализирована одним из авторов [5]. (Теплоотвод от сверхпроводящих пленок в режиме течения потока вблизи T_c был рассмотрен в [22].) Оказывается, что можно выделить два предельных случая в зависимости от соотношения между $l_{pe}(T_0)$ (неупругой длиной свободного пробега фононов с энергией $\hbar\omega_q \simeq k_B T_0$) и так называемой эффективной толщиной пленки $d_{eff} = d/\langle\alpha\rangle$, где $\langle\alpha\rangle$ — усредненная по углам вероятность прохождения фонона через границу пленка-подложка. (Явные выражения для $l_{pe}(T_0)$ и $\langle\alpha\rangle$ приведены ниже.) В эффективно толстых пленках ($d_{eff} \gg l_{pe}(T_0)$) неравновесные фононы термализуются вследствие их перепоглощения электронами, и для обеих подсистем устанавливается единая температура $T_0 > T_B$ (режим джоулева нагрева). В этом режиме величина T_0 определяется акустической прозрачностью границы

пленка–подложка. В противоположном предельном случае эффективно тонких пленок почти все неравновесные фононы уходят в подложку без перепоглощения, в результате чего электроны оказываются нагретыми относительно решетки (электронный перегрев), причем величина перегрева определяется частотой электрон-фононных столкновений.

Как следует из уравнения (2.38), в режиме джоулева нагрева величина среднего потока тепла из пленки дается выражением

$$Q_0 = \frac{\pi^2 \langle \alpha \rangle k_B^4}{120 \hbar^3 s^2} (T_0^4 - T_B^4), \quad (2.40)$$

где усредненная по углам вероятность прохождения фонона через границу пленка–подложка

$$\langle \alpha \rangle = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \alpha(\vartheta) \sin 2\vartheta. \quad (2.41)$$

В режиме электронного перегрева имеем

$$Q_0 = \frac{D_{5+r}}{4\pi^3} d \frac{m^2 \mu_1^2 k_B^{5+r}}{\hbar^7 \rho s^4} (T_0^{5+r} - T_B^{5+r}), \quad (2.42)$$

где

$$D_k = \int_0^\infty x^{k-1} (e^x - 1)^{-1} dx. \quad (2.43)$$

При малой величине $W_0 = Q_0/d$ изменение температуры в режиме джоулева нагрева можно представить в виде

$$T_0 - T_B = W_0 \tau_{es} / c_p(T_0), \quad (2.44)$$

где $c_p = (2\pi^2/15)(k_B^4 T_0^3 / \hbar^3 s^3)$ — фононная теплоемкость в модели с одной акустической ветвью колебаний, а $\tau_{es} = 4d / \langle \alpha \rangle s$ — среднее время ухода фононов в подложку.

В режиме электронного перегрева малое приращение температуры удобно представить как

$$T_0 - T_B = W_0 \tau_e(T_0) / c_e(T_0). \quad (2.45)$$

Линеаризуя (2.42) по малой величине W_0 и сравнивая полученный результат с (2.45), получаем для времени остывания электронов в тонкой пленке выражение

$$\tau_e(T_0) = \frac{4\pi^5 N(0) \hbar^7 \rho s^4}{3(5+r) D_{5+r} m^2 \mu_1^2 (k_B T_0)^{3+r}}. \quad (2.46)$$

Если ввести среднюю частоту фонон-электронных столкновений в согласии с равенством

$$\nu_{pe}(T_0) = \tau_{pe}^{-1}(T_0) = \frac{1}{c_p(T_0)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Omega \nu \frac{dn_q(T_0)}{dT_0}, \quad (2.47)$$

то для среднего времени фонов-электронных столкновений получим

$$\tau_{pe}(T_0) = \frac{8\pi^5}{15(5+r)D_{5+r}} \frac{\hbar^4 \rho_s}{m^2 \mu_1^2} (k_B T_0)^{-(1+r)} = \frac{c_p(T_0)}{c_e(T_0)} \tau_e(T_0). \quad (2.48)$$

При этом для неупругой длины свободного пробега фононов с энергией порядка $k_B T_0$ имеем $l_{pe}(T_0) = s\tau_{pe}(T_0)$.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Полученное в разд. 2 нелинейное интегродифференциальное уравнение (2.37) определяет динамику электронной температуры в общем случае, т. е. при произвольной временной зависимости мощности тепловыделения, $W(t)$, и при любых значениях вероятности прохождения фонона через границу пленки с подложкой, $0 < \alpha < 1$. В настоящем разделе в первую очередь нас будет интересовать процесс остывания электрон-фононной системы пленки после ее облучения в момент $t = 0$ ультракоротким лазерным импульсом, длительность которого мала по сравнению с наименьшим из характерных времен неупругих столкновений электронов с фононами и между собой (при начальной температуре электронов $T_e(0)$). Будем считать также, что интенсивность лазерного импульса относительно велика и температура начального нагрева электронов $T_e(0) \gg T_B$, хотя $T_e(0)$ мала по сравнению с дебаевской температурой. В рамках сделанных предположений в предельных случаях электронного перегрева ($\tau_{es} \ll \tau_{pe}$) и джоулевого нагрева ($\tau_{es} \gg \tau_{pe}$) нелинейная релаксация электронной температуры может быть проанализирована аналитическими методами.

В режиме электронного перегрева неравновесные фононы покидают пленку без перепоглощения электронами, поэтому фононная функция распределения в пленке приближенно совпадает с $n_q(T_B)$. Формальным следствием этого обстоятельства является малость интегрального по времени слагаемого в уравнении (2.37). Пренебрегая интегральным слагаемым по параметру $(\tau_{es}/\tau_{pe}) \ll 1$, получаем нелинейное дифференциальное уравнение для электронной температуры. Оно имеет вид

$$\tau_e(T_e(0)) \Theta \frac{d\Theta}{dt} = -(5+r)^{-1} (\Theta^{5+r} - \Theta_B^{5+r}), \quad (3.1)$$

где нормированные температуры $\Theta = T_e(t)/T_e(0)$ и $\Theta_B = T_B/T_e(0)$. Из уравнения (3.1) следует, что на начальном этапе, когда $T_e(t) \gg T_B$, остывание электронов происходит по степенному закону:

$$\Theta(t) = \left[1 + \frac{3+r}{5+r} \frac{t}{\tau_e(T_e(0))} \right]^{-1/(3+r)} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) обобщает результат работы [4] на случай произвольных r . Начальная температура $T_e(0)$ определяется уравнением

$$(\gamma/2) [T_e^2(0) - T_B^2] = \mathcal{E}_0, \quad (3.3)$$

где \mathcal{E}_0 — поглощенная электронами энергия лазерного импульса, константа $\gamma = (\pi^2/3)N(0)k_B^2$. С уменьшением запаса избыточной энергии температура электронов

приближается к температуре термостата, и при $T_e(t) - T_B \ll T_B$ релаксация $T_e(t)$ становится экспоненциальной:

$$T_e(t) - T_B \propto \exp[-t/\tau_e(T_B)]. \quad (3.4)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае характерные времена на начальном и конечном этапах релаксации сильно различаются. Их отношение имеет порядок $\tau_e(T_e(0))/\tau_e(T_B) = [T_B/T_e(0)]^{3+r} \ll 1$.

В предельном случае эффективно толстых пленок ($\tau_{es} \gg \tau_{pe}$) процесс нелинейной релаксации электронной температуры имеет более сложный характер и может быть разделен на три стадии. На первой, начальной, стадии происходит излучение «горячими» электронами неравновесных фононов, которые накапливаются в пленке, поскольку они еще не успевают ни перепоглотиться электронами, ни уйти в подложку. Длительность первой стадии порядка $\tau_e(T_e(0))$, причем зависимость электронной температуры от времени описывается формулой (3.2). На второй, промежуточной, стадии происходит термализация электрон-фононной системы, т. е. установление общей температуры у электронов и фононов. Процесс термализации в относительно толстых пленках описывается уравнением (2.37), в котором следует игнорировать уход фононов в подложку и положить $\alpha = 0, \beta = 1$:

$$c_e(T_e) \frac{dT_e}{dt} = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \nu \left\{ n_q(T_e(t)) - n_q(T_B) - \int_0^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \nu e^{-\nu(t-t')} \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь интегрирование идет по $t' > 0$, так как при $t' < 0$ температура $T_e = T_B$; начальное значение температуры электронов $T_e(0)$ определяется равенством (3.3). Последние два слагаемых в фигурных скобках представляют собой фононную функцию распределения в момент времени t (взятую с обратным знаком). С течением времени t числа заполнения фононных состояний увеличиваются, а $n_q(T_e(t))$ уменьшается, что и приводит к обращению в нуль правой части уравнения (3.5), т. е. к выходу электронной температуры на стационарное значение. Заметим также, что уравнение (3.5) описывает релаксацию электронной температуры в относительно толстой пленке без обычно используемого упрощающего предположения о фононной температуре [4, 13], введение которой в интересующей нас области низких температур не является оправданным.

Переходя к анализу релаксационной динамики $T_e(t)$, прежде всего рассмотрим допускающий строгое решение случай $r = -1$, которому соответствует квадратичная температурная зависимость частоты неупругих электрон-фононных столкновений: $\tau_e^{-1}(T_e) \propto T_e^2$. Важно отметить, что подобная зависимость наблюдалась в ряде низкотемпературных экспериментов (при $T < 20$ К), включающих в себя исследование локализационных поправок к сопротивлению тонких пленок [9, 23–25] и исследование частотной зависимости отклика пленки в резистивном состоянии на осцилляции мощности теплового источника [10, 16, 26]. В соответствии с формулой (2.25) при $r = -1$ частота фонон-электронных столкновений не зависит от волнового вектора фонона q . Это обстоятельство позволяет провести интегрирование по векторам q и таким образом

перейти от соотношения (3.5) к уравнению для $T_e(t)$, которое в безразмерных величинах имеет вид

$$4\zeta\Theta\frac{d\Theta}{dx} = -\Theta^4 + \int_0^x \Theta^4(x')e^{-(x-x')}dx'. \quad (3.6)$$

Здесь $x = \nu_{pe}(T_e(0))t$, а $\zeta = c_e(T_e(0))/c_p(T_e(0))$, кроме того, как и в случае эффективно тонкой пленки, предполагалось, что $\Theta \gg \Theta_B$. Дифференцированием по x полученное интегродифференциальное уравнение может быть сведено к обычному дифференциальному уравнению, допускающему понижение порядка. Окончательно имеем

$$4\zeta\Theta\frac{d\Theta}{dx} = -\Theta^4 + 2\zeta(1 - \Theta^2). \quad (3.7)$$

Нетрудно заметить, что обращение в нуль правой части (3.7) дает уравнение для безразмерной температуры $\Theta_{th} = T_{th}/T_e(0)$, устанавливающейся в электрон-фононной системе в результате ее термализации. Действительно, в процессе термализации поглощенная пленкой энергия лазерного импульса \mathcal{E}_0 перераспределяется между электронами и фононами, так что

$$\gamma [T_e^2(0) - T_B^2] = \gamma(T_{th}^2 - T_B^2) + \frac{1}{2} [c_p(T_{th})T_{th} - c_p(T_B)T_B]. \quad (3.8)$$

Отсюда в приближении $T_{th}^2 \gg T_B^2$ следует равенство

$$\Theta_{th}^4 - 2\zeta(1 - \Theta_{th}^2) = 0, \quad (3.9)$$

имеющее корни

$$\Theta_{1,2}^2 = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + 2\zeta}, \quad (3.10)$$

причем $\Theta_{th} = \Theta_1$ (поскольку $\Theta_1 > 0$).

Решение уравнения (3.7) с начальным условием $\Theta(0) = 1$ и при произвольном значении ζ может быть записано следующим образом:

$$\Theta^2(x) = \frac{\Theta_1^2(1 - \Theta_2^2) - \Theta_2^2(1 - \Theta_1^2) \exp[-(x/2\zeta)(\Theta_1^2 - \Theta_2^2)]}{1 - \Theta_2^2 - (1 - \Theta_1^2) \exp[-(x/2\zeta)(\Theta_1^2 - \Theta_2^2)]}. \quad (3.11)$$

Вид функции $\Theta(x)$ определяется единственным параметром ζ , величина которого задается начальной температурой электронов $T_e(0)$. Если ввести температуру T^* , такую что $c_e(T^*) = c_p(T^*)$ (для обычных металлов $T^* \sim 1$ К), то при $T_e(0) \gg T^*$ параметр $\zeta \ll 1$; в противоположном пределе $T_e(0) \ll T^*$, но $T_e(0) \gg T_B$ (это, по-видимому, нелегко реализовать в эксперименте) величина $\zeta \gg 1$. Из (3.7) и (3.11) следует, что при малых ζ температура $\Theta(x)$ сначала быстро уменьшается с характерным временем $\tau_e(T_e(0)) = \zeta\tau_{pe}$, а затем выходит на стационарное значение $\Theta_{th} \approx (2\zeta)^{1/4}$ за время $\tau_e(T_{th}) \sim \zeta^{1/2}\tau_{pe}$. Заметим, что оба этих масштаба времени существенно меньше, чем характерное время фонон-электронных столкновений τ_{pe} . В пределе $\zeta \gg 1$ температура термализации $\Theta_{th} \approx 1 - \zeta^{-1}$, т.е. мало отличается от начальной температуры, а характерное время достижения равновесного состояния совпадает с τ_{pe} . Зависимости $\Theta(x)$ для ряда значений ζ представлены на рис. 1.

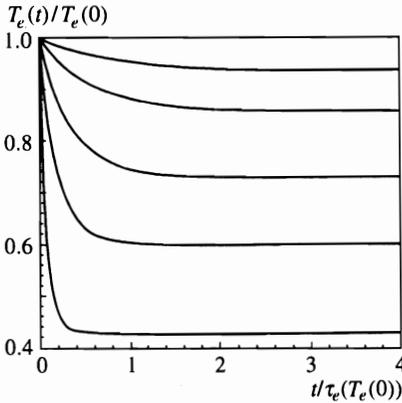


Рис. 1. Релаксация нормированной электронной температуры в процессе термализации электрон-фононной системы эффективно толстой пленки при $r = -1$. Кривые (снизу вверх) соответствуют значениям параметра $\zeta = 0.02, 0.1, 0.3, 1, 3$. Горизонтальные асимптотики кривых представляют собой соответствующие температуры термализации Θ_{th}

Перейдем к рассмотрению произвольных значений r . Как следует из анализа случая $r = -1$, длительность процесса термализации при $T_e(0) \gg T^*$ определяется временем электрон-фононных столкновений $\tau_e(T_{th})$, которое существенно меньше, чем время фонон-электронных соударений. Это обстоятельство позволяет заменить в уравнении (3.5) экспоненту $\exp[-\nu(t - t')]$ единицей и провести интегрирование по волновым векторам фононов. В результате вычислений получаем следующее уравнение для нормированной температуры $\Theta(x)$ (которая предполагается большой по сравнению с Θ_B):

$$\zeta \Theta \frac{d\Theta}{dx} = -(5+r)^{-1} \Theta^{5+r} + \frac{F_r(3+r)}{(5+r)^2} \int_0^x dx' \Theta^{6+2r}(x'), \tag{3.12}$$

где

$$F_r = \frac{4\pi^4 D_{6+2r}}{15(3+r)D_{5+r}^2}.$$

На первом, начальном этапе релаксации можно пренебречь интегральным слагаемым и получить решение (3.2) укороченного уравнения. Поскольку $\Theta_{th} \ll 1$, можно полагать, что начальный этап релаксации вносит основной вклад в интегральное слагаемое в (3.12), и заменить в нем искомую функцию $\Theta(x)$ на функцию $\Theta_0(x)$, даваемую выражением (3.2). Заметим, что

$$\int_0^x dx' \Theta_0^{6+2r}(x') = \frac{5+r}{3+r} [1 - \Theta_0^{3+r}(x)]. \tag{3.13}$$

Если теперь подставить (3.13) в (3.12) и заменить $\Theta_0(x)$ на $\Theta(x)$, мы приходим к дифференциальному уравнению в обычных производных:

$$\zeta \Theta \frac{d\Theta}{dx} = -\frac{1}{5+r} [\Theta^{5+r} - F_r \zeta (1 - \Theta^{3+r})], \tag{3.14}$$

которое при $r = -1$ совпадает с точным уравнением (3.6), так как $F_{-1} = 2$. Строго говоря, уравнение (3.14) справедливо в области, где первый член в квадратных скобках

существенно больше второго. Вместе с тем оно, как мы надеемся, правильно описывает поведение электронной температуры и в области больших x , давая, в частности, ее стационарное значение

$$\Theta_{th} \approx (F_r \zeta)^{1/(5+r)},$$

которое при $-1 < r < 0$ мало отличается от значения $\Theta_{th} \approx (2\zeta)^{1/4}$, следующего из точного уравнения (3.9). (Напомним, что при $T_e(0) \gg T^*$ параметр $\zeta \ll 1$.)

Чтобы найти характерное время термализации системы при произвольных r , рассмотрим решение уравнения (3.14) для больших значений x . Разложив правую часть (3.14) по $\Theta'_1 = \Theta - \Theta_{th}$, получим для Θ'_1 линейное уравнение

$$\zeta \frac{d\Theta'_1}{dx} = -\Theta_{th}^{3+r} \Theta'_1, \quad (3.15)$$

из которого следует, что температура электронов приближается к своему стационарному значению T_{th} по экспоненциальному закону с характерным временем термализации $t_{th} \sim \tau_e(T_{th})$. Таким образом, спустя время t_{th} после поглощения лазерного импульса фоннная функция распределения во всей пленке (за исключением малой ее области толщиной порядка $st_{th} \ll l_{pe}$ у границы с подложкой) становится бозевской и характеризуется фоннной температурой, совпадающей с температурой электронов. Дальнейшая релаксация избыточной энергии не нарушает электрон-фононной термализации.

Чтобы проанализировать последний, третий этап остывания эффективно толстой пленки, рассмотрим несколько более общий случай, когда поглощаемая пленкой мощность $W(t)$ существенно меняется на временах гораздо больших, чем характерное время фонно-электронных столкновений τ_{pe} , а затем положим $W = 0$. В этом случае интегральное по времени слагаемое в уравнении (2.37) сводится к локальному. Действительно, ядро интеграла при $\tau_{es} \gg \tau_{pe}$ экспоненциально уменьшается на временах $t - t' \sim \tau_{pe}$, поэтому для более медленных изменений $W(t)$ функцию $n_q[T_e(t')]$ можно разложить по $t - t'$ и ограничиться линейными членами разложения. Проинтегрировав по t' , получим для $T = T_e = T_p$ уравнение

$$[c_e(T) + c_p(T)] \frac{dT}{dt} = W(t) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Omega \frac{\alpha(\vartheta) s_z}{d} [n_q(T(t)) - n_q(T_B)]. \quad (3.16)$$

В области не слишком низких температур, где $c_p(T) \gg c_e(T)$, т. е. $T \gg T^*$, левую и правую части уравнения (3.16) удобно выразить через плотность энергии фононов

$$\mathcal{E}_p(T) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Omega n_q(T). \quad (3.17)$$

Отделив в правой части уравнения (3.16) интегрирование по углам от интегрирования по модулю волнового вектора q , приходим к линейному дифференциальному уравнению для $\mathcal{E}_p(T)$:

$$\frac{d\mathcal{E}_p(T(t))}{dt} = W(t) - \frac{1}{\tau_{es}} [\mathcal{E}_p(T(t)) - \mathcal{E}_p(T_B)]. \quad (3.18)$$

Решение уравнения (3.18) может быть представлено в следующем общем виде:

$$\mathcal{E}_p(T(t)) = \mathcal{E}_p(T_B) + [\mathcal{E}_p(T(t_0)) - \mathcal{E}_p(T_B)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{es}}\right) + \int_{t_0}^t W(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_{es}}\right) dt', \quad (3.19)$$

без ограничений на величину поглощаемой мощности $W(t)$; время $t_0 \sim t_{th}$.

Чтобы описать релаксацию избыточной энергии нагретой пленки на последнем этапе, в формуле (3.19) следует положить $W(t) = 0$. При этом становится очевидным, что в нелинейном режиме экспоненциально релаксирует энергия системы, а не ее температура. Экспоненциальная релаксация температуры пленки происходит, когда $T(t) - T_B \ll T_B$.

Выше рассмотрена нелинейная релаксация электронной температуры при сильном нагреве пленки. Имея в виду, однако, возможные эксперименты с нагревом пленки лазерными импульсами малой энергии, обратимся теперь к случаю энергетической релаксации слабонеравновесной электрон-фононной системы, когда $T_e(0) - T_B \ll T_B$.

После слабого нагрева эффективно тонкой пленки неравновесная добавка к электронной температуре $T_1(t) = T_e(t) - T_B$ подчиняется уравнению

$$\tau_e(T_B) \frac{dT_1}{dt} = -T_1, \tag{3.20}$$

имеющему экспоненциальное решение

$$T_1(t) = T_1(0) \exp[-t/\tau_e(T_B)]. \tag{3.21}$$

В случае слабого начального нагрева эффективно толстой пленки процесс термализации электронов и фононов описывается следующим интегродифференциальным уравнением (ср. с (3.5)):

$$c_e(T_B) \frac{dT_1}{dt} = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar\omega_q \nu \frac{dn_q}{dT_B} \left[T_1(t) - \int_0^t dt' T_1(t') \nu e^{-\nu(t-t')} \right]. \tag{3.22}$$

Получим сначала точное решение уравнения (3.22) для значения $\tau = -1$, при котором частота фонон-электронных столкновений ν не зависит от волнового вектора фонона q . Дифференцированием по времени (3.22) может быть преобразовано в дифференциальное уравнение

$$\zeta_B \frac{d^2T_1}{dx^2} = -(1 + \zeta_B) \frac{dT_1}{dx}, \tag{3.23}$$

которое имеет решение

$$T_1(x) = [T_1(0) - T_1(\infty)] \exp[-x(1 + \zeta_B)/\zeta_B] + T_1(\infty). \tag{3.24}$$

Здесь параметр $\zeta_B = c_e(T_B)/c_p(T_B)$, а температура термализации

$$T_1(\infty) = T_1(0)\zeta_B/(1 + \zeta_B).$$

Таким образом, длительность процесса термализации определяется временем электрон-фононных соударений $\tau_e(T_B)$ при $\zeta_B \ll 1$ и временем фонон-электронных столкновений $\tau_{pe}(T_B)$ при $\zeta_B \gg 1$.

Рассмотрим теперь произвольные значения τ в пределе $\zeta_B \ll 1$, когда время термализации системы мало по сравнению с $\tau_{pe}(T_B)$. Это обстоятельство позволяет заменить экспоненту $\exp[-\nu(t-t')]$ в уравнении (3.22) единицей и после дифференцирования по времени получить уравнение

$$\zeta_B \frac{d^2T_1}{dx^2} + \frac{dT_1}{dx} - K_r T_1 = 0, \tag{3.25}$$

где число

$$K_r = \frac{4\pi^4(6+2r)D_{6+2r}}{15(5+r)^2D_{5+r}^2}.$$

Удовлетворяющее условию ограниченности при $x = \infty$ решение уравнения (3.25) имеет вид

$$T_1(x) = T_1(0) \exp[-(1/\zeta_B + K_r)x]. \quad (3.26)$$

Заметим, что при $r = -1$ число $K_{-1} = 1$, т. е. значение показателя экспоненты в (3.26) совпадает с показателем экспоненты точного решения (3.24). Полученное решение правильно описывает начальный этап энергетической релаксации системы, но дает неверную асимптотику при $x \rightarrow \infty$. Исправляя этот недостаток, на основании (3.24) и (3.26) можно записать интерполяционную формулу

$$T_1(x) = [T_1(0) - T_1(\infty)] \exp[-(1/\zeta_B + K_r)x] + T_1(\infty), \quad (3.27)$$

справедливую как при малых, так и при больших значениях x .

После термализации электрон-фононной системы происходит экспоненциальная релаксация температуры пленки, описываемая зависимостью

$$T_1(t) = T_1(t_0) \exp[-(t - t_0)/\tau_{es}], \quad (3.28)$$

где $T_1(t_0)$ совпадает с $T_1(\infty) = \zeta_B T_1(0)$, а t_0 имеет порядок времени термализации системы. Объединяя результаты (3.27) и (3.28), можно записать единую интерполяционную формулу для всех этапов релаксации электронной температуры в эффективно толстой пленке при ее слабом начальном нагреве:

$$T_1(x) = T_1(0) \left\{ (1 - \zeta_B) \exp\left[-\frac{(1 + \zeta_B K_r)t}{\tau_e(T_B)}\right] + \zeta_B \right\} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{es}}\right). \quad (3.29)$$

4. НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ОСТЫВАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ

Электронная температура T_e не является величиной, непосредственно измеряемой в эксперименте. Вместе с тем, как будет показано в этом разделе, экспериментальное исследование временной зависимости $T_e(t)$ может быть проведено косвенным образом с помощью измерений релаксационной динамики электропроводности пленки. С такой целью ниже мы рассмотрим случай, когда малый («измерительный») постоянный ток со средней плотностью $\langle j(z) \rangle = j_0$ протекает через пленку, которая в момент $t = 0$ нагревается импульсом энергии \mathcal{E}_0 . Будем полагать величину j_0 достаточно малой, чтобы пренебречь нагревом пленки током.

В рассматриваемом случае напряженность поля в пленке имеет вид $E(t) = E_0 + E_1(t)$, где E_0 — электрическое поле при $t < 0$. Величина E_0 определяется как остаточным сопротивлением пленки, так и фононным вкладом в сопротивление при температуре термостата.

Прежде чем перейти к довольно громоздким расчетам, рассмотрим общую схему вычисления нестационарной компоненты электрического поля $E_1(t)$ по теории возмущений. Как будет видно из дальнейшего (см. формулу (4.6)), для средней по толщине

пленки плотности тока j_0 можно записать соотношение

$$j_0 = [\sigma_0 + \sigma_{ph}(t)] E(t) - \sigma_0 \tau_i \frac{dE}{dt}, \quad (4.1)$$

где проводимость содержит вклады от рассеяния электронов на примесях, σ_0 , и на фонах, $\sigma_{ph}(t)$. Поскольку ток, текущий через пленку, фиксирован и не зависит от интенсивности нагрева, то выполняется равенство

$$j_0 = [\sigma_0 + \sigma_{ph}(T_B)] E_0 = [\sigma_0 + \sigma_{ph}(t)] [E_0 + E_1(t)]. \quad (4.2)$$

Здесь мы учли, что слагаемое, содержащее производную dE/dt , мало по сравнению с $\sigma_0 E_1$ в меру малости отношения $\tau_i/\tau_e \ll 1$ (см. ниже). Так как обычно в пленках $\sigma_0 \gg |\sigma_{ph}|$ и (в нашей постановке задачи) стационарная компонента электрического поля E_0 много больше нестационарной компоненты E_1 , то, удерживая основной вклад, для нестационарной компоненты поля можно записать простое выражение

$$E_1(t) = E_0 [\sigma_{ph}(T_B) - \sigma_{ph}(t)] / \sigma_0. \quad (4.3)$$

Таким образом, для вычисления $E_1(t)$ следует в явном виде найти фононный вклад в электропроводность пленки $\sigma_{ph}(t)$.

Чтобы получить соотношение, связывающее E и T_e в нестационарном случае (случай нагрева пленки постоянным током рассмотрен в [5]), в выражение для усредненной плотности тока (2.22) подставим анизотропную часть электронной функции распределения, определяемую формулами (2.16)–(2.18). С учетом явного выражения для интеграла электрон-фононных столкновений имеем

$$j_0 = \sigma_0 \mathbf{E}(t) - \sigma_0 \tau_i \frac{d\mathbf{E}}{dt} - \left(\frac{e\tau_i \hbar}{m} \right)^2 \frac{1}{d} \int_0^d dz \int \frac{2d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} w(q) \mathbf{q}(\mathbf{E}\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}} \times \\ \times \{ [f_0(\Omega - \varepsilon_{\mathbf{k}}) + N_{-q}] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Omega) + [f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \Omega) + N_q] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \Omega) \}, \quad (4.4)$$

где остаточная проводимость пленки $\sigma_0 = n_0 e^2 \tau_i / m$ (n_0 — концентрация свободных электронов). Для вычисления входящих в (4.4) интегралов воспользуемся сферической системой координат, в которой полярная ось направлена перпендикулярно пленке, а азимутальный угол отсчитывается от направления, заданного вектором плотности тока j_0 .

Обозначив полярный и азимутальный углы векторов \mathbf{q} и \mathbf{k} соответственно через ϑ_1, φ_1 и ϑ_2, φ_2 и учитывая, что N_q не зависит от угла φ_1 , проведем интегрирование по азимутальным углам. Для этого заметим, что если некоторая функция Φ зависит от разности углов $\varphi_1 - \varphi_2$, то

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \Phi(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi \int_0^{2\pi} d\psi \cos \psi \Phi(\psi). \quad (4.5)$$

Далее, воспользовавшись присутствием в (4.4) δ -функций, можно выполнить интегрирование по ψ . Результат интегрирования существенно упрощается, если заметить, что в области температур $T > \Theta_D^2 / \varepsilon_F$, где электрон-фононные столкновения доминируют

над электрон-электронными, отношение $q/k \sim T/\Theta_D \gg s/v_F$. На основании этого неравенства можно пренебречь различиями в аргументах δ -функций и записать

$$j_0 = \sigma_0 E(t) - \sigma_0 \tau_i \frac{dE}{dt} - \frac{e^2 \tau_i^2 E(t)}{16\pi^5 m d} \int_0^d dz \int k^2 dk \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} \int_{-1}^1 dv \int dq q^2 w(q) \times \\ \times \int_{-1}^1 du [f_0(\Omega - \varepsilon_k) + f_0(\varepsilon_k + \Omega) + N_q + N_{-q}] (uv + \delta) Y^{-1/2} \chi(Y). \quad (4.6)$$

Здесь введены обозначения $Y = [(1 - u^2)(1 - v^2) - (uv + \delta)^2]$, $\delta = q/2k$, $u = \cos \vartheta_1$, $v = \cos \vartheta_2$, $\chi(Y)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($\chi = 1$ при $Y > 0$, $\chi = 0$ при $Y < 0$). Интегрирование по v в (4.6) проводится с помощью формулы

$$\int_{v_1}^{v_2} dv (uv + \delta) Y^{-1/2} = \pi \delta(1 - u^2), \quad (4.7)$$

где v_1 и v_2 — корни уравнения $Y(v) = 0$. Вычисление интеграла по k дает для фононного вклада в проводимость выражение

$$\sigma_{ph} = -\frac{e^2 \tau_i^2 N(0)}{32\pi^2 m k_F} \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_0^{q_D} dq q^3 w(q) \int_{-1}^1 du (1 - u^2) [R(\Omega) + N_q + N_{-q}], \quad (4.8)$$

где

$$R(\Omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{df_0}{d\xi} [f_0(\Omega - \xi) + f_0(\xi + \Omega)] = -2n_q(T_e) + 2n_q(T_e) [1 + n_q(T_e)] \frac{\Omega}{k_B T_e}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.8) естественным образом разделяется на две части. Введем

$$\sigma_{ph}^{(1)} = -\frac{e^2 \tau_i^2 N(0)}{24\pi^2 m k_F} \int_0^{q_D} dq q^3 w(q) n_q(T_e) [1 + n_q(T_e)] \frac{\Omega}{k_B T_e}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_{ph}^{(2)} = \frac{e^2 \tau_i^2 N(0)}{32\pi^2 m k_F} \frac{1}{d} \int_0^d dz \int_0^{q_D} dq q^3 w(q) \int_{-1}^1 du (1 - u^2) [2n_q(T_e) - N_q - N_{-q}]. \quad (4.11)$$

Формула (4.10) определяет вклад в проводимость пленки, связанный с рассеянием электронов, имеющих температуру $T_e(t)$, на фонах с той же температурой. В стационарном однородном случае $\sigma_{ph}^{(1)}$ представляет собой известный фононный вклад в электросопротивление, который при $w(q) \propto q$ пропорционален T_e^5 (соотношение Блоха-Грюнайзена). В более общем случае (2.9'), когда $w(q) \propto q^{1+r}$, для $\sigma_{ph}^{(1)}$ получается выражение

$$\sigma_{ph}^{(1)}(T_e(t)) = -\frac{(5+r)D_{5+r} e^2 \tau_i^2 N(0) C_r}{12\pi^2 m k_F (\hbar s)^{5+r}} [k_B T_e(t)]^{5+r}. \quad (4.12)$$

Соответствующая добавка к удельному сопротивлению пленки с учетом неравенства $|\sigma_{ph}^{(1)}| \ll \sigma_0$ и явного вида C_r дается формулой

$$\rho_{ph}^{(1)} = -\sigma_{ph}^{(1)} / \sigma_0^2 = \frac{(5+r)D_{5+r}m^2\mu_1^2}{12\pi^3\hbar^7\rho s^4(n_0es)^2} [k_B T_e(t)]^{5+r}. \quad (4.13)$$

Фононный вклад $\sigma_{ph}^{(2)}$ не равен нулю, когда усредненная по толщине пленки фононная функция распределения отлична от $n_q(T_e)$. В стационарном случае причиной такого отличия является неоднородность фононной функции распределения, связанная с уходом фононов в подложку. В нестационарных условиях еще одной причиной отмеченного различия может быть динамика фононной функции распределения.

Подстановка в (4.11) выражений для фононной функции распределения и усреднение по z дают

$$\sigma_{ph}^{(2)} = \frac{e^2\tau_i^2 N(0)}{8\pi^2 m k_F} \int_0^{qd} dq q^3 w(q) \int_0^1 du (1-u^2) \left\{ n_q(T_e(t)) - n_q(T_B) - \int_0^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \nu e^{-\nu(t-t')} \beta^{|\tau|} (1 - \alpha\{\tau\}) \right\}, \quad (4.14)$$

причем зависимость $T_e(t)$ в общем случае задана уравнением (2.37). Довольно сложная зависимость в (4.14) от $u = \cos \vartheta_1$ главным образом предопределена общностью этого выражения, справедливого при произвольных соотношениях между d и l_{pe} . Как обычно, существенные упрощения возникают при исследовании предельных случаев. Так, для эффективно тонких пленок, где почти нет перепоглощения фононов электронами, фононная функция распределения $N_q \approx n_q(T_B)$, и из (4.14) получаем

$$\sigma_{ph}^{(2)} [T_e(t)] = \frac{D_{5+r}e^2\tau_i^2 N(0)C_r}{12\pi^2 m k_F (\hbar s)^{5+r}} k_B^{5+r} [T_e^{5+r}(t) - T_B^{5+r}]. \quad (4.15)$$

Объединив этот результат с вкладом (4.12), имеем для эффективно тонких пленок

$$\sigma_{ph} = -\frac{D_{5+r}e^2\tau_i^2 N(0)C_r}{12\pi^2 m k_F (\hbar s)^{5+r}} k_B^{5+r} \{ (5+r)T_B^{5+r} + (4+r) [T_e^{5+r}(t) - T_B^{5+r}] \}. \quad (4.16)$$

Формула (4.16) записана таким образом, чтобы явно выделить характерный для ситуации электронного перегрева вклад в проводимость пленки, определяемый нагревом электронов относительно «холодных» фононов, имеющих температуру термостата T_B (последнее слагаемое в фигурных скобках). Адиабатическое следование этого вклада в проводимость за электронной температурой, т. е. отсутствие запаздывания, непосредственно связано с отмеченной выше приближенной стационарностью фононной функции распределения в режиме электронного перегрева. Следует также иметь в виду, что результат (4.16) справедлив при произвольной зависимости $T_e(t)$, а значит, его можно использовать и для описания релаксации проводимости после импульсного нагрева. Введя в (4.16) характерное время электрон-фононных соударений, получаем

$$\sigma_{ph}(\Theta(t)) = -\frac{\pi^2\sigma_0\tau_i}{3(5+r)\tau_e(T_e(0))} \left[\frac{T_e(0)}{\Theta_D} \right]^2 [(4+r)\Theta^{5+r}(t) + \Theta_B^{5+r}]. \quad (4.17)$$

Здесь множитель $[T_e(0)/\Theta_D]^2$ связан с известной концепцией неэффективности вклада электрон-фононных столкновений в сопротивление пленки при низких температурах. Временная зависимость безразмерной температуры $\Theta(t)$ в (4.17) определяется уравнением (3.1).

Подстановка в (4.3) выражения (4.17) дает для эффективно тонкой пленки

$$E_1(t) = E_0 \frac{(4+r)\pi^2\tau_i}{3(5+r)\tau_e(T_e(0))} \left[\frac{T_e(0)}{\Theta_D} \right]^2 [\Theta^{5+r}(t) - \Theta_B^{5+r}].$$

В общем случае зависимость $\Theta(t)$ определяется уравнением (3.1). В случае сильного нагрева, когда на начальном этапе остывания электронов выполняется неравенство $\Theta(t) \gg \Theta_B$, а зависимость $\Theta(t)$ дается формулой (3.2), релаксация проводимости имеет степенной характер. При этом нестационарная компонента электрического поля в пленке имеет вид

$$E_1(t) = \frac{(4+r)\pi^2 E_0 \tau_i}{3(5+r)\tau_e(T_e(0))} \left[\frac{T_e(0)}{\Theta_D} \right]^2 \left[1 + \frac{3+r}{5+r} \frac{t}{\tau_e(T_e(0))} \right]^{-(5+r)/(3+r)} \quad (4.18)$$

Если первоначальный нагрев электронов мал и разность $\Theta(t) - \Theta_B \ll \Theta_B$, нестационарный отклик тонкой пленки на основании формулы (3.21) может быть представлен выражением

$$E_1(t) = (4+r)\sigma_0\rho_{ph}(T_B)\frac{T_1(0)}{T_B} \exp\left[-\frac{t}{\tau_e(T_B)}\right] E_0. \quad (4.19)$$

Здесь $\rho_{ph}(T_B)$ — фоннный вклад в удельное сопротивление при температуре термостата:

$$\rho_{ph}(T_B) = \frac{\pi^2 m}{3n_0 e^2 \tau_e(T_B)} \left(\frac{T_B}{\Theta_D} \right)^2.$$

Таким образом, измерение временной зависимости $E_1(t)$ в случае слабого нагрева дает важную информацию о температурной зависимости времени электрон-фононных столкновений в тонкой пленке и соответственно о частотной зависимости функции Элиашберга.

Для частного случая $r = -1$ уравнение (3.1) интегрируется, что позволяет записать относительную величину нестационарной компоненты электрического поля в явном виде:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{E_1(t)}{E_1(0)} = \frac{\Theta_B^4}{1 - \Theta_B^4} \left\{ \left[\frac{(1 + \Theta_B^2) + (1 - \Theta_B^2) \exp[-t/\tau_e(T_B)]}{(1 + \Theta_B^2) - (1 - \Theta_B^2) \exp[-t/\tau_e(T_B)]} \right]^2 - 1 \right\} = \\ &= \Theta_B^4 \left[\Theta_B^2 \operatorname{ch} \frac{t}{2\tau_e(T_B)} + \operatorname{sh} \frac{t}{2\tau_e(T_B)} \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Выражение (4.20) справедливо при произвольном значении начального нагрева тонкой пленки, т. е. при любом значении $\Theta_B < 1$. Графики $e_1(t)$ для $\Theta = 0.2, 0.5$ и 0.9 представлены на рис. 2.

Чтобы проанализировать нелинейную релаксацию проводимости эффективно толстой пленки, воспользуемся ее представлением в виде суммы двух слагаемых: $\sigma_{ph} =$

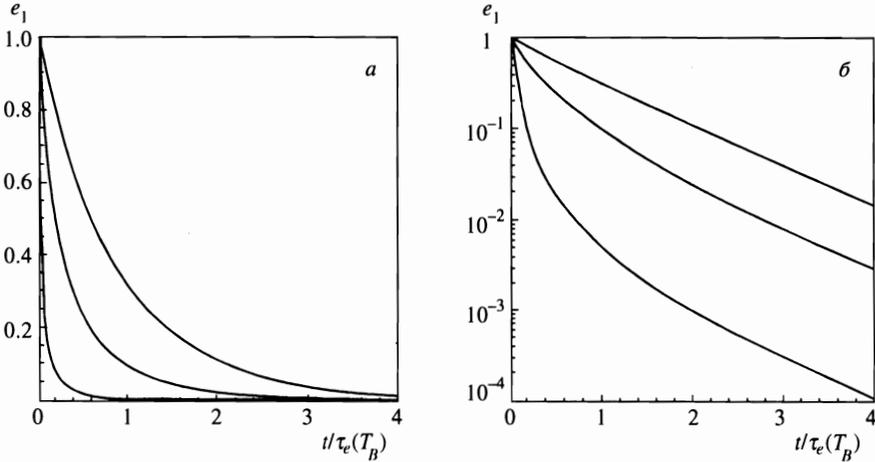


Рис. 2. Релаксация нормированной добавки к электрическому полю, возникающей в эффективно тонкой пленке после импульсного нагрева в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах. Левая кривая соответствует сильному начальному нагреву, $\Theta_B = T_B/T_e(0) = 0.2$, средняя кривая соответствует умеренному нагреву, $\Theta_B = 0.5$, а правая кривая представляет релаксацию e_1 в случае слабого нагрева, $\Theta_B = 0.9$

$= \sigma_{ph}^{(1)} + \sigma_{ph}^{(2)}$, где $\sigma_{ph}^{(1)}$ и $\sigma_{ph}^{(2)}$ даются формулами (4.12) и (4.14). Напомним, что $\sigma_{ph}^{(1)}$ представляет собой вклад в проводимость пленки, связанный с рассеянием электронов с температурой $T_e(t)$ на фононах с той же температурой. Вклад $\sigma_{ph}^{(2)}$ учитывает отклонение фононной функции распределения от термализованной. Общее выражение (4.14) для $\sigma_{ph}^{(2)}$ можно упростить, рассматривая различные стадии энергетической релаксации. Так, в течение первых двух стадий, когда электроны в основном излучают неравновесные фононы и когда вследствие перепоглощения этих фононов устанавливается тепловое равновесие между электронами и фононами, можно игнорировать уход фононов в подложку и положить в (4.14) $\alpha = 0, \beta = 1$. В этом случае

$$\sigma_{ph}^{(2)} = \frac{e^2 \tau_i^2 N(0)}{12 \pi^2 m k_F} \int_0^{q_D} dq q^3 w(q) \left\{ n_q(T_e(t)) - n_q(T_B) - \int_0^t dt' [n_q(T_e(t')) - n_q(T_B)] \nu e^{-\nu(t-t')} \right\}. \tag{4.21}$$

Подставляя сюда

$$w(q) = \frac{2 \pi^2 \hbar^3}{m^2 s} \nu(q)$$

и сравнивая полученный результат с равенством (3.5), приходим к простой формуле

$$\sigma_{ph}^{(2)}(t) = \frac{e^2 \tau_i^2}{6 m^2 s^2} c_e(T_e(t)) \frac{dT_e}{dt}. \tag{4.22}$$

На основании уравнения (3.14), справедливого при $T_e(t) \gg T_B$, правая часть полученного соотношения может быть выражена через степени электронной температуры:

$$\sigma_{ph}^{(2)}(T_e(t)) = \frac{D_{5+r}e^2\tau_i^2N(0)C_r}{12\pi^2mk_F(\hbar s)^{5+r}}k_B^{5+r} \times \left\{ T_e^{5+r}(t) - \frac{5F_rN(0)\hbar^3s^3}{2k_B^2} [T_e^{3+r}(0) - T_e^{3+r}(t)] \right\}. \quad (4.23)$$

Объединяя два вклада в σ_{ph} и переходя к нормированной температуре, получаем

$$\sigma_{ph}(\Theta(t)) = -\frac{\pi^2\sigma_0\tau_i}{3(5+r)\tau_e(T_e(0))} \left[\frac{T_e(0)}{\Theta_D} \right]^2 [(4+r)\Theta^{5+r} + F_r\zeta(1 - \Theta^{3+r})], \quad (4.24)$$

где зависимость $\Theta(t)$ определена уравнением (3.14).

На последнем этапе энергетической релаксации электрон-фононная система эффективно толстой пленки термализована, т. е. температуры электронов и фононов совпадают. В этом случае можно опустить вклад $\sigma_{ph}^{(2)}$ и считать $\sigma_{ph} = \sigma_{ph}^{(1)}(T(t))$. Динамическое уравнение для температуры T следует из (3.19), если положить $W(t) = 0$, а энергию \mathcal{E}_p выразить через температуру:

$$\mathcal{E}_p = \frac{\pi^2k_B^4T^4}{30\hbar^3s^3}. \quad (4.25)$$

В результате приходим к уравнению для $T(t)$ вида

$$T(t) = \left[T_B^4 + (T_{th}^4 - T_B^4) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_{es}}\right) \right]^{1/4}, \quad (4.26)$$

где время t_0 имеет порядок времени термализации электрон-фононной системы эффективно толстой пленки, t_{th} , а температура термализации дается равенством

$$T_{th} = T_e(0) \left[(\zeta^2 + 2\zeta)^{1/2} - \zeta \right]^{1/2}. \quad (4.27)$$

Таким образом, на последнем этапе релаксации электрон-фононной системы

$$\sigma_{ph}(t) = -\frac{\pi^2\sigma_0\tau_i}{3\tau_e(T(t))} \left[\frac{T(t)}{\Theta_D} \right]^2, \quad (4.28)$$

где $T(t)$ дается формулой (4.26).

Можно показать, что в случае эффективно толстой пленки временная зависимость относительной величины электрического отклика описывается выражением

$$e_1(t) = \Theta^{5+r} + F_r\zeta(4+r)^{-1}(1 - \Theta^{3+r}) \quad (4.29)$$

для первых двух стадий релаксации (нормированная температура $\Theta(t)$ является решением уравнения (3.14)) и формулой

$$E_1(t) = E_0 \frac{\pi^2\tau_i}{3\tau_e(T_B)} \left(\frac{T_B}{\Theta_D} \right)^2 \left\{ \left[\frac{T(t)}{T_B} \right]^{5+r} - 1 \right\} \quad (4.30)$$

для третьей стадии. Здесь $T(t)$ дается выражением (4.26).

При слабом нагреве эффективно толстой пленки подстановка (3.24) в формулы (4.12) и (4.22) дает для двух первых этапов релаксации выражение

$$\sigma_{ph}(t) = \sigma_{ph}(T_B) - \frac{\pi^2 \sigma_0 \tau_i}{3\tau_e(T_B)} \left[\frac{T_B}{\Theta_D} \right]^2 \frac{T_1(0)}{T_B} \left\{ (4+r) \exp \left[-\frac{(1+\zeta_B K_\tau)t}{\tau_e(T_B)} \right] + (5+r)\zeta_B \right\}. \quad (4.31)$$

Если теперь воспользоваться соотношением (4.3) и учесть динамику ухода фононов в подложку, то для нестационарной части электрического поля $E_1(t)$ нетрудно получить интерполяционную формулу, пригодную для описания всех трех этапов релаксации энергии электронов:

$$E_1(t) = E_0 \sigma_0 \rho_{ph}(T_B) \frac{T_1(0)}{T_B} \left\{ (4+r) \exp \left[-\frac{(1+\zeta_B K_\tau)t}{\tau_e(T_B)} \right] + (5+r)\zeta_B \right\} \exp \left(-\frac{t}{\tau_{es}} \right). \quad (4.32)$$

Таким образом, для эффективно толстой пленки зависимость $E_1(t)$ имеет характерную биэкспоненциальную форму с сильно различающимися постоянными времени.

5. ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ

В экспериментах по энергетической релаксации электронов в металлах обычно изучаются либо вариации оптических характеристик пленок (например, коэффициента отражения) [1–3], либо динамика электрического сопротивления. При этом измерение нестационарной добавки к сопротивлению тонких пленок в основном проводилось при импульсном нагреве (см., например, [27–30]). В согласии с результатами разд. 4 при сильном импульсном нагреве как эффективно толстой, так и эффективно тонкой пленок должна наблюдаться начальная степенная релаксация сопротивления с характерным временем порядка времени электрон-фононного взаимодействия при начальной температуре электронов, т. е. $E_1(t) \propto 1 - t/\tau_e(T_e(0))$ (см. рис. 2а). Отсюда следует, что по начальной асимптотике $E_1(t)$ в эксперименте можно найти значение времени электрон-фононных столкновений $\tau_e(T_e(0))$. При этом время фонон-электронных столкновений $\tau_{pe}(T_e(0))$ получается на основании формулы (2.48) умножением $\tau_e(T_e(0))$ на отношение фононной и электронной теплоемкостей $c_p(T_e(0))/c_e(T_e(0))$. Заметим, что время электрон-фононных столкновений при температуре термостата, $\tau_e(T_B)$, для тонкой пленки может быть найдено по асимптотике $e_1(t)$ при $t \gg \tau_e(T_e(0))$ (см. формулу (4.20) и рис. 2б). Таким образом, в рамках релаксационного эксперимента на тонких пленках имеется возможность извлечения «начальных» и «конечных» времен релаксации в широком диапазоне температур при изменении T_B и интенсивности первоначального нагрева.

В эффективно толстых пленках быстрая компонента фотоотклика, связанная с процессом установления теплового равновесия между электронами и фононами в пленке, сменяется медленной болометрической компонентой, которая определяется процессом ухода неравновесных фононов в подложку. В экспериментах из-за ограниченности временного разрешения аппаратуры обычно надежно наблюдается лишь релаксация болометрической компоненты фотоотклика, давая значение среднего времени ухода фононов из пленки в подложку τ_{es} [29, 30]. Один из возможных способов наблюдения быстрой компоненты фотоотклика (4.34) состоит в понижении температуры T_B , так как

тогда (при слабых нагревах) резко увеличивается время электрон-фононной релаксации τ_e .

В настоящей работе предполагалось, что в системе реализуется баллистический режим теплоотвода, т. е. что излученные в подложку фононы не возвращаются обратно в пленку. (Условия реализации такого режима обсуждались на качественном уровне в заключительной части работы [5].) Вместе с тем для широких пленок, когда отсутствует эффект растекания тепла, а прозрачность границы пленка-подложка близка к единице, поток возвращающихся в пленку из подложки неравновесных фононов оказывается существенным. Как показывают эксперименты [31], поток обратных фононов приводит на больших временах $t \gg \tau_r$ к переходу от баллистического режима теплоотвода к диффузионному, т. е. от экспоненциальной релаксации температуры пленки к степенной (пропорциональной $t^{-1/2}$). Время $\tau_r \sim \tau_{pi,s} / \langle \alpha \rangle^2$ представляет собой характерное время возвращения неравновесного фонона из подложки в пленку ($\tau_{pi,s}$ — время упругого рассеяния фононов в подложке) [31].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе основным объектом исследования является низкотемпературная ($T_e \ll \Theta_D$) динамика фононной релаксации «горячих» электронов в металлической пленке на подложке из хорошо проводящего тепло диэлектрика. Физически очевидно, что процесс энергетической релаксации играет ключевую роль в формировании отклика электрон-фононной системы при нестационарном нагреве электронов. Чтобы теоретическими методами проанализировать особенности релаксационной динамики системы, в разд. 2 рассмотрена довольно простая, но вместе с тем и достаточно реальная микроскопическая модель, основанная в первую очередь на представлении о зависящей от времени электронной температуре. Основной особенностью этой модели является возможность последовательного описания фононной динамики в пленке на языке неоднородной и нестационарной функции распределения фононов без обычно используемого (и зачастую неконтролируемого) упрощающего предположения о фононной температуре. Эта особенность нашего подхода позволяет проанализировать кинетику фононов на всех основных стадиях процесса электронной релаксации. Еще одной особенностью нашей модели является использование достаточно общего выражения (2.9'), описывающего частотную зависимость матричного элемента электрон-фононного взаимодействия, фактически эквивалентного предположению о произвольной частотной зависимости спектральной функции электрон-фононного взаимодействия (функции Элиашберга). Последнее, по нашему мнению, позволит сравнивать теоретические результаты этой работы с экспериментом в тех достаточно частых случаях, когда функция Элиашберга реальной металлической пленки отличается от стандартной.

Хотим обратить внимание также на то, что использование произвольной зависимости функции Элиашберга от частоты дает не только возможность анализировать эксперименты, но и позволяет в довольно типичном для «грязных» пленок случае $r = -1$ получить точное аналитическое решение задачи об энергетической релаксации электронов на стадии термализации. Полученное в разд. 3 точное решение может служить основой для верификации приближенных (в рамках той же модели) решений для $r \neq -1$.

Опишем вкратце главные этапы нашего подхода. Основой для расчетов служит система из двух взаимосвязанных нелинейным образом (через интегралы столкнове-

ний) нестационарных кинетических уравнений для электронной (2.1) и фононной (2.2) функций распределения, а также следующее из этой системы уравнение теплового баланса (2.21). Основным упрощающим моментом, позволяющим получить замкнутое аналитическое решение этой сложной нестационарной и нелинейной задачи, является предположение (зачастую оправданное, см. разд. 2), что в условиях доминирующего упругого рассеяния электронов искомая электронная функция распределения является фермиевской с зависящей от времени и однородной по толщине пленки температурой $T_e(t)$. Последнее оправдано ввиду существования в хороших металлах высокой электронной (по сравнению с фононной) теплопроводности. Все это позволяет получить замкнутое (в терминах $T_e(t)$) аналитическое решение линейного уравнения (2.29) для нестационарной и неоднородной фононной функции распределения (см. формулы (2.34) и (2.35)) без априорных предположений о ее виде. Подстановка этого решения в уравнение теплового баланса (2.21) приводит к замкнутому интегродифференциальному уравнению (2.37) — основному для дальнейшего исследования результату статьи. Решение последнего позволяет аналитически описать основные стадии процесса эволюции $T_e(t)$ на микроскопическом уровне (разд. 3). Так как зависимость $T_e(t)$ непосредственно не наблюдаема, то в качестве «индикатора» эволюции $T_e(t)$ мы предлагаем использовать связанное с ней временное поведение интегральной электропроводности пленки $\sigma(t)$. В разд. 4 получены соответствующие формулы и проанализировано их асимптотическое поведение в ряде интересных (по нашему мнению) экспериментальных ситуаций.

Литература

1. H. E. Elsayed-Ali, T. B. Norris, M. A. Pessot, and G. A. Mourou, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1212 (1987).
2. R. W. Schoenlien, W. Z. Lin, J. G. Fujimoto, and G. L. Eesley, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1680 (1987).
3. S. D. Brorson, A. Kazeroonian, J. S. Modera et al., *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2172 (1990).
4. М. И. Каганов, И. М. Лифшиц, Л. В. Танатаров, *ЖЭТФ* **31**, 232 (1956).
5. В. А. Шкловский, Письма в *ЖЭТФ* **26**, 679 (1977); *ЖЭТФ* **78**, 1281 (1980).
6. V. A. Shklovskij, *J. Low Temp. Phys.* **41**, 375 (1980).
7. К. В. Маслов, В. А. Шкловский, *ЖЭТФ* **71**, 1514 (1976); *ЖЭТФ* **78**, 3 (1980).
8. М. И. Каганов, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **33**, 1261 (1957).
9. G. Bergmann, W. Wei, Y. Zou, R. M. Mueller, *Phys. Rev. B* **41**, 7386 (1990).
10. Е. М. Гершензон, М. Е. Гершензон, Г. Н. Гольцман и др., *ЖЭТФ* **97**, 901 (1990).
11. A. W. Little, *Can. J. Phys.* **37**, 334 (1959).
12. P. B. Allen, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1460 (1987).
13. N. Perrin and H. Budd, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1701 (1972).
14. D. Belitz, *Phys. Rev. B* **36**, 2513 (1987).
15. Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, Мир, Москва (1965).
16. Е. М. Гершензон, Г. Н. Гольцман, А. И. Елантьев и др., *ФНТ* **14**, 753 (1988).
17. G. Bergmann, *Phys. Rep.* **27**, 159 (1976).
18. J. J. Lin and C. Y. Wu, *Europhys. Lett.* **29**, 141 (1995).
19. W. S. Fann, R. Storz, H. W. K. Tom, and J. Bokor, *Phys. Rev. B* **46**, 13592 (1992).
20. C.-K. Sun, F. Vallee, L. Acioli et al., *Phys. Rev. B* **48**, 12365 (1993).
21. S. V. Kaplan, *J. Low Temp. Phys.* **37**, 343 (1979).
22. A. I. Bezuglyj and V. A. Shklovskij, *Physica C* **202**, 234 (1992).
23. G. Bergmann, *Sol. St. Comm.* **46**, 347 (1983).
24. G. Bergmann, *Phys. Rep.* **107**, 1 (1984).

25. S. J. Dorozhkin, F. Lell, and W. Shoere, Sol. St. Comm. **60**, 245 (1986).
26. Е. М. Гершензон, М. Е. Гершензон, Г. Н. Гольцман и др., ЖЭТФ **86**, 758 (1984).
27. A. L. Shi, G. L. Huang, C. Lehane et al., Phys. Rev. B **48**, 6550 (1993).
28. N. Bluzer, Phys. Rev. B **44**, 10222 (1991).
29. N. Bluzer, J. Appl. Phys. **71**, 1336 (1992).
30. N. Bluzer, Phys. Rev. B **46**, 1033 (1992).
31. A. V. Sergeev, A. D. Semyonov, P. Kouminov et al., Phys. Rev. B **49**, 9091 (1994).