

## К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СРЕДАХ

В. И. Кляцкин<sup>1,2)</sup>, И. Г. Якушкин<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> *Институт физики атмосферы Российской академии наук  
109017, Москва, Россия*

<sup>2)</sup> *Тихоокеанский океанологический институт  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 29 ноября 1996 г.

Задача о распространении плоской световой волны в турбулентной среде рассматривается на основе идей статистической топографии. Анализируется кластерная (каустическая) структура интенсивности волнового поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, как в области слабых флуктуаций интенсивности, так и в области насыщенных флуктуаций. Оцениваются удельные (приходящиеся на единицу площади) значения общей площади областей, в которых интенсивность превышает заданный уровень, доля мощности, заключенная в этих областях, общий периметр таких областей и их среднее число. Показано, что такого рода оценки можно провести на основе знания совместного одноточечного распределения вероятностей интенсивности волнового поля и его поперечного градиента.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При распространении света в турбулентной среде пространственное распределение его интенсивности можно рассматривать как некоторую реализацию хаотического поля. Такая реализация двумерного поля  $I(x, \mathbf{R})$  в фиксированной плоскости  $x = \text{const}$ , где  $x$  — координата в направлении распространения волны, а через  $\mathbf{R} = \{y, z\}$  обозначены поперечные координаты, напоминает сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами.

Традиционно используемые методы статистического усреднения, т.е. вычисления средних значений типа  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle$ ,  $\langle I(x, \mathbf{R}_1) I(x, \mathbf{R}_2) \rangle$  и т.п., где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров среды (см., например, [1, 2]), сглаживают качественные особенности типичных реализаций, и эти характеристики зачастую не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций. Например, статистическое среднее по всем реализациям интенсивности поля плоской падающей волны постоянно, в то время как каждая его отдельная реализация стремится стать все более изрезанной в пространстве. Так, на обороте обложки — форзаце — книги [1] приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере. На фотографии [1] видно возникновение каустической структуры волнового поля. Подобные структуры возникают и наблюдаются также при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом фазовом экране.

Таким образом, статистические средние указанного выше типа обычно только в

полной совокупности характеризуют пространственные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о ее существенных деталях.

Полная статистика содержит, разумеется, всю информацию о системе. Однако на практике удается исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос — как, зная локальные статистические характеристики системы, изучить основные количественные и качественные особенности пространственного поведения отдельных реализаций? Ответ на этот вопрос дают методы статистической топографии случайных полей.

Термин «статистическая топография», по-видимому, впервые был введен в книге [3], хотя основные идеи восходят к существенно более ранним работам [4–6] (см. также обзорную работу [7], где дана подробная библиография вопроса). В этих работах статистическая топография случайных процессов и полей использовалась для анализа статических задач. Применение методов статистической топографии к динамической задаче о диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей рассматривалось в работах [7–9]. При этом в [9] решалась задача о диффузии примеси в двухмерной сжимаемой среде, особенностью которой является существование кластерных структур — компактных областей повышенной концентрации, окруженных обширными областями низкой концентрации.

Задача о распространении света в случайной среде по своей математической сути близка к задаче о диффузии. Ниже на основе идей статистической топографии будет изучена структура волнового поля оптического излучения в турбулентной среде в фиксированной плоскости  $x = \text{const}$  в зависимости от статистических параметров среды. Отметим, что впервые, по-видимому, теория выбросов случайного поля интенсивности была применена для анализа задачи о распространении волн в турбулентной среде в работах [10, 11] (см. также [12]).

## 2. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Распространение света в случайно-неоднородной среде будем рассматривать на основе скалярного параболического уравнения (см., например, [1, 2]):

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (1)$$

где через  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  обозначено отклонение диэлектрической проницаемости от единицы.

Из уравнения (1) вытекает уравнение переноса для интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R})$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \nabla_{\mathbf{R}} \{u^*(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) - u(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} u^*(x, \mathbf{R})\}, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (2)$$

Если теперь ввести комплексную фазу волнового поля по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{iS(x, \mathbf{R})\} = \exp \{\chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R})\}, \quad (1')$$

где  $\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$  и  $S(x, \mathbf{R})$  — соответственно уровень амплитуды и фаза волны, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R})\} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется полная мощность волны в плоскости  $x = \text{const}$ :

$$E_0 = \int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} I_0(\mathbf{R}). \quad (4)$$

В случае же падения на случайно-неоднородную среду плоской волны с интенсивностью  $I_0$  для пространственно-однородных флуктуаций параметров среды вместо равенства (4) имеем

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = I_0. \quad (5)$$

Уравнение (3) можно трактовать как уравнение переноса примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в приближении геометрической оптики, когда поперечный градиент фазы волны описывается замкнутым уравнением (см., например, [1, 2])

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) = \frac{k}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (3')$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае при учете дифракционных эффектов она является активной. Отметим, что в приближении геометрической оптики плотность вероятностей образования каустик в зависимости от дистанции, пройденной волной, оценивалась в работах [13–16].

Как указывалось во Введении, принципиальной особенностью диффузии примеси в потенциальном поле скоростей является существование кластерной структуры поля интенсивности, которая в рассматриваемом случае проявляется в виде возникновения каустической структуры в результате случайных фокусировок и дефокусировок в случайной среде.

Метод для нахождения статистических параметров, характеризующих эту кластерную структуру, используемый в работе [9] и основанный на аппроксимации случайного поля скоростей дельта-коррелированным по  $x$  полем, в данном случае неприменим, так как продольный радиус корреляции для фазы волны порядка длины трассы. И в данной ситуации исходное динамическое уравнение (3) становится практически бесполезным для анализа структуры поля интенсивности в случайной среде. Однако знание одноточечной плотности вероятностей для интенсивности волны как в области слабых флуктуаций, так и в области сильных флуктуаций волнового поля, полученной на основе решения уравнения (1), позволяет использовать идеологию статистической топографии.

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОПОГРАФИИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

В статистической топографии основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня интенсивности в фиксированной плоскости  $x = \text{const}$  (двухмерный случай), — определяемых равенством  $I(x, \mathbf{R}) = I = \text{const}$ .

Для анализа системы контуров удобно ввести сингулярную функцию, сосредоточенную на них,

$$\Phi(x, R; I) = \delta(I(x, R) - I), \quad (6)$$

и являющуюся функционалом параметров среды. Среднее значение (6) по ансамблю реализаций определяет одноточечную плотность вероятностей

$$P(x, R; I) = \langle \Phi(x, R; I) \rangle = \langle \delta(I(x, R) - I) \rangle. \quad (7)$$

Через функцию (6) выражаются, например, такие величины как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $I(x, \mathbf{R}) > I$ :

$$S(x, I) = \int \theta(I(x, \mathbf{R}) - I) d\mathbf{R} = \int_I^\infty d\tilde{I} \int d\mathbf{R} \Phi(x, \mathbf{R}; \tilde{I}), \quad (8)$$

и полная мощность поля, заключенная в этих областях:

$$E(x, I) = \int I(x, \mathbf{R}) \theta(I(x, \mathbf{R}) - I) d\mathbf{R} = \int_I^\infty \tilde{I} d\tilde{I} \int d\mathbf{R} \Phi(x, \mathbf{R}; \tilde{I}). \quad (9)$$

Здесь  $\theta(z)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Статистические средние этих величин выражаются через плотность вероятностей (7).

Дополнительную информацию о детальной структуре поля можно получить, включив в рассмотрение поперечный градиент интенсивности  $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ . Так, например, величина

$$L(x, I) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \quad (10)$$

описывает общую длину контуров  $I(x, \mathbf{R}) = I = \text{const}$ . Отметим, что для вычисления среднего значения в (10) теперь требуется знание совместной одноточечной плотности вероятностей поля  $I(x, \mathbf{R})$  и его градиента  $\mathbf{p}(x, \mathbf{R})$ :

$$P(x, R; I, \mathbf{p}) = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить, например, общее число контуров  $I(x, \mathbf{R}) = I = \text{const}$  с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы [6]

$$N(x, I) = N_1(x, I) - N_2(x, I) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I), \quad (11)$$

где  $N_1(x, I)$ ,  $N_2(x, I)$  — числа контуров, для которых вектор  $\mathbf{p}$  направлен соответственно по внутренней и внешней нормали, а  $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$  — кривизна линии уровня:

$$\begin{aligned} \kappa(x, \mathbf{R}; I) = & \{ -p_y^2(x, \mathbf{R}) \partial^2 I(x, \mathbf{R}) / \partial z^2 - p_z^2(x, \mathbf{R}) \partial^2 I(x, \mathbf{R}) / \partial y^2 + \\ & + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \partial^2 I(x, \mathbf{R}) / \partial y \partial z \} [p^3(x, \mathbf{R})]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для плоской падающей волны в силу пространственной однородности все одноточечные плотности вероятностей не зависят от переменной  $\mathbf{R}$  и соответствующие статистические средние (5)–(11) (без интегрирования по  $\mathbf{R}$ ) будут описывать удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин. При этом естественным масштабом длины в плоскости  $x = \text{const}$ , не зависящим от параметров среды, является

размер первой зоны Френеля  $L_f(x) = \sqrt{x/k}$ , определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [1]). Тогда удельные средние значения длины контуров и оценка для среднего их числа будут описываться безразмерными выражениями

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle, \quad (10')$$

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle. \quad (11')$$

Формула (11') описывает при этом среднюю разность числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля.

#### 4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КЛАСТЕРНОЙ КАРТИНЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Будем считать случайное поле  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  гауссовым однородным и изотропным полем с корреляционной и спектральной функциями

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x_1 - x_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) &= \langle \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_2, \mathbf{R}_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(q_x, \mathbf{q}) \exp \{ i q_x (x_1 - x_2) + i \mathbf{q} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \}, \\ \Phi_\varepsilon(q_x, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) \exp \{ -i q_x x - i \mathbf{q} \mathbf{R} \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее будем рассматривать падение плоской волны с единичной интенсивностью. В этом случае волновое поле будет статистически однородным в плоскости  $x = \text{const}$  и все статистические характеристики его не будут зависеть от  $\mathbf{R}$ .

##### 4.1. Область слабых флуктуаций интенсивности

Интенсивность волнового поля в общем случае имеет структуру (1'), т. е.

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = \exp \{ 2\chi(x, \mathbf{R}) \}. \quad (14)$$

В области слабых флуктуаций уровень амплитуды  $\chi(x, \mathbf{R})$  является гауссовым случайным полем. Кроме того, из равенства (5) следует, что среднее значение уровня амплитуды определяется ее дисперсией, а именно

$$\langle \chi(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_\chi^2(x).$$

Введем параметр, обычно называемый индексом мерцания (см., например, [1]),

$$\beta_0(x) = 4\sigma_\chi^2(x). \quad (15)$$

При этом дисперсия интенсивности волнового поля при условии  $\beta_0(x) \ll 1$  будет описываться формулой

$$\sigma_I^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \beta_0(x). \quad (16)$$

Следовательно, одноточечное распределение вероятностей поля  $\chi(x, \mathbf{R})$  имеет вид

$$P(x; \chi) = \langle \delta(\chi(x, \mathbf{R}) - \chi) \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{2}{\beta_0(x)} \left( \chi + \frac{1}{4}\beta_0(x) \right)^2 \right\}. \quad (17)$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически нормальным случайным полем, и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x; I) = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 \left( I \exp \left( \frac{1}{2}\beta_0(x) \right) \right) \right\}. \quad (18)$$

Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра  $\beta_0(x) \leq 1$ .

Как известно (см., например, [17]), для произвольного случайного процесса  $I(x)$  всегда можно ввести детерминированную кривую, называемую типичной реализацией  $I^*(x)$ , такую, что на любом интервале  $(X_1, X_2)$ , где  $X_i = \beta_0(x_i)$ , средний интервал выполнения неравенства  $I(x) < I^*(x)$  совпадает со средним интервалом выполнения обратного неравенства  $I(x) > I^*(x)$  и равным  $(X_2 - X_1)/2$ . Для логарифмически нормального процесса (18) такой типичной реализацией случайной интенсивности является экспоненциально убывающая с увеличением расстояния кривая

$$I^*(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\beta_0(x) \right\},$$

и формирование статистики (например моментных функций  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ ) осуществляется за счет больших выбросов процесса  $I(x, \mathbf{R})$  относительно этой кривой.

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса  $I(x)$  существуют также различные мажорантные оценки [17]. Так, например, с вероятностью  $p = 1/2$  для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4 \exp \left\{ -\frac{1}{4}\beta_0(x) \right\}$$

на всем интервале расстояний  $x \in (0, \infty)$ . Все эти обстоятельства указывают на образование кластерной структуры интенсивности волнового поля.

Знание плотности вероятностей (18) позволяет, как указывалось выше, получить некоторые количественные характеристики таких кластерных образований. Так, средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , равна:

$$\langle s(x, I) \rangle = \int_I^\infty d\tilde{I} P(x; \tilde{I}) = \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left( \exp \left( -\frac{1}{2}\beta_0(x) \right) / I \right) \right), \quad (19)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \int_I^\infty d\tilde{I} \tilde{I} P(x; \tilde{I}) = \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left( \exp \left( \frac{1}{2}\beta_0(x) \right) / I \right) \right), \quad (20)$$

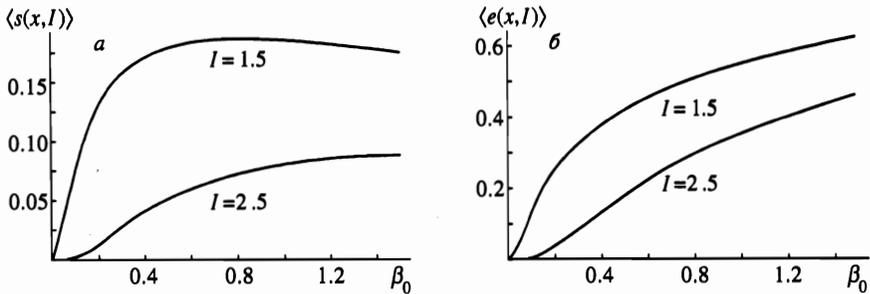


Рис. 1. Зависимости средних удельных площади (а) и мощности (б) от параметра  $\beta_0(x)$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-y^2) dy$$

— стандартный интеграл ошибок.

Характер пространственной эволюции кластерной структуры при изменении параметра  $\beta_0(x)$  существенно зависит от фиксируемого уровня  $I$ . В наиболее интересном случае  $I > 1$ , в начальной плоскости  $\langle s(0, I) \rangle = 0$  и  $\langle e(0, I) \rangle = 0$ . С ростом  $\beta_0(x)$  образуются небольшие кластерные области, где  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , практически сохраняющиеся на некоторых расстояниях и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей мощности. В дальнейшем площади этих областей уменьшаются с увеличением  $\beta_0(x)$ , а содержащаяся в них мощность увеличивается, что соответствует увеличению средней яркости внутри этих областей. Эти процессы связаны с фокусировкой излучения отдельными участками среды. На рис. 1а, б приведены графики изменения функций  $\langle s(x, I) \rangle$  и  $\langle e(x, I) \rangle$  в зависимости от параметра  $\beta_0(x)$  из указанного диапазона значений. Максимальная величина средней удельной площади достигается при  $\beta_0(x) = 2 \ln(I)$  и

$$\langle s(x, I) \rangle_{max} = \Phi \left( -\frac{1}{\sqrt{\ln(I)}} \right).$$

При этом значении  $\beta_0(x)$  средняя мощность  $\langle e(x, I) \rangle = 1/2$ .

В области слабых флуктуаций интенсивности пространственный градиент уровня амплитуды  $\nabla_{R\chi}(x, \mathbf{R})$  статистически не зависит от  $\chi(x, \mathbf{R})$ . Это позволяет вычислить как удельную среднюю длину контуров  $I(x, \mathbf{R}) = I$ , так и оценить удельное среднее число таких контуров. В самом деле, плотность вероятностей для градиента уровня амплитуды  $\mathbf{q}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{R\chi}(x, \mathbf{R})$  в области слабых флуктуаций имеет вид гауссового распределения:

$$P(x; \mathbf{q}) = \langle \delta(\nabla_{R\chi}(x, \mathbf{R}) - \mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{\pi \sigma_q^2} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{q}^2}{\sigma_q^2(x)} \right\}, \tag{21}$$

где  $\sigma_q^2(x) = \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle$  — дисперсия градиента уровня амплитуды.

Следовательно, из формулы (10') получаем для удельной средней длины контуров выражение

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \langle |p(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = 2L_f(x) \langle |q(x, \mathbf{R})| I \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \langle |q(x, \mathbf{R})| \rangle IP(x, I) = L_f(x) \sqrt{\pi \sigma_q^2(x)} IP(x, I). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичным образом, для удельного среднего числа контуров из формулы (11') имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |p(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = -\frac{1}{2\pi} L_f^2(x) I \langle \Delta \chi(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\pi} L_f^2(x) \langle q^2(x, \mathbf{R}) \rangle I \frac{\partial}{\partial I} IP(x, I) = \frac{L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi \beta_0(x)} \ln \left( I \exp \left( \frac{1}{2} \beta_0(x) \right) \right) IP(x, I). \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что при значении  $I = I_0(x) = \exp\{-(1/2)\beta_0(x)\}$  выражение (23) обращается в нуль. Это означает, что для данного уровня интенсивности среднее удельное число контуров, ограничивающих область  $I(x, \mathbf{R}) > I_0$ , совпадает со средним удельным числом контуров, для которых  $I(x, \mathbf{R}) < I_0$ .

Выше были получены общие выражения, содержащие параметр  $\beta_0(x)$ , характеризующий свойства среды. В области слабых флуктуаций уровень амплитуды и его градиент по поперечным координатам описываются на основе метода плавных возмущений (см., например, [1, 2]) формулами

$$\begin{aligned} \chi(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \sin \frac{q^2}{2k} (x - \xi), \\ \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) &= i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \int \mathbf{q} d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \sin \frac{q^2}{2k} (x - \xi), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \varepsilon_{\mathbf{q}}(x), \quad \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}' e^{-i\mathbf{q}'\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (25)$$

В приближении дельта-коррелированности поля  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  по  $x$ , его корреляционная функция (13) аппроксимируется выражением (см., например, [1, 2])

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) \quad (26)$$

и случайное поле  $\varepsilon_{\mathbf{q}}(x)$  можно считать гауссовым с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}_1), \quad (27)$$

где  $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$  — трехмерная спектральная функция (13) от двумерного вектора  $\mathbf{q}$ .

Для турбулентной среды функция  $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$  имеет вид (см., например, [1, 2])

$$\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} \exp\{- (q^2/\kappa_m^2)\}, \quad (28)$$

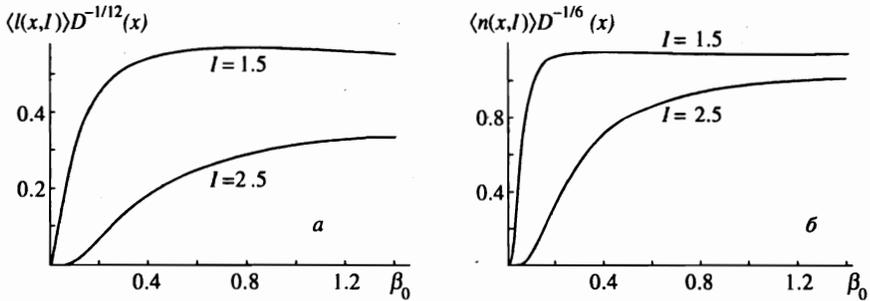


Рис. 2. Зависимости средней удельной длины контуров (а) и их среднего удельного числа (б) от параметра  $\beta_0(x)$

где  $A = 0.033$  — численная постоянная,  $C_\epsilon^2$  — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров потоков, а  $\kappa_m$  — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности. Следовательно,

$$\beta_0(x) = 4\sigma_\chi^2(x) = 2k^2\pi^2x \int_0^\infty dq q\Phi_\epsilon(q) \left[ 1 - \frac{k}{q^2x} \sin\left(\frac{q^2}{k}x\right) \right], \quad (29)$$

если турбулентная среда занимает все пространство. Если же поле  $\epsilon(x, \mathbf{R})$  отлично от нуля только в тонком слое  $\Delta x \ll x$  (случайный фазовый экран), то

$$\beta_0(x) = 4\sigma_\chi^2(x) = 2k^2\pi^2\Delta x \int_0^\infty dq q\Phi_\epsilon(q) \left[ 1 - \cos\left(\frac{q^2}{k}x\right) \right]. \quad (29')$$

При условии, что так называемый волновой параметр (см., например, [1])  $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$ , для параметра  $\beta_0(x)$  получаем соответственно выражения

$$\beta_0(x) = 0.307C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \quad (\Delta x = x), \quad \beta_0(x) = 0.563C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x \quad (\Delta x \ll x). \quad (30)$$

Аналогичным образом для дисперсии градиента уровня амплитуды при  $D(x) \gg 1$  имеем для турбулентной среды, занимающей все пространство,

$$\sigma_q^2(x) = \frac{k^2\pi^2x}{2} \int_0^\infty dq q^3\Phi_\epsilon(q) \left[ 1 - \frac{k}{q^2x} \sin\left(\frac{q^2}{k}x\right) \right] = \frac{1.476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x)\beta_0(x). \quad (31)$$

Теперь можно вычислить зависимости  $\langle l(x, I) \rangle$  и  $\langle n(x, I) \rangle$  от параметров  $\beta_0(x)$  и  $D(x)$ , описываемые формулами (22), (23). Графики этих зависимостей от  $\beta_0(x)$  приведены на рис. 2а, б.

Зависимость средней удельной длины линий уровня и среднего удельного числа контуров от микромасштаба турбулентности указывает на существование мелкой ряби, накладывающейся на более крупномасштабный случайный рельеф. Эта рябь не влияет на перераспределение площадей и мощности, но ведет к большей изрезанности линий уровня и появлению малых контуров.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях  $\beta_0(x) \leq 1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0(x)$  метод плавных возмущений становится несправедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая областью сильных фокусировок, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра  $\beta_0(x)$  ( $\beta_0(x) \geq 10$ ) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра  $\beta_0(x)$  называется областью сильных флуктуаций интенсивности.

#### 4.2. Область сильных флуктуаций интенсивности

Известно, что в области сильных флуктуаций моментные функции интенсивности описываются асимптотической формулой (см., например, [2])

$$\langle I^n(x) \rangle = n! [1 + n(n-1)(\beta(x) - 1)/4], \quad (32)$$

где  $\beta(x)$  дисперсия интенсивности, т. е.

$$\beta(x) = \langle I^2(x) \rangle - 1.$$

Для турбулентной среды соответственно имеем (см., например, [2]):

$$\beta(x) = 1 + 0.861\beta_0^{-2/5}(x) \quad (\Delta x = x), \quad \beta(x) = 1 + 0.429\beta_0^{-2/5}(x) \quad (\Delta x \ll x), \quad (33)$$

где параметр  $\beta_0(x)$  описывается формулами (30).

Формула (32) приводит к плотности вероятностей для интенсивности с сингулярными особенностями. Чтобы избежать их, можно аппроксимировать формулу (32) выражением (см., например, [18])

$$\langle I^n(x) \rangle = n! \exp \{ n(n-1)(\beta(x) - 1)/4 \}, \quad (34)$$

которому соответствует плотность вероятностей вида (см., например, [18, 19])

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty dz \exp \left\{ -zI - \frac{(\ln z - (\beta(x) - 1)/4)^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (35)$$

Отметим, что распределение вероятностей (35) неприменимо в узкой окрестности  $I \sim 0$  (окрестность тем уже, чем больше параметр  $\beta_0(x)$ ). Это связано с тем, что из формулы (35) следует бесконечно большие значения для моментов величины  $1/I(x, \mathbf{R})$ . Однако для конечного значения  $\beta_0(x)$  (сколь велико бы оно ни было) величины  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$  конечны и, следовательно, должно выполняться равенство  $P(x, 0) = 0$ . Существование такой узкой окрестности точки  $I \sim 0$ , конечно, не сказывается на поведении моментов  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$  (34) для больших значений параметра  $\beta_0(x)$ .

Из выражения (35) следует, что средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \exp \left\{ -zI - \frac{(\ln z - (\beta(x) - 1)/4)^2}{\beta(x) - 1} \right\}, \quad (36)$$

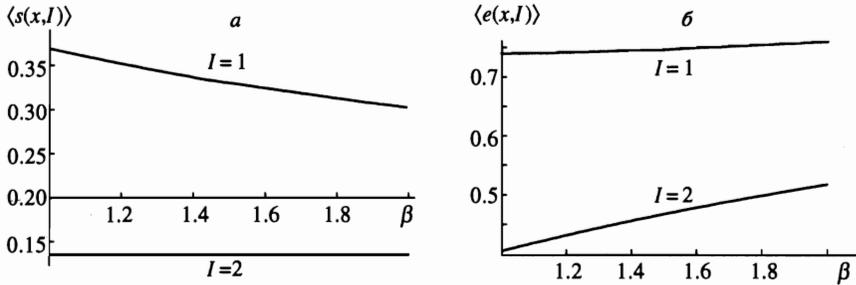


Рис. 3. Зависимости средних удельных площади (а) и мощности (б) в области сильных флуктуаций интенсивности от параметра  $\beta(x)$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left( I + \frac{1}{z} \right) \exp \left\{ -zI - \frac{(\ln z - (\beta(x) - 1)/4)^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (37)$$

На рис. 3а, б приведены графики зависимостей (36) и (37) от параметра  $\beta(x)$ . Отметим очень медленную зависимость параметра  $\beta(x)$  от  $\beta_0(x)$ . Так, предельному переходу  $\beta_0(x) \rightarrow \infty$  соответствует значение параметра  $\beta(x) = 1$ , а величине  $\beta_0(x) = 1$  соответствует значение параметра  $\beta(x) = 1.861$ .

Асимптотические формулы (32)–(37) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ( $\beta(x) \rightarrow 1$ ). В этой области соответственно имеем

$$P(I) = e^{-I}, \quad \langle s(I) \rangle = e^{-I}, \quad \langle e(I) \rangle = (I + 1)e^{-I} \quad (38)$$

и, следовательно, доли общей средней площади и средней мощности, заключенных внутри линий уровня, зависят только от значения  $I$ . Для больших  $I$  эти доли незначительны.

Экспоненциальное распределение вероятностей (38) означает, что комплексное поле  $u(x, \mathbf{R})$  является гауссовым случайным полем. При этом

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R})e^{iS(x, \mathbf{R})} = u_1(x, \mathbf{R}) + iu_2(x, \mathbf{R}), \quad (39)$$

где  $u_1(x, \mathbf{R})$  и  $u_2(x, \mathbf{R})$  — соответственно действительная и мнимая части. Тогда интенсивность волнового поля

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R}).$$

Гауссовость комплексного поля  $u(x, \mathbf{R})$  означает, что случайные поля  $u_1(x, \mathbf{R})$ ,  $u_2(x, \mathbf{R})$  также гауссовы, статистически независимые поля с дисперсиями

$$\langle u_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle u_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Естественно считать, что и их градиенты  $\mathbf{q}_1(x, \mathbf{R}) = \nabla_R u_1(x, \mathbf{R})$ ,  $\mathbf{q}_2(x, \mathbf{R}) = \nabla_R u_2(x, \mathbf{R})$  также статистически независимы от полей  $u_1(x, \mathbf{R})$ ,  $u_2(x, \mathbf{R})$  и являются гауссовыми однородными и изотропными полями в плоскости  $\mathbf{R}$  с дисперсиями

$$\sigma_q^2(x) = \langle \mathbf{q}_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \mathbf{q}_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle. \quad (41)$$

Следовательно, совместная плотность вероятностей полей  $u_1$ ,  $u_2$  и их градиентов  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  имеет вид

$$P(u_1, u_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; x) = \frac{1}{\pi^3 \sigma_q^4(x)} \exp \left\{ - \left( u_1^2 + u_2^2 + \frac{\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2}{\sigma_q^2(x)} \right) \right\}. \quad (42)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R})$  и градиента амплитуды

$$\kappa(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) = \frac{u_1(x, \mathbf{R})\mathbf{q}_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\mathbf{q}_2(x, \mathbf{R})}{\sqrt{u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R})}}.$$

Для нее имеем

$$\begin{aligned} P(I, \kappa; x) &= \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\kappa(x, \mathbf{R}) - \kappa) \rangle_{u_1, \mathbf{q}_1} = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sigma_q^4(x)} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \exp \left\{ - \left( u_1^2 + u_2^2 + \frac{\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2}{\sigma_q^2(x)} \right) \right\} \times \\ &\times \delta(u_1^2 + u_2^2 - I) \delta \left( \frac{u_1 \mathbf{q}_1 + u_2 \mathbf{q}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \kappa \right) = \frac{1}{2\pi \sigma_q^2(x)} \exp \left\{ -I - \frac{\kappa^2}{2\sigma_q^2(x)} \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Следовательно, поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем с дисперсией

$$\langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle = 2\sigma_q^2(x). \quad (44)$$

Отметим, что поперечный градиент амплитуды также статистически независим от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля.

Таким образом, из формулы (10) получаем для удельной средней длины контуров в области насыщенных флуктуаций интенсивности выражение

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\kappa(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\kappa(x, \mathbf{R})| \rangle P(x, I) = L_f(x) \sqrt{2\pi \sigma_q^2(x) I} e^{-I}. \end{aligned} \quad (45)$$

При этом максимальное значение в (45) достигается при  $I = 1/\sqrt{2}$ .

Аналогичным образом для оценки среднего удельного числа контуров в этой области имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{L_f^2(x)}{2\pi} \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{L_f^2(x)}{2\pi} \sqrt{I} \langle \Delta A(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = -\frac{L_f^2(x)}{\pi} \langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} P(x, I) = \\ &= -\frac{2L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi} \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} e^{-I} = \frac{2L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi} \left( I - \frac{1}{2} \right) e^{-I}. \end{aligned} \quad (46)$$

Максимальное значение в (46) достигается при  $I = 3/2$ , а значение уровня, при котором среднее удельное число контуров, ограничивающих область  $I(x, \mathbf{R}) > I_0$ , совпадает со средним удельным числом контуров, для которых  $I(x, \mathbf{R}) < I_0$ , в данном случае равно  $I_0 = 1/2$ .

Отметим, что формула (46) неприменима в узкой окрестности значения  $I \sim 0$ . Для  $I = 0$  должно быть  $\langle n(x, 0) \rangle = 0$  (см. обсуждение формулы (35)).

В области сильных флуктуаций интенсивности функция когерентности второго порядка не зависит от дифракционных явлений и описывается выражением (см., например, [1, 2])

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') &= \langle u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \langle u_1(x, \mathbf{R})u_1(x, \mathbf{R}') + u_2(x, \mathbf{R})u_2(x, \mathbf{R}') \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{4} D(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где (см. (26))

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}). \quad (48)$$

И, следовательно, величина  $\sigma_q^2(x)$  из (41) определяется выражением

$$\sigma_q^2(x) = \frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = -\frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0}. \quad (49)$$

Для турбулентных флуктуаций  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  имеем

$$\sigma_q^2(x) = \frac{1.476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x). \quad (50)$$

Как видно из (50), в режиме насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжает расти с ростом параметра  $\beta_0(x)$ , хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются постоянными. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды [1, 20]. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба проявляется в появлении высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ( $\beta_0(x) \sim 1$ ) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра  $\beta_0(x)$  начинает преобладать дефокусировка излучения, приводящая к расплыванию высоких пиков и образованию сильноизрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня  $I \sim 1$ .

Средняя длина уровня и среднее число контуров, кроме параметра  $\beta_0(x)$ , зависят также от параметра  $D(x)$ , т. е. растут с уменьшением микромасштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладывается мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была предпринята попытка дать качественное объяснение кластерной (каустической) структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить

параметры такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Если, однако, ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны при постоянном значении волнового параметра решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций. В настоящей работе анализировались два крайних асимптотических случая, соответствующих слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что, скорее всего, пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности  $I$ . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются. Однако этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Для анализа же наиболее интересного, с точки зрения приложений, промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно провести, либо используя аппроксимирующие выражения для плотности вероятностей для всех значений параметров [19], либо на основе численного моделирования, выполненного, например, в работах [21, 22]. Отметим также, что в приближении геометрической оптики следствием уравнений (3), (3') является замкнутое уравнение для совместной плотности вероятностей интенсивности волнового поля и вторых производных фазы волны по поперечным координатам, характеризующих кривизну фазового фронта, совершенно неизученное в настоящее время [2].

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 95-05-14247, 96-05-65347 и 96-05-65354).

## Литература

1. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля*, Наука, Москва (1978).
2. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1980).
3. Дж. Займан, *Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно-неупорядоченных систем*, Мир, Москва (1982), с. 146.
4. S. D. Rice, *Bell. Syst. Tech. J.* **23**, 282 (1944); **24**, 46 (1945).
5. M. S. Longuet-Higgins, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **249**, 321 (1957); **A 250**, 157 (1957).
6. P. Swerling, *IRE Trans. Inf. Theory* **IT-8**, 315 (1962).
7. M. B. Isichenko, *Rev. Modern Phys.* **64**, 961 (1992).
8. V. I. Klyatskin, W. A. Woyczynski, and D. Gurarie, *J. Stat. Phys.* **84**, 797 (1996).
9. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, *ЖЭТФ* **111**, 1297 (1997).
10. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, *Изв. ВУЗов, Радиофизика* **11**, 1864 (1968).
11. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, *Изв. ВУЗов, Радиофизика* **12**, 875 (1969).
12. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, *Волны в случайно-неоднородных средах*, ВИНТИ АН СССР, Москва (1981).
13. V. A. Kulkarny and B. S. White, *Phys. Fluids* **25**, 1770 (1982).
14. B. S. White, *SIAM J. Appl. Math.* **44**, 127 (1984).
15. D. I. Zwillinder and B. S. White, *Wave Motion* **7**, 207 (1985).
16. V. I. Klyatskin, *Waves in Random Media* **3**, 93 (1993).

17. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, УФН **162**, 161 (1992).
18. R. Dashen, Opt. Lett. **9**, 110 (1984).
19. J. H. Churnside and S. F. Clifford, JOSA A **4**, 1923 (1987).
20. I. G. Yakushkin and V. U. Zavorotny, Waves in Random Media **2**, 165 (1992).
21. S. M. Flatté, G.-Y. Wang, and J. Martin, JOSA A **10**, 2363 (1993).
22. S. M. Flatté, C. Bracher, and G.-Y. Wang, JOSA A **11**, 2080 (1994).