ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 6, стр. 1984–2000

ПОЛЯРИЗАЦИОННО-УГЛОВАЯ СТРУКТУРА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ДИХРОИЗМ СЕЧЕНИЙ ТРЕХФОТОННЫХ СВЯЗАННО-СВЯЗАННЫХ ПЕРЕХОДОВ В АТОМАХ

Н. Л. Манаков, А. В. Меремьянин*

Воронежский государственный университет
394693, Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 5 декабря 1996 г.

В электрическом дипольном приближении сечение произвольного трехфотонного перехода между дискретными состояниями атома с полными угловыми моментами J_i и J_f записано в инвариантной форме, содержащей скалярные и смешанные произведения векторов поляризации фотонов и инвариантные атомные параметры, зависящие лишь от частоты фотонов. Определено число независимых атомных параметров при фиксированных значениях J_i и J_f и получены их явные выражения через приведенные составные дипольные матричные элементы. Поляризационная зависимость сечений выражена через степени l и ξ линейной и циркулярной поляризации фотонов. Проанализирован диссипативно-индуцированный циркулярный дихроизм в трехфотонных процессах, т. е. различие Δ сечений при одновременном изменении знака степени циркулярной поляризации всех фотонов. Детально рассмотрен случай двух идентичных фотонов и явление эллиптического дихроизма, когда $\Delta \sim l\xi$ и дихроизм имеет место лишь при эллиптической поляризации фотонов с $0 < |\xi| < 1$. Обсуждаются диссипативно-индуцированные эффекты поляризации атомов в трехфотонных процессах с линейно поляризованными или неполяризованными фотонами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ранних экспериментах по взаимодействию лазерного излучения с атомами и молекулами использовалось, как правило, линейно поляризованное излучение и поляризационная зависимость сечений не исследовалась. Между тем известно, что состояние поляризации фотонного пучка существенным образом влияет на характер протекания многофотонных процессов. В частности, достаточно подробно изучена зависимость сечений типичных многофотонных переходов от абсолютной величины степени эллиптичности светового поля (см., например, [1, 2]). Однако наиболее интересным поляризационным эффектом является зависимость сечений от знаков степени циркулярной поляризации фотонов, т. е. от направления вращения вектора электрического поля в световой волне, которая в общем случае предполагается эллиптически поляризованной. При этом наиболее интересен случай, когда сечения различаются при одновременном изменении знаков степени циркулярной поляризации всех фотонов, участвующих в процессе (как падающих, так и испущенных в результате взаимодействия). Этот специфический эффект, называемый циркулярным дихроизмом, достаточно очевиден для сред без центра инверсии (например, в киральных молекулах), однако при определенных условиях циркулярный дихроизм возникает и в атомных фотопроцессах. В процессах с хаотически ориентированными атомными частицами циркулярный

*E-mail: manakov@thp.vucnit.voronezh.su

дихроизм определяется интерференцией действительных и мнимых частей парциальных амплитуд процесса и содержит информацию о характере взаимодействия атомных частиц с излучением, которая не может быть получена из экспериментов с линейно поляризованным излучением.

К настоящему времени циркулярный дихроизм достаточно детально (как теоретически, так и экспериментально) исследован лишь в простейшем фотопроцессе — фотоионизации атомов и молекул. В этом случае он отличен от нуля только при ионизации первоначально ориентированных (поляризованных) атомов или при фиксированной ориентации спина фотоэлектрона. Этот факт очевиден из общих соображений симметрии: поскольку степень циркулярной поляризации фотона ξ является псевдоскалярной величиной, слагаемые в сечении фотоэффекта, ответственные за циркулярный дихроизм, могут содержать ξ лишь в произведениях типа $\xi\,\mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ — полный момент атома или спин фотоэлектрона, которые являются псевдовекторами. Последние результаты в этой области содержатся, например, в работах [3, 4] и показывают, что различие сечений для право- и левополяризованных фотонов может достигать весьма значительной величины и позволяет получить важную информацию, в частности, о величине парциальных дипольных матричных элементов перехода и фазах рассеяния электрона на остаточном ионе.

Более специфическим эффектом является циркулярный дихроизм в процессах взаимодействия фотонов с неполяризованными атомными частицами. Исследование этого эффекта начато лишь в последние годы. Так, в работах [5, 6] (см. также [7]) обсуждается циркулярный дихроизм в двойном фотоэффекте (выбивание двух электронов одним фотоном) и в фотоиндуцированном оже-распаде. В работах [8, 9] установлены условия возникновения дихроизма в процессах тормозного излучения и поглощения и рассеяния электронов на атомах в присутствии световой волны. В [10] детально исследован циркулярный дихроизм в процессах рэлеевского и рамановского рассеяния света газами, а особенности циркулярного дихроизма при резонансном двухфотонном возбуждении атомов обсуждаются в [11]. Как показано в [10], в двухфотонных связанно-связанных переходах циркулярный дихроизм возникает лишь при учете недипольных поправок во взаимодействии атома с фотонами и наиболее существен в области частот, резонансных дипольно-запрещенному переходу в атоме, когда малость недипольных эффектов в сечении компенсируется малостью резонансного знаменателя.

В настоящей работе анализируются поляризационные эффекты в трехфотонных переходах между дискретными атомными уровнями (трехфотонное возбуждение, гиперкомбинационное рассеяние, смешение частот и т. д.). В отличие от известной теории Плачека двухфотонного рассеяния [12], которое полностью описывается тремя инвариантными атомными параметрами, разделение кинематических (зависящих от поляризаций и направлений волновых векторов фотонов) и динамических (атомных) факторов в сечениях трехфотонного рассеяния более сложно. Феноменологическая теория нерезонансного трехфотонного рассеяния в газах развита в работе [13], однако в таком подходе не выясняется связь параметров рассеяния с микроскопическими атомными константами, а приближение прозрачной среды исключает эффекты циркулярного дихроизма. Структура сечений трехфотонных процессов в атомах исследовалась в работе [14], однако полученные общие результаты оказались весьма громоздкими, поскольку угловая часть выражена через трудно анализируемые тензорные произведения шести векторов, а атомные факторы — через сложные комбинации приведенных матричных элементов, включающие $3nj$-символы Вигнера.

Используя специальную технику вычисления тензорных произведений векторов (см. Приложение I) и удобную параметризацию векторов поляризации фотонов для общего случая произвольной, в том числе и частичной, поляризации, в разд. 2 проведено выделение геометрических и динамических факторов для сечения произвольного трехфотонного перехода между связанными состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$ противоположной четности, разрешенного правилами отбора для электрического дипольного излучения. В общем случае сечение содержит 15 различных слагаемых, четыре из которых описывают циркулярный дихроизм, возникающий для трехфотонных процессов уже в электрическом дипольном приближении. Как и в двухфотонных процессах [10], циркулярный дихроизм отличен от нуля лишь при наличии антиэрмитовой части у парциальных амплитуд перехода («диссипативно-индуцированный дихроизм»).

В разд. 3 анализируется наиболее интересная для эксперимента ситуация, когда два фотона из трех идентичны (из одного лазерного пучка накачки). В этом случае при произвольной эллиптической поляризации накачки «полный опыт» позволяет определить шесть независимых атомных параметров, в то время как при линейной поляризации сечение описывается лишь двумя различными параметрами. Далее, в случае идентичных фотонов «дихроичное» слагаемое в сечении содержит произведение степеней линейной и циркулярной поляризаций накачки и, таким образом, циркулярный дихроизм в экспериментах с двумя идентичными фотонами отличен от нуля лишь при эллиптической поляризации накачки («эллиптический дихроизм»).

Выше предполагалось, что атомы мишени свободно ориентированы в пространстве, так что сечения усредняются и суммируются по проекциям моментов атома в начальном и конечном состояниях. Наряду с циркулярным дихроизмом учет диссипативных эффектов, обусловленных антиэрмитовой частью амплитуды трехфотонных переходов, приводит также к специфическим эффектам ориентации атомов при взаимодействии с неполяризованными или линейно поляризованными фотонами. В разд. 4 эти эффекты обсуждаются на простейшем примере трехфотонного перехода между состояниями с полным моментом $J = 1/2$.

В работе используется атомная система единиц.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННО-УГЛОВАЯ СТРУКТУРА СЕЧЕНИЙ ТРЕХФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

2.1. Феноменологическое рассмотрение

Пусть $\mathbf{e}_i$ — единичный комплексный вектор поляризации i-го фотона с частотой ω_i и волновым вектором $\mathbf{k}_i = \kappa_i\omega_i/c$, $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^* = 1$, $\mathbf{e}_i\kappa_i = 0$. В электрическом дипольном приближении сечение произвольного трехфотонного перехода между состояниями $|i\rangle \equiv |\gamma_i J_i M_i\rangle$ и $|f\rangle \equiv |\gamma_f J_f M_f\rangle$ (J и M – полный момент и его проекция на ось квантования, γ — прочие квантовые числа) свободно ориентирующейся системы после усреднения по M_i и суммирования по M_f содержит комбинации шести векторов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^*$ с $i = 1, 2, 3$ и линейно зависит от каждого из них. Поэтому общую структуру поляризационно-угловой зависимости сечения можно установить из феноменологических соображений путем подсчета линейно независимых комбинаций указанных векторов. Нетрудно убедиться, что такие комбинации можно записать через попарные скалярные произведения, семь из которых действительны:

$$1, \quad |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|^2, \quad |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2, \quad |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3|^2, \quad |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^*|^2, \quad |\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3|^2, \quad |\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^*|^2, \tag{1}$$

а четыре — комплексны:

$$A_1 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*)(\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_3), \qquad A_2 = (\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^*)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3),$$
$$A_3 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_3^*), \qquad A_4 = (\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^*). \tag{2}$$

Легко видеть, что комбинации $A_1 \div A_4$ получаются друг из друга комплексным сопряжением с последующей заменой одной из пар векторов $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*$ на $\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_i$. Таким образом, сечение произвольного трехфотонного процесса содержит 15 слагаемых, четыре из которых (с $\operatorname{Im} A_i$), как будет показано ниже, описывают циркулярный дихроизм.

В общем случае эллиптической поляризации фотонов структура выражений (2) весьма сложная, поскольку векторы $\mathbf{e}_i$ комплексные. Для анализа поляризационных эффектов в многофотонных процессах удобно использовать следующую инвариантную (по отношению к выбору системы координат) параметризацию вектора $\mathbf{e}$ для случая эллиптической поляризации с параметром эллиптичности (отношением полуосей эллипса поляризации) γ:

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\epsilon} + i\gamma[\boldsymbol{\kappa\epsilon}]}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad -1 \leqslant \gamma \leqslant 1, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ — единичный вектор в направлении главной оси эллипса поляризации, совпадающий, очевидно, с $\mathbf{e}$ в случае линейной поляризации (при $\gamma = 0$). В принятых обозначениях напряженность электрического поля световой волны с амплитудой F описывается вектором

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F\,\mathrm{Re}\Big\{\mathbf{e}\exp\left[-i\omega t + i(\mathbf{kr})\right]\Big\} =$$
$$= \frac{F}{\sqrt{1+\gamma^2}}\Big\{\boldsymbol{\epsilon}\cos\left[\omega t - (\mathbf{kr})\right] + \gamma[\boldsymbol{\kappa\epsilon}]\sin\left[\omega t - (\mathbf{kr})\right]\Big\}. \tag{4}$$

Вместо параметра эллиптичности γ более удобно использовать степени линейной (l) и циркулярной (ξ) поляризаций:

$$l = \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} = (\mathbf{ee}) = (\mathbf{e}^*\mathbf{e}^*), \quad \xi = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} = i(\boldsymbol{\kappa}[\mathbf{e}^*\mathbf{e}]), \tag{5}$$

связанные со стандартными параметрами Стокса [12]. Для полностью поляризованного излучения $l^2 + \xi^2 = 1$.

Из (3), (5) следуют полезные соотношения

$$|(\mathbf{ea})|^2 = l\,(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{a})^2 + \frac{1-l}{2}[\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}]^2,$$
$$(\mathbf{ea})(\mathbf{e}^*\mathbf{b}) = \mathrm{Re}\left\{(\mathbf{ea})(\mathbf{e}^*\mathbf{b})\right\} - \frac{i}{2}\,\xi(\boldsymbol{\kappa}[\mathbf{ab}]),$$
$$2\,\mathrm{Re}\left\{(\mathbf{ea})(\mathbf{e}^*\mathbf{b})\right\} = 2l\,(\mathbf{a}\boldsymbol{\epsilon})(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{b}) + (l-1)\left([\mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b}]\right), \tag{6}$$

справедливые для действительных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Эти формулы позволяют переписать выражения (1), содержащие два вектора поляризации, через действительные векторы $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\epsilon}'$, $\boldsymbol{\kappa}'$:

$$2|\mathbf{e}\mathbf{e}'|^2 = 1 - ll'(1 - 2(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')^2) - \xi\xi'(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}') + \\ + l(l'-1)(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}')^2 + l'(l-1)(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}')^2 - \frac{1}{2}(l-1)(l'-1)[\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}']^2. \qquad (7)$$

Комбинации векторов A_i в (2) также могут быть переписаны аналогичным образом, однако результаты имеют более громоздкий вид. Ниже приведено выражение для мнимой части A_1:

$$2\,\mathrm{Im}\,A_1 \equiv 2\,\mathrm{Im}\big\{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*)(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^*)\big\} = \frac{1}{4}\xi_1\xi_2\xi_3\big(\boldsymbol{\kappa}_1[\boldsymbol{\kappa}_2\boldsymbol{\kappa}_3]\big) - \xi_1 P_{123} - \xi_2 P_{213} - \xi_3 P_{312}, \qquad (8а)$$

$$P_{ijk} = l_j l_k(\boldsymbol{\epsilon}_j\boldsymbol{\epsilon}_k)\big(\boldsymbol{\kappa}_i[\boldsymbol{\epsilon}_j\boldsymbol{\epsilon}_k]\big) + \frac{1}{2}l_k(l_j-1)(\boldsymbol{\kappa}_j\boldsymbol{\epsilon}_k)\big(\boldsymbol{\kappa}_i[\boldsymbol{\kappa}_j\boldsymbol{\epsilon}_k]\big) + \\ + \frac{1}{2}l_j(l_k-1)(\boldsymbol{\epsilon}_j\boldsymbol{\kappa}_k)\big(\boldsymbol{\kappa}_i[\boldsymbol{\epsilon}_j\boldsymbol{\kappa}_k]\big) + \frac{1}{4}(l_j-1)(l_k-1)(\boldsymbol{\kappa}_j\boldsymbol{\kappa}_k)\big(\boldsymbol{\kappa}_i[\boldsymbol{\kappa}_j\boldsymbol{\kappa}_k]\big). \qquad (8б)$$

Мнимые части $A_{2,3,4}$, как отмечалось выше, также имеют вид (8) с заменой в (8а) знаков двух из трех параметров ξ_i, например, $\mathrm{Im}\,A_2 = \mathrm{Im}\,A_1(\xi_{1,2} \to -\xi_{1,2})$. Таким образом, использование параметризации (3), (5) позволяет записать кинематические факторы в сечениях в удобном для анализа виде через углы между волновыми векторами фотонов и единичными векторами $\boldsymbol{\epsilon}_i$, задающими направления главных осей эллипсов поляризации.

Как видно из (8), величины $\mathrm{Im}\,A_i$ меняют знак при замене $\xi_i \to -\xi_i$, т.е. соответствующие слагаемые в сечениях трехфотонных переходов описывают циркулярный дихроизм. Нетрудно убедиться, что эти слагаемые имеют интерференционную природу и обусловлены интерференцией действительных и мнимых частей парциальных амплитуд перехода. Действительно, величины $\mathrm{Im}\,A_i$, будучи истинными скалярами (псевдоскалярность ξ_i компенсируется наличием векторного произведения полярных векторов $\boldsymbol{\epsilon}_i$, $\boldsymbol{\kappa}_i$ в каждом из слагаемых в (8)), являются T-нечетными, поскольку все слагаемые в (8) содержат нечетное число векторов $\boldsymbol{\kappa}_i$, меняющих знак при обращении времени. Следовательно, атомные факторы, с которыми $\mathrm{Im}\,A_i$ входят в сечения, должны содержать произведения действительных и мнимых частей парциальных амплитуд рассматриваемого трехфотонного процесса, поскольку свойством T-нечетности обладает лишь антиэрмитова (мнимая) часть амплитуды. Как следует из соотношения унитарности для S-матрицы [12], антиэрмитова часть амплитуды конкретного процесса всегда связана с амплитудами других, по отношению к рассматриваемому, физических процессов, которые возможны при заданных начальных состояниях квантовой системы «атом + фотоны». Эти процессы, как бы конкурирующие с рассматриваемым, мы называем в обобщенном смысле диссипативными, поскольку они приводят к ослаблению интенсивности пучка падающих фотонов и вследствие необратимости диссипативных явлений вносят в задачу T-нечетные параметры, обусловливающие циркулярный дихроизм. В рассматриваемом нами случае трехфотонных связанно-связанных переходов возможны два «канала диссипации»: реальное заселение промежуточного резонансного уровня (диссипативным параметром при этом является ширина резонансного уровня, являющаяся T-нечетной величиной) или ионизация атома, если энергия одного или двух падающих фотонов достаточна для ионизации атома из начального состояния. Таким образом, циркулярный дихроизм в трехфотонных переходах, как и в случае двухфотонных переходов, является «диссипативно-индуцированным». Различие состоит в том, что в двухфотонных переходах между связанными состояниями циркулярный дихроизм возникает лишь при учете недипольных эффектов во взаимодействии атома с фотонами, поскольку из четырех векторов $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, \mathbf{e}', \mathbf{e}'^*$ невозможно построить T-нечетный скаляр. Учет недипольности вносит в задачу дополнительные векторы $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\kappa}'$, так что комбинации векторов в сечениях произвольных двухфотонных переходов, ответственные за дихроизм, имеют вид [10]

$$E_1 = (\mathbf{e}\mathbf{e}'^*)(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\kappa}')(\mathbf{e}'\boldsymbol{\kappa}), \qquad E_2 = (\mathbf{e}\mathbf{e}')(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\kappa}')(\mathbf{e}'^*\boldsymbol{\kappa}).$$

Используемая нами параметризация $\mathbf{e}$ позволяет переписать эти выражения через углы между вещественными векторами:

$$\mathrm{Im}(E_1 + E_2) = \xi l'(\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{\epsilon}'[\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\kappa}]), \quad \mathrm{Im}(E_1 - E_2) = l\xi'(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}')(\boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}']),$$

$$\mathrm{Re}(E_1 + E_2) = 2ll'(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}')(\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\kappa}) + \\ + (\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}')\Big\{l(l'-1)(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}')^2 + l'(l-1)(\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\kappa})^2 - \frac{1}{2}(l-1)(l'-1)\big(1-(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}')^2\big)\Big\},$$

$$\mathrm{Re}(E_1 - E_2) = \frac{1}{2}\xi\xi'\big((\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}')^2 - 1\big).$$

2.2. Квантовомеханические формулы для динамических атомных факторов

В общем случае фотонов с различными частотами амплитуда A_{fi} произвольного трехфотонного перехода определяется суммой шести составных матричных элементов третьего порядка теории возмущений, соответствующих различным комбинациям актов поглощения и испускания фотонов. Так, рассматривая для определенности случай гиперрамановского рассеяния фотонов $\mathbf{e}_1, \omega_1$ и $\mathbf{e}_2, \omega_2$ с испусканием рассеянного фотона $\mathbf{e}_3, \omega_3$ $(E_i + \omega_1 + \omega_2 = E_f + \omega_3)$ имеем

$$\begin{aligned} &A_{fi}(\mathbf{e}_1, \omega_1; \mathbf{e}_2, \omega_2; \mathbf{e}_3^*, -\omega_3) = \\ &= \langle \gamma_f J_f M_f | \{(\mathbf{e}_3^*\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1+\omega_2}(\mathbf{e}_2\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1}(\mathbf{e}_1\mathbf{d}) + (\mathbf{e}_2\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1-\omega_3}(\mathbf{e}_3^*\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1}(\mathbf{e}_1\mathbf{d}) + \\ &+(\mathbf{e}_2\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1-\omega_3}(\mathbf{e}_1\mathbf{d})G_{E_i-\omega_3}(\mathbf{e}_3^*\mathbf{d}) + (\mathbf{e}_1\mathbf{d})G_{E_i+\omega_2-\omega_3}(\mathbf{e}_2\mathbf{d})G_{E_i-\omega_3}(\mathbf{e}_3^*\mathbf{d}) + \\ &+(\mathbf{e}_1\mathbf{d})G_{E_i+\omega_2-\omega_3}(\mathbf{e}_3^*\mathbf{d})G_{E_i+\omega_2}(\mathbf{e}_2\mathbf{d}) + (\mathbf{e}_3^*\mathbf{d})G_{E_i+\omega_1+\omega_2}(\mathbf{e}_1\mathbf{d})G_{E_i+\omega_2}(\mathbf{e}_2\mathbf{d})\} |\gamma_i J_i M_i\rangle . \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{d}$ — оператор дипольного момента атома,

$$G_E = \sum_{\gamma JM} \frac{|\gamma JM\rangle \langle \gamma JM|}{E_{\gamma J} - E + i0} = \sum_{JM} G_E^J |JM\rangle \langle JM|$$

— функция Грина атома, а G_E^J — парциальная часть G_E, соответствующая полному угловому моменту атома J; $|JM\rangle$ — спин-угловая часть атомной волновой функции с полным моментом J, определяемая типом связи угловых моментов в конкретном атоме. Амплитуды других процессов с тремя фотонами имеют такой же вид с заменой знаков частот и соответствующих векторов поляризации $\mathbf{e}$ на комплексно-сопряженные.

Записывая скалярные произведения $(\mathbf{ed})$ в (9) в сферическом базисе и используя технику неприводимых тензорных операторов, выделим зависимость A_{fi} от проекций M_i, M_f и векторов поляризации $\mathbf{e}_i$ в явном виде (см., например, [14]):

$$A_{fi} = \sum_{x,\xi} (-1)^{x-\xi} C_{J_f M_f\, x\, -\xi}^{J_i M_i} \sum_{y=0,1,2} Q_{xy}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2) \big\{\mathbf{e}_3^* \otimes \{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\}_y\big\}_{x,-\xi}, \tag{10}$$

где атомные параметры

$$
\begin{aligned}
Q_{xy}(-\omega_3;\omega_1,\omega_2) = &\sqrt{\frac{(2x+1)(2y+1)}{2J_i+1}} \times \\
&\times \sum_{J_1,J_2}(-1)^{y+J_i-J_1}\left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 & y \\ J_i & J_1 & J_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 & x & y \\ J_i & J_1 & J_f \end{Bmatrix} T^y_{J_1J_2}(\omega_1+\omega_2,\omega_2;\omega_1+\omega_2,\omega_1) + \right.\\
&+(-1)^{J_1+J_2+1-J_i-J_f+x}\begin{Bmatrix} 1 & 1 & y \\ J_f & J_2 & J_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 & x & y \\ J_f & J_2 & J_i \end{Bmatrix} T^y_{J_1J_2}(\omega_1-\omega_3,-\omega_3;\omega_2-\omega_3,-\omega_3) + \\
&\left.+\begin{Bmatrix} J_f & 1 & J_1 \\ J_i & 1 & J_2 \\ x & y & 1 \end{Bmatrix} T^y_{J_1J_2}(\omega_2-\omega_3,\omega_2;\omega_1-\omega_3,\omega_1)\right] \qquad (11)
\end{aligned}
$$

выражаются через комбинации приведенных составных матричных элементов

$$
T^y_{J_1J_2}(\alpha,\beta;\gamma,\delta) = \langle\gamma_f J_f \| \mathbf{d}\left\{G^{J_1}_{E_i+\alpha}\mathbf{d}G^{J_2}_{E_i+\beta} + (-1)^y G^{J_1}_{E_i+\gamma}\mathbf{d}G^{J_2}_{E_i+\delta}\right\}\mathbf{d}\,\|\gamma_i J_i\rangle\,. \qquad (12)
$$

Используются стандартные обозначения техники углового момента [15] для коэффициентов Клебша–Гордана, $3nj$-символов Вигнера и тензорных произведений.

Как следует из (10), с точностью до множителей, определяемых типом конкретного процесса (плотностью конечных состояний и т. д.), поляризационная зависимость сечений выражается через тензорные произведения векторов поляризации:

$$
M_{J_iJ_f} = \frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_iM_f}|A_{fi}|^2 = \sum_{x=0}^{3}\frac{1}{2x+1}\sum_{\xi=-x}^{x}\left|\sum_{y=0}^{2}Q_{xy}\left\{\mathbf{e}_3^*\otimes\{\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\}_y\right\}_{x,-\xi}\right|^2. \qquad (13)
$$

Здесь величины Q_{xy} с фиксированными x, y играют роль парциальных амплитуд перехода. Как следует из (10), (11), в общем случае (при произвольных J_i, J_f) отличны от нуля семь параметров Q_{xy} и (13) включает 15 различных слагаемых, содержащих тензорные произведения шести векторов. Используя правила изменения схемы связи в тензорных произведениях, можно переписать выражение (13) через тензорные произведения поляризационных тензоров фотонов $\{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}^*\}_{pm}$, однако атомные коэффициенты в этом случае становятся чрезвычайно громоздкими [14]. Техника вычисления тензорных произведений векторов, изложенная в Приложении I, позволяет записать $M_{J_iJ_f}$ через обычные скалярные произведения векторов:

$$
\begin{aligned}
M_{J_iJ_f} = &f_0 + f_1|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|^2 + f_2|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2 + f_3|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3|^2 + f_4|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^*|^2 + \\
&+ f_5|\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3|^2 + f_6|\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^*|^2 + \sum_{i=1}^{4}\left(\operatorname{Re}g_i\operatorname{Re}A_i - \operatorname{Im}g_i\operatorname{Im}A_i\right) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

в полном соответствии с феноменологическими соображениями п. 2.1. Явные выражения коэффициентов f_i, g_i через билинейные комбинации Q_{xy} приведены в Приложении II.

Таким образом, в наиболее общем случае в «полном опыте» в результате поляризационных измерений возможно определение 15 независимых атомных параметров f_i, g_i, описывающих сечение трехфотонного процесса. При отсутствии диссипативных процессов (нерезонансные переходы с суммарной энергией падающих фотонов, недостаточной для ионизации атома) величины Q_{xy} действительны, поэтому $\operatorname{Im} g_i = 0$ и число параметров уменьшается до 11.

Выражение (14) дает поляризационно-угловую структуру сечений в наиболее общем случае фиксированных поляризаций $\mathbf{e}_i$ и направлений распространения $\boldsymbol{\kappa}_i$ всех трех фотонов. Если, например, в рассматривавшемся выше случае гиперрамановского рассеяния рассеянный фотон не наблюдается, то усреднение в (14) по поляризациям $\mathbf{e}_3$ и интегрирование по направлениям $\boldsymbol{\kappa}_3$, состоящее, как известно [12], в замене $(\mathbf{e}_3)_i(\mathbf{e}_3^*)_j \to (4\pi/3)\delta_{ij}$, дает для $M_{J_iJ_f}$ выражение

$$M_{J_iJ_f} = \frac{1}{9}\alpha^s|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|^2 + \frac{1}{18}\alpha^a\left(1 - |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2\right) + \frac{1}{30}\alpha^t\left(1 + |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2 - \frac{2}{3}|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|^2\right). \tag{15}$$

В этом случае исчезают эффекты циркулярного дихроизма, а зависимость сечения от поляризаций $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ падающих фотонов, очевидно, такая же, как и в случае двухфотонного возбуждения в теории Плачека. Роль скалярной, антисимметричной и тензорной частей сечения двухфотонного перехода в нашем случае играют следующие комбинации параметров Q_{xy}:

$$\alpha^s = |Q_{10}|^2, \quad \alpha^a = \sum_{x=0}^{2}|Q_{x1}|^2, \quad \alpha^t = \sum_{x=1}^{3}|Q_{x2}|^2.$$

Если не регистрируется лишь поляризация рассеянного фотона, то сохраняется зависимость сечения от вектора $\boldsymbol{\kappa}_3$ ($(\mathbf{e}_3)_i(\mathbf{e}_3^*)_j \to (1/2)[\delta_{ij} - (\boldsymbol{\kappa}_3)_i(\boldsymbol{\kappa}_3)_j]$):

$$\begin{aligned} M_{J_iJ_f} &= p_0 + p_1|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|^2 + p_2|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*|^2 + p_3|\mathbf{e}_1\boldsymbol{\kappa}_3|^2 + p_4|\mathbf{e}_2\boldsymbol{\kappa}_3|^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\left(\operatorname{Re} q_i \operatorname{Re} A_i' - \operatorname{Im} q_i \operatorname{Im} A_i'\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь отличны от нуля девять атомных параметров, два из которых ($\operatorname{Im} q_{1,2}$) описывают циркулярный дихроизм. Явные выражения p_i, q_i через Q_{xy} приведены в Приложении II. Действительные и мнимые части векторных комбинаций

$$A_1' = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2^*\boldsymbol{\kappa}_3)(\mathbf{e}_1^*\boldsymbol{\kappa}_3), \qquad A_2' = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^*)(\mathbf{e}_2\boldsymbol{\kappa}_3)(\mathbf{e}_1^*\boldsymbol{\kappa}_3)$$

можно записать через действительные векторы $\boldsymbol{\epsilon}_i$, $\boldsymbol{\kappa}_i$. Например,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Im} A_1' &= \xi_1\left\{l_2(\boldsymbol{\epsilon}_2\boldsymbol{\kappa}_3)(\boldsymbol{\epsilon}_2[\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_3]) - \frac{1}{2}(l_2 - 1)(\boldsymbol{\kappa}_2\boldsymbol{\kappa}_3)(\boldsymbol{\kappa}_3[\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_2])\right\} + \\ &+ \xi_2\left\{l_1(\boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\kappa}_3)(\boldsymbol{\epsilon}_1[\boldsymbol{\kappa}_2\boldsymbol{\kappa}_3]) - \frac{1}{2}(l_1 - 1)(\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_3)(\boldsymbol{\kappa}_3[\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_2])\right\}. \end{aligned}$$

Выражение (16) с заменой $\boldsymbol{\kappa}_3$ на $\mathbf{e}_3$ (и другими выражениями для параметров p_i, q_i) справедливо и в случае чисто линейной поляризации рассеянного фотона.

Если линейно поляризованы два фотона (например, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^*$), то

$$A_1 = A_2 = A_3^* = A_4^*, \qquad \operatorname{Im} A_1 = -\frac{1}{2}\xi_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\left(\boldsymbol{\kappa}_3[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\right)$$

и сечение содержит шесть слагаемых

$$M_{J_iJ_f} = \varphi_0 + \varphi_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 + \varphi_2|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3|^2 + \varphi_3|\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3|^2 + \varphi_4 \operatorname{Re} A_1 + \varphi_5\xi_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\left(\boldsymbol{\kappa}_3[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\right), \tag{17}$$

где коэффициенты $\varphi_0 \div \varphi_5$ простым образом связаны с параметрами f_i, g_i в (14).

2.3. Правила отбора для трехфотонных переходов

Как следует из общего выражения (9) для амплитуды, правила отбора для трехфотонных переходов совпадают с таковыми для матричных элементов тензора третьего ранга, построенного из трех полярных векторов **d**. Как известно [15], всякий тензор третьего ранга разлагается на семь неприводимых тензоров с рангами x от нуля до 3, однако такое разложение неоднозначно вследствие неоднозначности в выборе тензоров рангов 1 и 2. Поэтому представление (10) для A_{fi}, которое и соответствует указанному разложению, и выражение (13) содержат дополнительное суммирование по индексу y. В результате (10) содержит два тензорных произведения ранга $x = 2$ (с $y = 1, 2$) и три тензора первого ранга (с $y = 0, 1, 2$), интерференция которых в выражении (13) и обусловливает поляризационные аномалии в сечениях переходов.

Правила отбора для отдельных слагаемых в (13) такие же, как для электрического октупольного ($x = 3$), магнитного квадрупольного ($x = 2$), электрического дипольного ($x = 1$) излучения и псевдоскаляра ($x = 0$) соответственно. В частности, переходы возможны лишь между состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$ противоположной четности, а для индексов x, y в парциальных амплитудах Q_{xy} имеют место следующие «правила отбора»:

$$3 \geq x \geq |J_i - J_f|, \qquad 2 \geq y = x, x \pm 1, \qquad \Delta J \equiv |J_i - J_f| \leqslant 3. \tag{18}$$

В результате для заданных моментов J_i, J_f с $\Delta J \leqslant 3$ число отличных от нуля параметров Q_{xy} и независимых коэффициентов в (14) зависит от значений J_i, J_f. Наиболее простую структуру имеет сечение перехода между состояниями с максимально возможной разностью моментов $\Delta J = 3$. В этом случае в (13) отлична от нуля лишь «октупольная» часть сечения, определяемая парциальной амплитудой Q_{32}, а соответствующее тензорное произведение векторов содержит все комбинации векторов (1), (2) за исключением $\operatorname{Im} A_i$. Это единственный тип переходов, в которых отсутствует циркулярный дихроизм при открытых каналах диссипации и сечение определяется лишь одним атомным параметром $|Q_{32}|^2$. Для переходов с $\Delta J = 2$ отличны от нуля Q_{21}, Q_{22} и (при $J_i, J_f > 0$) Q_{32}. В этом случае сечения содержат одно «дихроичное» слагаемое $\sim \operatorname{Im} Q_{22}Q_{21}^*$ (см. Приложение II), обусловленное интерференцией двух «магнито-квадрупольных» амплитуд Q_{2y}. Амплитуда Q_{01} входит в сечения только для переходов с $\Delta J = 0$, поэтому все семь парциальных амплитуд Q_{xy} дают вклад в сечения лишь для переходов с $J_i = J_f \geq 3$.

Общие результаты упрощаются также при малых значениях J_i, J_f. Как отмечалось выше, для переходов с $J_i = 0, J_f = 3$ и $J_i = 0, J_f = 2$ отличны от нуля одна и две амплитуды Q_{xy} соответственно. При $J_i = 0, J_f = 1$ и $J_i = J_f = 1/2$ отличны от нуля три и четыре параметра Q_{xy} соответственно, при этом $\operatorname{Im} g_3 = 0$ и циркулярный дихроизм описывается интерференцией действительных и мнимых частей введенных в Приложении II величин α_i, являющихся комбинациями «электрических дипольных» амплитуд Q_{1y}.

3. ТРЕХФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ С ИДЕНТИЧНЫМИ ФОТОНАМИ

Особого рассмотрения требует практически важный частный случай, когда два из трех фотонов идентичны (из одного светового пучка). Для простоты будем считать их полностью поляризованными и положим для определенности $(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) = (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\kappa}_2) \equiv (\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa})$, $(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\kappa}_3) \equiv (\mathbf{e}', \boldsymbol{\kappa}')$. Амплитуда перехода в этом случае есть (ср. с (9))

$$\tilde{A}_{fi}(\mathbf{e},\omega;\mathbf{e}'^*,-\omega') = \langle\gamma_f J_f M_f|\left\{(\mathbf{e}'^*\mathbf{d})G_{E_i+2\omega}(\mathbf{ed})G_{E_i+\omega}(\mathbf{ed}) + \right.$$
$$\left. +(\mathbf{ed})G_{E_i+\omega-\omega'}(\mathbf{e}'^*\mathbf{d})G_{E_i+\omega}(\mathbf{ed}) + (\mathbf{ed})G_{E_i+\omega-\omega'}(\mathbf{ed})G_{E_i-\omega'}(\mathbf{e}'^*\mathbf{d})\right\}|\gamma_i J_i M_i\rangle \qquad (19)$$

и может быть записана в виде (10). При этом в сумме по y выпадают слагаемые с $y=1$, так что сечения определяются лишь четырьмя (в общем случае комплексными) парциальными амплитудами $Q_{10}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{32}$, выражения для которых имеют вид (11) с заменой $T^y_{J_1 J_2}(\alpha,\beta;\gamma,\delta)$ на

$$\tilde{T}_{J_1 J_2}(\alpha,\beta) = \langle\gamma_f J_f\|\,\mathbf{d}G^{J_1}_{E_i+\alpha}\mathbf{d}G^{J_2}_{E_i+\beta}\mathbf{d}\,\|\gamma_i J_i\rangle\,.$$

Комбинации векторов (2) в рассматриваемом случае также упрощаются:

$$A_2 = A_1^* = l(\mathbf{ee}')(\mathbf{ee}'^*), \quad A_3 = |\mathbf{ee}'|^2, \quad A_4 = |\mathbf{ee}'^*|^2,$$

при этом

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} A_2 = \xi l\left\{l'(\epsilon\epsilon')\big(\kappa[\epsilon\epsilon']\big) + \frac{1}{2}(1-l')(\epsilon\kappa')\big(\epsilon[\kappa\kappa']\big)\right\},\\ &2\operatorname{Re} A_2 = l\left\{2l'(\epsilon\epsilon')^2 - (l-1)(l'-1)\big(1+(\kappa\kappa')^2\big) + (l-1)[\kappa\epsilon']^2 - (l'-1)[\epsilon\kappa']^2\right\}. \end{aligned} \qquad (20)$$

В результате поляризационно-угловая структура сечений определяется выражением (ср. с (14))

$$\tilde{M}_{J_i J_f} = a_1 + a_2 l^2 + a_3|\mathbf{ee}'|^2 + a_4|\mathbf{ee}'^*|^2 + a_5\operatorname{Re} A_2 + a_6\operatorname{Im} A_2, \qquad (21)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}|Q_{32}|^2 + \frac{2}{5}|Q_{22}|^2\right), \quad a_2 = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}|Q_{12} - \sqrt{5}Q_{10}|^2 - \frac{1}{7}|Q_{32}|^2 - |Q_{22}|^2\right),$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{7}|Q_{32}|^2 - \frac{2}{5}|Q_{22}|^2 - \frac{1}{5}|Q_{21}|^2\right), \quad a_4 = \frac{1}{15}\left(3|Q_{12}|^2 - \frac{4}{7}|Q_{32}|^2 - |Q_{22}|^2\right),$$

$$a_5 = \frac{2}{15}\left(\sqrt{5}\operatorname{Re}\{Q_{10}Q_{12}^*\} - \frac{2}{7}|Q_{32}|^2 + |Q_{22}|^2 - |Q_{12}|^2\right), \quad a_6 = \frac{2\sqrt{5}}{15}\operatorname{Im}\{Q_{10}Q_{12}^*\}.$$

Как видно из (20), последнее слагаемое в (21) отлично от нуля лишь при эллиптической поляризации поля накачки с $0<|\xi|<1$ и меняет знак при замене ξ на $-\xi$, т. е. приводит к зависимости сечений от направления вращения вектора электрического поля накачки (эллиптический дихроизм). Как и в случае циркулярного дихроизма, эллиптический дихроизм определяется интерференцией действительных и мнимых частей парциальных амплитуд и его измерение позволяет получить информацию о диссипативных параметрах среды, недоступную в экспериментах с линейной или циркулярной поляризацией фотонов накачки.

Для переходов с идентичными фотонами также справедливы правила отбора (18) для амплитуд Q_{xy} с дополнительным условием $Q_{x1}=0$. Поэтому эллиптический дихроизм отсутствует не только для переходов с $\Delta J = 3$, но и в случае $\Delta J = 2$. В последнем случае сечение определяется двумя неинтерферирующими амплитудами Q_{32} и Q_{22}. Все четыре параметра Q_{xy} входят в сечения только для переходов с $J_i + J_f \geq 3$ и $\Delta J = 0, 1$.

При $J_i = 0, J_f = 1$ и $J_i = J_f = 1/2$ сечения определяются лишь двумя параметрами Q_{10} и Q_{12}.

В случае трехфотонного возбуждения полем одного светового пучка все три фотона идентичны. Сечение в этом случае определяется всего двумя атомными факторами при произвольных J_i, J_f:

$$M_{J_i J_f} = a + b\, l^2, \tag{22}$$

где

$$a = \frac{1}{7}|Q_{32}|^2, \quad b = \frac{1}{45}\left|\sqrt{5}Q_{10} + 2Q_{12}\right|^2 - \frac{3}{35}|Q_{32}|^2.$$

Для расчета атомных параметров трехфотонных переходов приведенные матричные элементы (12) в выражении (11) для Q_{xy} должны быть вычислены с учетом схемы связи угловых моментов в конкретном атоме. Так, для гиперрамановского перехода $\left|\gamma_i S_{1/2}\right\rangle +$ $+2\omega \to \left|\gamma_f P_{1/2}\right\rangle + \omega'$ в атоме с одним электроном во внешней оболочке (например, для щелочных атомов) парциальные амплитуды $Q_{10,12}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}Q_{10} &= R^s_{1/2}(\omega,\omega) + R^s_{1/2}(\omega,-\omega') + 2\left[R^s_{3/2}(\omega,\omega) + R^d_{1/2}(\omega,-\omega')\right] + \\
&+ \frac{1}{3}\left[2R^d_{3/2}(-\omega',\omega) + 4R^d_{1/2}(-\omega',\omega) + 4R^s_{3/2}(-\omega',\omega) - R^s_{1/2}(-\omega',\omega)\right], \\
\sqrt{\frac{3}{5}}Q_{12} &= R^d_{1/2}(\omega,\omega) + R^d_{1/2}(\omega,-\omega') + \frac{1}{5}\left[R^d_{3/2}(\omega,\omega) + R^d_{3/2}(\omega,-\omega') - \frac{2}{3}R^d_{3/2}(-\omega',\omega)\right] + \\
&+ \frac{1}{3}\left[-R^d_{1/2}(-\omega',\omega) + R^s_{3/2}(-\omega',\omega) + 2R^s_{1/2}(-\omega',\omega)\right].
\end{aligned}$$

Здесь

$$R^s_J(\alpha,\beta) = \left\langle \gamma_f P_{1/2}\right| d g_{1/2,0}(E_i+\alpha+\beta) d g_{J,1}(E_i+\beta) d \left|\gamma_i S_{1/2}\right\rangle,$$

$$R^d_J(\alpha,\beta) = \left\langle \gamma_f P_{1/2}\right| d g_{3/2,2}(E_i+\alpha+\beta) d g_{J,1}(E_i+\beta) d \left|\gamma_i S_{1/2}\right\rangle$$

— радиальные составные матричные элементы, соответствующие двум значениям $J = 1/2,\ 3/2$ полного момента в радиальной части $g_{JL}(E; r, r')$ функции Грина.

Численный расчет $R^{s,d}_J(\alpha,\beta)$ может быть выполнен стандартными методами расчета многофотонных сечений по теории возмущений [1, 2], численные значения сечений для ряда трехфотонных переходов в конкретных атомах приведены, например, в [16]. Для надпороговых частот ($E_i + \alpha = E > 0$ или $E_i + \alpha + \beta = E > 0$) матричные элементы $R^{s,d}(\alpha,\beta)$ имеют мнимую часть, пропорциональную произведению амплитуд одно- и двухфотонной ионизации из состояний $|i\rangle$ и $|f\rangle$ в одно и то же состояние континуума с энергией E. В общем случае $\mathrm{Re}\, R^{s,d}$ и $\mathrm{Im}\, R^{s,d}$ имеют одинаковый порядок величины, так что эффекты циркулярного дихроизма и эллиптического дихроизма в этом случае имеют величину порядка единицы (см. аналогичный расчет матричных элементов для циркулярного дихроизма при двухфотонном дипольно-запрещенном надпороговом рассеянии света в [10]).

В резонансных процессах эффекты циркулярного дихроизма оказываются малыми, поскольку интерференционные слагаемые в сечении, пропорциональные Г, малы по сравнению с чисто резонансной частью сечения. Так, если Δ — интервал тонкой структуры резонансного уровня с шириной Γ, то дихроичные слагаемые имеют порядок Γ/Δ, такой же, как и величина диссипативно-индуцированных ориентационных эффектов (см. ниже разд. 4) при дипольно-разрешенном двухфотонном рассеянии [17]. Поэтому, также как и в случае двухфотонного рассеяния [10], эффекты циркулярного или эллиптического дихроизма в резонансных трехфотонных процессах могут стать существенными лишь в случае резонанса на дипольно-запрещенном переходе. При этом поляризационно-угловая структура сечений имеет уже более громоздкий вид по сравнению с (14), поскольку резонансная часть амплитуды включает также волновые векторы $\mathbf{k}_{1,2}$, происходящие от учета недипольных поправок во взаимодействии атома с фотонами.

Мы не приводим здесь соответствующие формулы, поскольку они могут быть записаны в значительно более простом виде для каждой конкретной геометрии эксперимента.

4. ДИССИПАТИВНО-ИНДУЦИРОВАННЫЕ ЭФФЕКТЫ АТОМНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ПРИ ТРЕХФОТОННОМ РАССЕЯНИИ

Как обсуждалось выше, эффекты дихроизма являются специфическими интерференционными эффектами и обусловлены наличием в задаче T-нечетного псевдовектора $\xi\boldsymbol{\kappa} = i[\mathbf{e}^*\mathbf{e}]$, присущего эллиптически поляризованной волне, и T-нечетного (диссипативного) атомного параметра. Другой класс интерференционных явлений, обусловленных диссипативными процессами, связан с эффектами поляризации атомов при многофотонных переходах в полях с нулевой степенью циркулярной поляризации. В этом случае аксиальным T-нечетным вектором является средний угловой момент $\mathbf{J}$ атома в начальном ($\mathbf{J}_i$) или конечном ($\mathbf{J}_f$) состоянии.

Зависимость сечений двухфотонных процессов от ориентации атома в начальном состоянии и возникновение преимущественной ориентации в конечном состоянии в случае неполяризованного исходного состояния проанализированы в работе [17] и обусловлены интерференционными слагаемыми в сечении типа ($\mathbf{j} = \mathbf{J}_i$ или $\mathbf{J}_f$)

$$\Gamma(\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_2)([\boldsymbol{\kappa}_1\boldsymbol{\kappa}_2]\mathbf{j}) \tag{23а}$$

для неполяризованных фотонов или

$$\Gamma(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)([\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\mathbf{j}) \tag{23б}$$

в случае линейной поляризации фотонов.

Очевидно, диссипативно-индуцированные ориентационные явления возможны и в многофотонных процессах с тремя и более фотонами. При этом наиболее интересен случай двухчастотных полей с векторами поляризации $\mathbf{e}_{1,2}$. Как отмечалось выше, возможны эффекты двух типов: зависимость сечений от ориентации исходного состояния атома при нефиксированной ориентации конечного состояния (это требует создания предварительной ориентации газовой среды, например, методами оптической накачки) и возникновение ориентации в конечном состоянии при неполяризованном исходном состоянии газа. В последнем случае ориентация в процессах типа рассеяния света имеет корреляционный характер, поэтому она может быть зафиксирована лишь в совпадении с регистрацией рассеянных фотонов в заданном направлении κ_2 и зависит от направления κ_2.

Ниже приводятся результаты для простейшего случая гиперрамановского перехода между состояниями с $J_i = J_f = 1/2$ (например, для переходов $nS_{1/2} - n'P_{1/2}$ в атомах щелочных металлов) с поглощением двух фотонов $\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, \omega$ и испусканием фотона $\mathbf{e}', \boldsymbol{\kappa}', \omega'$. Вероятность перехода, усредненная по ориентациям $M_i = \pm 1/2$ начального состояния, вычисляется для фиксированной проекции M_f момента конечного состояния на заданное направление $\mathbf{N}$ в пространстве (ось детектора, измеряющего ориентацию возбужденного атома). Вектор $\mathbf{j} = (M_f)_{av}\mathbf{N}$, где $(M_f)_{av}$ — среднее значение M_f, характеризует ориентацию атома в конечном состоянии $(0 \leqslant |\mathbf{j}| \leqslant 1/2)$.

При произвольных (эллиптических) поляризациях падающих и рассеянного фотонов поляризационно-угловая структура сечения может быть записана в виде

$$2\tilde{M}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{e}', \boldsymbol{\kappa}', \mathbf{j}) = a_2^{(1/2)} l^2 (1 + 2\xi' \boldsymbol{\kappa}'\mathbf{j}) + a_4^{(1/2)} |\mathbf{e}\mathbf{e}'^*|^2 (1 - 2\xi \boldsymbol{\kappa}\mathbf{j}) + \\ + a_5^{(1/2)} \left(\operatorname{Re} A_2 + 2l \operatorname{Im} \mathbf{B}\mathbf{j}\right) + a_6^{(1/2)} \left(\operatorname{Im} A_2 - 2l \operatorname{Re} \mathbf{B}\mathbf{j}\right). \qquad (24)$$

Здесь $\operatorname{Re} A_2$ и $\operatorname{Im} A_2$ даются формулами (20),

$$\mathbf{B}\,\mathbf{j} = (\mathbf{e}\mathbf{e}'^*)([\mathbf{e}\mathbf{e}']\,\mathbf{j}),$$

а коэффициенты $a_i^{(1/2)}$ те же, что и в (21), если положить в последних $J_i = J_f = 1/2$. При этом $a_1 = a_3 = 0$, а остальные коэффициенты выражаются через параметры Q_{10}, Q_{12}. Таким образом, для перехода с $J_i = J_f = 1/2$ ориентационные эффекты описываются теми же атомными параметрами, что и в случае неполяризованного атома. Укажем, что выражение (24) может быть использовано и для анализа трехфотонных переходов в предварительно ориентированном атоме без анализа ориентации в конечном состоянии (см. аналогичное рассмотрение в [17] для двухфотонного рассеяния).

В общем случае произвольных поляризаций фотонов действительная и мнимая части $\mathbf{B}\,\mathbf{j}$ имеют достаточно громоздкий вид:

$$2 \operatorname{Re} \mathbf{B}\mathbf{j} = 2l'(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')\left([\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}']\mathbf{j}\right) + \frac{1}{2}\xi\xi' \left[(\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\epsilon})\left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}]\mathbf{j}\right) + \left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}]\boldsymbol{\kappa}'\right)(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{j})\right] + \\ + l'(l-1)(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}')\left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}']\mathbf{j}\right) + l(l'-1)(\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\epsilon})\left([\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}']\mathbf{j}\right) + \frac{1}{2}(l-1)(l'-1)(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}')\left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}']\mathbf{j}\right), \qquad (25)$$

$$2 \operatorname{Im} \mathbf{B}\mathbf{j} = \xi' \left\{ l\left([\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}'][\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{j}]\right) + \frac{1}{2}(l-1)[\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}'][\boldsymbol{\kappa}\mathbf{j}] \right\} + \xi \left\{ l'\left(2(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')\left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}][\boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{j}]\right) + [\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{j}]\right) + \\ + \frac{1}{2}(l'-1)\left(2(\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\epsilon})\left([\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}][\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{j}]\right) + [\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{j}]\right) \right\}. \qquad (26)$$

Как следует из (24)–(26), существуют два механизма возникновения ориентации предварительно неполяризованного атома в процессе трехфотонного рассеяния. В первых трех слагаемых в (24) ориентационные члены ($\sim \mathbf{j}$) исчезают при $\xi = 0$, $\xi' = 0$ и описывают «нормальные» ориентационные явления в полях с отличной от нуля степенью циркулярной поляризации. Отметим лишь, что при чисто циркулярной поляризации фотона $\mathbf{e}$ ориентационные слагаемые $\sim \xi'\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{j}$ и $\sim \operatorname{Im} \mathbf{B}\mathbf{j}$ выпадают из сечения и дают вклад лишь при линейной или эллиптической поляризации $\mathbf{e}$. Слагаемое с $\operatorname{Re} \mathbf{B}\mathbf{j}$, содержащее коэффициент $a_6 \sim \operatorname{Im}\{Q_{10}Q_{12}^*\}$, отлично от нуля и при $\xi = \xi' = 0$ и описывает диссипативно-индуцированную ориентацию в двух линейно поляризованных световых полях. Выражение (24) в этом случае принимает особенно простой вид:

$$2\tilde{M}(\epsilon, \kappa, \epsilon', \kappa', \mathbf{j}) = a_2^{(1/2)} + (a_4^{(1/2)} + a_5^{(1/2)})(\epsilon\epsilon')^2 - 2a_6^{(1/2)}(\epsilon\epsilon')([\epsilon\epsilon']\mathbf{j}). \quad (27)$$

Как видно, ориентационное слагаемое имеет ту же векторную структуру (23б), что и в случае двухфотонного рассеяния. Для коллинеарных световых пучков вектор ориентации направлен вдоль направления распространения света и максимален, когда угол между направлениями линейной поляризации фотонов составляет $\pi/4$. Ориентация возникает и в случае неполяризованного фотона $\mathbf{e}'$ ($\xi' = l' = 0$), но при отличной от нуля степени линейной поляризации l фотона $\mathbf{e}$. Соответствующие результаты легко получаются как частный случай (24)–(26). В этом случае вектор ориентации направлен перпендикулярно плоскости векторов ϵ и κ', максимален, когда угол между этими векторами равен $\pi/4$, и исчезает в случае коллинеарных световых пучков. Если же неполяризован и фотон $\mathbf{e}$, то в отличие от случая двухфотонного рассеяния ориентация исчезает (см. (23а)). Этот факт специфичен лишь для случая двух идентичных фотонов, поэтому, если все три фотона различны, ориентация возникает и для неполяризованных фотонов и описывается комбинациями векторов вида

$$(\kappa_1\kappa_2)(\kappa_1\kappa_3)([\kappa_2\kappa_3]\mathbf{j})$$

плюс члены, получаемые перестановкой индексов 1, 2, 3. Относительно численной величины диссипативно-индуцированных ориентационных эффектов справедливы те же соображения, что и в случае эффектов циркулярного и эллиптического дихроизма: для надпороговых частот величина эффекта порядка единицы, а в резонансной области частот для наблюдения диссипативно-индуцированных ориентационных явлений наиболее перспективен случай дипольно-запрещенных одно- или двухфотонных резонансов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16251-а) и Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (грант 95-0-5.3-25).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Вычисление тензорных произведений векторов

При использовании техники квантового углового момента для разделения кинематических и динамических факторов в сечениях процессов, содержащих несколько векторов (векторы поляризации фотонов, импульсы частиц и т. д.), приходится иметь дело со скалярными произведениями неприводимых тензоров, составленных из указанных векторов. Такие конструкции в наиболее общем случае имеют вид

$$\left(\left\{\ldots\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}_1\}_{i_1}\otimes\ldots\mathbf{a}_k\right\}_l\left\{\ldots\{\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}_1\}_{j_1}\otimes\ldots\mathbf{b}_{k'}\right\}_l\right) \quad (\text{П}.1)$$

и будучи скалярами должны, очевидно, представляться через комбинации скалярных и смешанных произведений векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_j$. Для выражений (П.1), содержащих три и четыре вектора, соответствующие формулы приведены в [15]. Ниже описана процедура упрощения выражения (П.1) при произвольных k, k' и l.

Введем вначале специальное обозначение для тензорного произведения одинаковых векторов, ранг которого совпадает с числом входящих в него векторов:

$$\{\ldots\{\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\}_2\otimes\mathbf{a}\}_3\otimes\ldots\mathbf{a}\}_{jm}\equiv\{\mathbf{a}\}_{jm}, \tag{П.2}$$

и укажем свойства неприводимых тензоров, которые могут быть проверены с использованием правил изменения схемы связи в тензорных произведениях [15].

1) Все тензоры, ранг которых совпадает с количеством входящих в них векторов, не зависят от схем связи этих векторов. Это утверждение очевидно из соотношения (R_{i-1} и S_j — произвольные тензоры)

$$\{\{R_{i-1}\otimes\mathbf{a}\}_i\otimes S_j\}_{i+j,\ m}=\left\{R_{i-1}\otimes\{\mathbf{a}\otimes S_j\}_{j+1}\right\}_{i+j,\ m}. \tag{П.3}$$

2) Если ранг тензорного произведения равен разности рангов входящих в него тензоров, то схему связи этих тензоров можно изменять в соответствии с равенством

$$\{\{R_{i-1}\otimes\mathbf{a}\}_i\otimes S_j\}_{j-i,\ m}=\left\{R_{i-1}\otimes\{\mathbf{a}\otimes S_j\}_{j-1}\right\}_{j-i,\ m}. \tag{П.4}$$

3) Для скалярного произведения тензоров $\{\mathbf{a}\}_{jm}$ и $\{\mathbf{b}\}_{jm}$ справедливо равенство

$$\left(\{\mathbf{a}\}_j\,\{\mathbf{b}\}_j\right)=P_j(x)\frac{j!}{(2j-1)!!}(ab)^j, \tag{П.5}$$

следующее из известной записи сферической функции $Y_{jm}(\mathbf{a}/a)$ через $\{\mathbf{a}\}_{jm}$ [15] и теоремы сложения для $Y_{jm}(\mathbf{a}/a)$; $x=\mathbf{ab}/ab$, P_j — полином Лежандра.

Покажем теперь, что для всякой тензорной конструкции справедливо равенство

$$\left\{\ldots\left\{\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}_1\}_{i_1}\otimes\mathbf{a}_2\right\}_{i_2}\otimes\ldots\mathbf{a}_k\right\}_{i_km_k}=\hat{O}(\mathbf{a};\,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)\,\{\mathbf{a}\}_{i_km_k}, \tag{П.6}$$

где $\hat{O}$– скалярный дифференциальный оператор, содержащий векторы $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ и оператор градиента $\nabla_{\mathbf{a}}\equiv\partial/\partial\mathbf{a}$. Действительно, для каждого конкретного набора $i_1,i_2,\ldots,i_k$ такой оператор можно составить, используя равенства

$$\begin{aligned}
\{\{\mathbf{a}\}_l\otimes\mathbf{b}\}_{l-1\ m}&=\frac{a^{2l+1}}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}}(\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{a}})a^{-2l+1}\,\{\mathbf{a}\}_{l-1\ m},\\
\{\{\mathbf{a}\}_l\otimes\mathbf{b}\}_{l+1\ m}&=\frac{1}{l+1}(\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{a}})\,\{\mathbf{a}\}_{l+1\ m},\\
\{\{\mathbf{a}\}_l\otimes\mathbf{b}\}_{lm}&=-\frac{i}{\sqrt{l(l+1)}}(\mathbf{b}[\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{a}}])\,\{\mathbf{a}\}_{lm},
\end{aligned} \tag{П.7}$$

которые можно проверить с учетом правила изменения схемы связи.

Приведенные результаты достаточны для упрощения конструкций типа (П.1). Используя (П.7), векторы $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{k'}$ можно вынести в скалярный (содержащий только скалярные и смешанные произведения) дифференциальный оператор (см. (П.6)), действующий на скалярное произведение (П.5) с $j=l$. Вычисляя действие этого оператора на полином Лежандра, записанный в явном виде через скалярные произведения $\mathbf{ab}$, получаем окончательный результат. При малом числе векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ наиболее употребительными являются формулы, следующие из (П.7) при $l=1,2$:

$$\{\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\}_2\otimes\mathbf{b}\}_{2m}=-\frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{b}[\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{a}}])\,\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\}_{2m},$$

$$\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\}_{2m}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{a}})\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\}_{2m},\quad \{\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\}_2\otimes\mathbf{b}\}_1=\frac{a^5}{\sqrt{15}}(\mathbf{b}\nabla_{\mathbf{a}})\frac{1}{a^3}\mathbf{a}.$$

Изложенная процедура иллюстрируется на простом примере:

$$\begin{aligned}\left(\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}_1\}_2\{\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}_1\}_2\right)&=\frac{1}{6}(\mathbf{a}_1\nabla_{\mathbf{a}})(\mathbf{b}_1\nabla_{\mathbf{b}})\,a^2b^2P_2(\cos\theta)=\\ &=\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1\nabla_{\mathbf{a}})(\mathbf{b}_1\nabla_{\mathbf{b}})\left\{(\mathbf{ab})^2-\frac{1}{3}a^2b^2\right\}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1\nabla_{\mathbf{a}})\left\{(\mathbf{ab})(\mathbf{b}_1\mathbf{a})-\frac{1}{3}a^2(\mathbf{b}_1\mathbf{b})\right\}=\\ &=\frac{1}{2}(\mathbf{ba}_1)(\mathbf{b}_1\mathbf{a})+\frac{1}{2}(\mathbf{ab})(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1)-\frac{1}{3}(\mathbf{bb}_1)(\mathbf{aa}_1),\end{aligned}$$

что совпадает с результатом, приведенным в [15].

В заключение укажем, что изложенная техника преобразования скалярных произведений типа (П.1) применима и для упрощения тензоров R_{kq} низкого ранга k, построенных из векторов. Так, для упрощения тензора первого ранга R_{1q} вначале следует вычислить скалярное произведение $(R_1\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — произвольный вектор, а затем получить явное выражение для R_{1q}, действуя оператором $(\nabla_{\mathbf{r}})_q$ на $(R_1\mathbf{r})$.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Инвариантные атомные параметры для трехфотонных процессов

Используя для комбинаций атомных параметров Q_{xy} обозначения

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}Q_{12}+\sqrt{5}Q_{11}\right),\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}Q_{12}-\sqrt{5}Q_{11}\right),\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{5}Q_{10}-Q_{12}\right),$$

$$\beta_1=\frac{1}{2}\left(Q_{22}+\sqrt{3}Q_{21}\right),\quad \beta_2=\frac{1}{2}\left(Q_{22}-\sqrt{3}Q_{21}\right),\quad \gamma_1=|Q_{01}|^2,\quad \gamma_2=\frac{1}{7}|Q_{32}|^2,$$

динамические атомные факторы f_i, g_i в (14) запишем в виде

$$f_0=\frac{1}{6}\left(\gamma_1+\gamma_2+\frac{8}{15}|\beta_1+\beta_2|^2-\frac{8}{15}\,\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*)\right),$$

$$f_2=\frac{1}{6}\left(-\gamma_1+\gamma_2+\frac{4}{15}|\beta_1+\beta_2|^2+\frac{8}{15}\,\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*)\right),$$

$$f_1=\frac{1}{15}\left(|\alpha_3|^2-\gamma_2-|\beta_1+\beta_2|^2\right),$$

$$f_3=\frac{1}{6}\left(-\gamma_1+\gamma_2+\frac{4}{15}\left[|\beta_1-\beta_2|^2-3|\beta_2|^2\right]\right),$$

$$f_5=\frac{1}{6}\left(-\gamma_1+\gamma_2+\frac{4}{15}\left[|\beta_1-\beta_2|^2-3|\beta_1|^2\right]\right),$$

$$f_4=\frac{1}{15}\left(|\alpha_2|^2-\gamma_2-|\beta_1|^2\right),\quad f_6=\frac{1}{15}\left(|\alpha_1|^2-\gamma_2-|\beta_2|^2\right),$$

$$g_1 = \frac{2}{15}\left(\alpha_2{}^*\alpha_3 - \gamma_2 + |\beta_1|^2 + \beta_1{}^*\beta_2\right), \qquad g_2 = \frac{2}{15}\left(\alpha_1\alpha_3{}^* - \gamma_2 + |\beta_2|^2 + \beta_1{}^*\beta_2\right),$$

$$g_3 = \frac{1}{3}\left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{4}{15}\left[|\beta_1 - \beta_2|^2 + 3\beta_1\beta_2{}^*\right]\right), \qquad g_4 = \frac{2}{15}\left(\alpha_1{}^*\alpha_2 - \gamma_2 - \beta_1\beta_2{}^*\right).$$

Параметры p_i, q_i в выражении (16) имеют вид

$$p_0 = \frac{1}{30}\left(8\gamma_2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2\right),$$

$$p_1 = \frac{1}{15}\left(-3\gamma_2 + \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\alpha_3^*\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{45}\left[12\gamma_2 + 3\,\mathrm{Re}(\alpha_1\alpha_2^*) - 5\,\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*)\right],$$

$$p_3 = \frac{1}{60}\left(5\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2|\alpha_2|^2 + \frac{2}{3}|\beta_1 + 2\beta_2|^2\right), \quad p_4 = \frac{1}{60}\left(5\gamma_1 - 3\gamma_2 - 2|\alpha_1|^2 + \frac{2}{3}|2\beta_1 + \beta_2|^2\right),$$

$$q_1 = \frac{1}{15}\left[2\gamma_2 - \alpha_3(\alpha_1^* + \alpha_2^*) - |\beta_1 + \beta_2|^2\right],$$

$$q_2 = \frac{1}{30}\left[-5\gamma_1 - 3\gamma_2 + \frac{4}{3}|\beta_1 - \beta_2|^2 - \alpha_1\alpha_2^* + 2\,\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*) + i\,6\,\mathrm{Im}(\beta_1\beta_2^*)\right].$$

Литература

1. N. B. Delone and V. P. Krainov, *Multiphoton processes in atoms*, Springer-Verlag, Berlin (1994).
2. N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, and L. P. Rapoport, Phys. Rep. **141**, 319 (1986); A. G. Fainshtein, N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, and L. P. Rapoport, Phys. Rep. **210**, 112 (1992).
3. S. Baier, A. N. Grum-Grzhimailo, and N. M. Kabachnik, J. Phys. B **27**, 3363 (1994).
4. N. A. Cherepkov, V. V. Kuznetsov, and V. A. Verbitskii, J. Phys. B **26**, 1221 (1995).
5. J. Berakdar, H. Klar, A. Huetz, and P. Selles, J. Phys. B **26**, 1463 (1993).
6. N. M. Kabachnik and V. Schmidt, J. Phys. B **28**, 233 (1995).
7. N. L. Manakov, S. I. Marmo and A. V. Meremianin, J. Phys. B **29**, 2711 (1996).
8. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and V. V. Volovich, Phys. Lett. A **204**, 42 (1995).
9. Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, А. Г. Файнштейн, ЖЭТФ **108**, 1569 (1995).
10. Н. Л. Манаков, ЖЭТФ **106**, 1286 (1994).
11. N. L. Manakov and A. V. Meremianin, in *Contributed papers of 5-th ECAMP*, Edinburgh (1995), pt. II, p. 635.
12. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
13. В. Л. Стрижевский, В. М. Клименко, ЖЭТФ **53**, 244 (1967).
14. Н. Л. Манаков, В. Д. Овсянников, Опт. и спектр. **48**, 651 (1980).
15. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
16. Н. Л. Манаков, В. Д. Овсянников, Опт. и спектр. **48**, 838 (1980).
17. M. Ya. Agre and N. L. Manakov, J. Phys. B **29**, L5 (1996).