

ЖУРНАЛ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА  
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД  
МОСКВА

ТОМ 111, ВЫПУСК 6  
ИЮНЬ, 1997  
«НАУКА»

НОВЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ НАМБУ-ЙОНА-ЛАЗИНИО ПРИ  
НЕНУЛЕВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

© 1997

А. С. Вишвец\*, В. Ч. Жуковский†, К. Г. Клименко‡

\* Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики  
117454, Москва, Россия

† Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119899, Москва, Россия

‡ Институт физики высоких энергий  
142284 Протвино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 июня 1996 г.

Впервые показано, что в модели Намбу-Йона-Лазинио при ненулевых значениях химического потенциала  $\mu$  состояние с массивными фермионами описывается двумя различными фазами, переход между которыми — фазовый переход второго рода. Доказано, что восстановление киральной симметрии модели может происходить с помощью фазовых переходов как первого, так и второго рода, в зависимости от значений параметров модели. На фазовой диаграмме  $(\mu, M)$  ( $M$  — динамическая масса фермиона при  $\mu = 0$ ) существуют две критические точки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея спонтанного нарушения симметрии играет важную роль в развитии физики элементарных частиц. В настоящее время существуют два широко известных способа нарушить симметрию спонтанным образом. В первом из них спонтанное нарушение симметрии происходит в теориях со вспомогательными полями Хиггса, где спонтанное

\* E-mail: alexandr@vvas.msk.ru

† E-mail: zhukovsk@th180.phys.msu.su

‡ E-mail: kklim@mx.ihep.su

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии,  
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1997 г.

нарушение фактически происходит на уровне классического действия (именно на этом подходе основана стандартная теория электрослабых взаимодействий, теория большого объединения и др.). Плата за такую возможность — обязательное существование неоткрытых еще хиггсовских бозонов.

В другом подходе спонтанное нарушение симметрии происходит динамическим образом, т. е. благодаря радиационным поправкам к классическому действию, и при этом не требуется введения полей Хиггса. Впервые такой механизм нарушения симметрии был обнаружен в моделях с четырехфермионным взаимодействием [1, 2], простейшая из которых описывается лагранжианом вида

$$L = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{C}{2N} \left[ (\bar{\psi}_k \psi_k)^2 + (\bar{\psi}_k i \gamma_5 \psi_k)^2 \right] \quad (1)$$

и называется моделью Намбу-Йона-Лазинио. Для того чтобы использовать  $1/N$ -разложение, мы рассматриваем  $N$ -фермионную версию модели, которая при этом симметрична относительно простейших непрерывных киральных преобразований

$$\psi_k \rightarrow e^{i\theta \gamma_5} \psi_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2)$$

Теории с четырехфермионным взаимодействием находят применение для объяснения сверхпроводимости [3] и высокотемпературной сверхпроводимости [4]. Лагранжианы с четырехфермионным взаимодействием использовались ранее при обсуждении сверхпроводимости [5–8]. Следует заметить, что при исследовании явления сверхпроводимости (как и иных кинетических явлений) весьма существенными оказываются электронные состояния вблизи поверхности Ферми. Энергия Ферми для свободных электронов, как известно, равна

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3}}{m_e}, \quad (3)$$

где  $m_e$  и  $n_e$  — масса и концентрация электронов, соответственно,  $\hbar$  — постоянная Планка.

Потенциальную энергию взаимодействия двух электронов на среднем расстоянии  $\langle r \rangle \sim n_e^{-1/3}$  можно оценить следующим образом:

$$\langle V_{pot} \rangle \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle} = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4)$$

Величина

$$\alpha = \frac{\langle V_{pot} \rangle}{\varepsilon_F} = \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{1/3}} \quad (5)$$

в значительной мере характеризует свойства сверхпроводников и используется при построении различных приближений. В металлах этот параметр  $\alpha \geq 1$ , т. е. не является малым. Вследствие этого необходимо учитывать кулоновское взаимодействие электронов друг с другом, а также электрон-фононное взаимодействие. Кулоновское взаимодействие может приводить как к обменному взаимодействию, так и к корреляции их взаиморасположения. Эффекты такого рода существенны при расчете законов дисперсии

электронов и построении поверхности Ферми [9]. С учетом сказанного при определении этих характеристик обычно для конкретных металлов используют феноменологические выражения, полученные для областей  $\alpha \geq 1$ .

При обсуждении явления сверхпроводимости (и других кинетических явлений) обычно считают поверхность Ферми заданной, однако сама структура этой поверхности может быть весьма сложной [9]. В основном состоянии все уровни с энергией  $\varepsilon < \varepsilon_F$  заполнены, а с энергией  $\varepsilon > \varepsilon_F$  — свободны. Далее полагают элементарные возбуждения в реальных металлах такими же, как и в системе невзаимодействующих электронов с той же поверхностью Ферми. Строго говоря, это не так, поскольку возбужденные состояния в системе сильно взаимодействующих частиц могут значительно отличаться от таковых в системе невзаимодействующих частиц. Для полного описания возбужденных состояний требуется решение проблемы кулоновского взаимодействия, т. е. самосоглазованной многочастичной задачи.

Для обычных низкотемпературных сверхпроводников разность между возбужденными состояниями невелика, что приводило к хорошему согласию результатов численных расчетов для сверхпроводящих параметров с экспериментом. В случае высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), где величина  $n_e$  ниже, чем в обычных металлах, кулоновское взаимодействие (кулоновские корреляции) может, по-видимому, приводить к существенному отличию возбужденных состояний ВТСП от соответствующих состояний для ситуации без учета взаимодействия. Сложности как технические, так и математические приводят к тому, что при описании явления ВТСП теоретикам приходится использовать хорошо зарекомендовавшие себя теоретико-полевые модели, исследуя их с учетом различных значений физических параметров. Вместе с тем, к этим модельным задачам надо относиться осторожно, равно как и результатам, получаемым на их основе. Это связано с тем, что в них различные типы взаимодействия учитываются порой весьма формально путем включения в лагранжиан соответствующего типа взаимодействия, и это затрудняет идентификацию с физическими данными результатов, полученных на основе исследуемой модели. Относительно лагранжиана (1) следует отметить, что мы рассматриваем только одну сторону вопроса — нарушение киральной инвариантности при конечном химическом потенциале (заметим, что сверхпроводимость обычно связывают с нарушением  $U(1)$ -симметрии данной модели). Введение формального химического потенциала может быть обосновано, например, в рамках обобщенной модели Намбу-Йона-Лазинио, в которой имеются векторные частицы ( $\rho$ -мезоны). Недостаток, присущий этой модели — неперенормируемость и наличие параметра обрезания  $\Lambda \sim 4\pi f_\pi \approx 1,2$  ГэВ — в значительной мере компенсируется ее предсказательной силой в низкоэнергетическом приближении адронной физики. Так, эта модель активно использовалась при описании низкоэнергетической физики мезонов [10], построении альтернативных моделей электрослабого взаимодействия [11] и т. д. Недавно на их основе был открыт эффект катализации спонтанного нарушения симметрии внешними магнитными полями [12] (см. также [13]). Все сказанное в полной мере показывает, почему уже более тридцати лет не ослабевает интерес к моделям типа Намбу-Йона-Лазинио, причем особое внимание уделяется исследованиям структуры вакуума и его критических свойств при наличии окружающей среды, т. е. учету таких факторов как температура и химический потенциал [14, 15], различные внешние поля [16], нетривиальная топология и кривизна пространства-времени [17].

С учетом сказанного в предлагаемой работе проводится детальное исследование фазовой структуры четырехмерной модели Намбу-Йона-Лазинио при ненулевых значени-

ях химического потенциала  $\mu$ . В отличие от предыдущих работ на эту тему [14, 15] мы обнаружили более богатую фазовую структуру модели, а также киральные фазовые переходы как первого, так и второго рода в зависимости от значений исходных параметров (более подробное обсуждение результатов содержится в заключительном разделе).

## 2. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ПРИ $\mu = 0$

Вначале мы напомним уже известные свойства модели при нулевом значении химического потенциала  $\mu$ . Для исследования свойств вакуума модели Намбу–Йона-Лазинию удобно использовать вместо лагранжиана (1) вспомогательный лагранжиан

$$\bar{L} = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} (\sigma_1 + i \gamma_5 \sigma_2) \psi - \frac{N}{2G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (6)$$

(здесь для простоты опущен индекс  $k$ , нумерующий ферми-поля). Этот вспомогательный лагранжиан для уравнений движения для полей  $\sigma_{1,2}$  эквивалентен исходному лагранжиану теории (1).

Эффективное действие исследуемой модели в главном порядке разложения по параметру  $1/N$  определяется следующим образом:

$$\exp(i S_{eff}(\sigma_{1,2})) = \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i \int \bar{L} d^4x\right),$$

где

$$\frac{1}{N} S_{eff}(\sigma_{1,2}) = - \int d^4x \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2G} - i \ln \det\left(i \hat{\partial} - \sigma_1 - i \gamma_5 \sigma_2\right). \quad (7)$$

Полагая здесь поля  $\sigma_{1,2}$  не зависящими от координат пространства-времени, имеем по определению

$$S_{eff}(\sigma_{1,2}) = -V_{eff}(\sigma_{1,2}) \int d^4x, \quad (8)$$

$$\frac{1}{N} V_{eff}(\sigma_{1,2}) = \frac{\Sigma^2}{2G} + 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\Sigma^2 - p^2) \equiv \frac{1}{N} V_0(\Sigma), \quad (9)$$

где  $\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . Переходя в (9) к евклидовой метрике ( $p_0 \rightarrow ip_0$ ) и вводя лоренц-инвариантное обрезание области интегрирования ( $p^2 \leq \Lambda^2$ ), получаем

$$\frac{1}{N} V_0(\Sigma) = \frac{\Sigma^2}{2G} - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln\left(1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2}\right) + \Lambda^2 \Sigma^2 - \Sigma^4 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right) \right\}. \quad (10)$$

Уравнение стационарности для функции (10) имеет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial V_0(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0, \quad \frac{\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right) \right\} \equiv \frac{\Sigma}{4\pi^2} F(\Sigma) = 0. \quad (11)$$

Отсюда видно, что при  $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$  уравнение (11) не имеет решений, кроме  $\Sigma = 0$ , т. е. фермионы безмассовы и киральная инвариантность (2) не нарушена.

Если  $G > G_c$ , то у (11) появляется одно нетривиальное решение  $\Sigma_0(G, \Lambda) \neq 0$  такое, что  $F(\Sigma_0) = 0$ . При этом из (11) следует, что при  $0 \leq \Sigma < \Sigma_0$  производная функции  $V_0(\Sigma)$  отрицательна, а при  $\Sigma > \Sigma_0$  положительна. Следовательно, в точке  $\Sigma_0 \neq 0$  потенциал  $V_0(\Sigma)$  имеет глобальный минимум, что означает спонтанное нарушение киральной инвариантности модели и появление у фермионов массы, равной

$$M \equiv \Sigma_0(G, \Lambda). \quad (12)$$

Очевидно, что величина фермионной массы зависит от константы связи  $G$  и параметра обрезания  $\Lambda$ .

В дальнейшем при  $G > G_c$  в качестве независимого параметра теории вместо  $G$  мы будем использовать массу ферми-частиц  $M$  (12). В этом случае с помощью уравнения стационарности (11) можно выразить константу  $G$  в терминах  $H$  и  $\Lambda$ , а для  $V_0(\Sigma)$  получить эквивалентное выражение

$$\frac{16\pi^2}{N} V_0(\Sigma) = \Sigma^2 \Lambda^2 - 2\Sigma^2 M^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) - \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2} \right) + \Sigma^4 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right). \quad (13)$$

Еще раз отметим, что при всех значениях  $G > 0$  эффективным потенциалом модели является функция (10). Однако в фазе со спонтанным нарушением киральной симметрии (т. е. при  $G > G_c$ ) для  $V_{eff}$  можно использовать выражение (13). При этом масса фермионов  $M$  считается свободным параметром, а константу  $G$  можно найти из равенства  $F(M) = 0$  (функция  $F(x)$  представлена в (11)).

### 3. УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Временно предположим, что вместе с химическим потенциалом  $\mu$  на систему, описываемую лагранжианом Намбу-Йона-Лазинио (1), воздействует термостат с температурой  $T$ . В этом случае, для того чтобы получить эффективный потенциал  $V_{\mu T}(\Sigma)$ , в (9) необходимо произвести следующее преобразование меры интегрирования:

$$\int \frac{dh_0}{2\pi} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \quad p_0 \rightarrow i\pi T(2n+1) + \mu.$$

После суммирования в полученном выражении по  $n$ , т. е. по частотам Мацубары, получаем эффективный потенциал при  $T$ ,  $\mu \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V_{\mu T}(\Sigma) = & \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - 2T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left\{ \left| 1 + \exp \left( -\beta \left( \sqrt{\Sigma^2 + \mathbf{p}^2} + \mu \right) \right) \right| \times \right. \\ & \left. \times \left| 1 + \exp \left( -\beta \left( \sqrt{\Sigma^2 + \mathbf{p}^2} - \mu \right) \right) \right| \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\beta = 1/T$ , а  $V_0(\Sigma)$  представлен в (10)–(13). Устремим теперь в (14)  $T$  к нулю:

$$\frac{1}{N} V_{\mu}(\Sigma) = \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + \mathbf{p}^2} \right) \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + \mathbf{p}^2} \right). \quad (15)$$

Это выражение, которое есть эффективный потенциал модели Намбу-Йона-Лазинио при ненулевом химическом потенциале, далее мы будем исследовать на глобальный

минимум, для того чтобы получить фазовую структуру модели, а значит, и свойства вакуума в зависимости от значений  $\mu, M, \Lambda$ . Однако прежде чем приступить к этому, проинтегрируем в (15) по импульсным переменным:

$$\frac{1}{N} V_{\mu}(\Sigma) = \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - \frac{\theta(\mu - \Sigma)}{16\pi^2} \left\{ \frac{10}{3} \mu(\mu^2 - \Sigma^2)^{3/2} - 2\mu^3 \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} + \right. \\ \left. + \Sigma^4 \ln \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2}{\Sigma^2} \right\}. \tag{16}$$

Начиная с этой формулы, далее в статье предполагается, что  $\Sigma \geq 0$ . Это ограничение не приводит к потере общности рассмотрения, так как функция (15) четная по переменной  $\Sigma$ .

Уравнение стационарности для функции  $V_{\mu}(\Sigma)$  имеет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial V_{\mu}(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln \left[ 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right] + \right. \\ \left. + \theta(\mu - \Sigma) \left[ 2\mu \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} - 2\Sigma^2 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2}}{\Sigma} \right] \right\}. \tag{17}$$

Пусть  $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$ . В этом случае при  $\Sigma > \mu$  уравнение (17) по виду совпадает с уравнением стационарности (11) при  $\mu = 0$  и, следовательно, не имеет решений. Если  $\Sigma < \mu$ , то (17) сводится к уравнению

$$\frac{\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln \left[ 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right] + 2\mu \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} - 2\Sigma^2 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2}}{\Sigma} \right\} = 0, \tag{18}$$

которое, как нетрудно видеть, кроме  $\Sigma = 0$  не имеет других решений.

Таким образом, при значениях константы связи  $G$  меньших чем  $G_c$  теория Намбу-Йона-Лазинио находится в безмассовой кирально симметричной фазе независимо от величины химического потенциала  $\mu \geq 0$ .

#### 4. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ПРИ $G > G_c$ и $\mu > 0$

В этом разделе мы рассмотрим фазовую структуру модели Намбу-Йона-Лазинио при  $\mu \neq 0$  и  $G > G_c$ . Как уже отмечалось в разд. 2, в этом случае значения константы  $G$  и динамически возникающей массы фермиона  $M$  связаны между собой взаимно однозначным образом, а именно

$$\frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 = -M^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right). \tag{19}$$

Возьмем множество, состоящее из всех пар неотрицательных значений параметров  $(\mu, M)$ . Наша задача — для каждого элемента этого множества указать фазу, в которой находится модель Намбу-Йона-Лазинио.

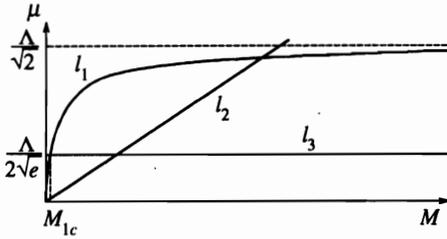


Рис. 1

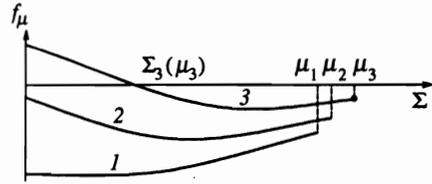


Рис. 2

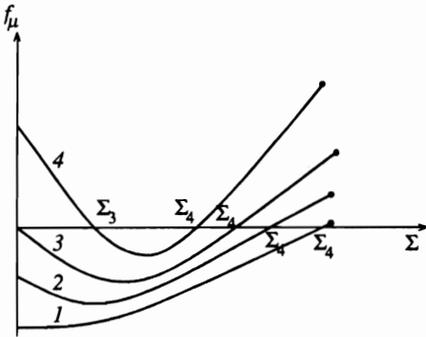


Рис. 3

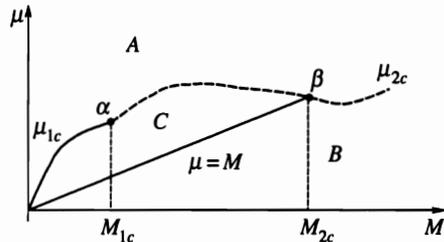


Рис. 4

А) Пусть  $\mu < M$ .

Исследуем уравнение стационарности (17) в этом случае. Очевидно, что при  $\Sigma > \mu$  оно имеет решение  $\Sigma_1 = M$ . Если  $\Sigma < \mu$ , то (17) примет вид

$$\Sigma f_\mu(\Sigma) \equiv \Sigma \left\{ 2\mu\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} - M^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \Sigma^2 \ln \frac{\Sigma^2 + \Lambda^2}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2} \right\} = 0. \quad (20)$$

Областью определения функции  $f_\mu(\Sigma)$  является интервал  $\Sigma \in (0, \mu)$ , на рис. 1 изображены три кривые  $l_1, l_2, l_3$ :

$$\begin{aligned} l_1: \quad \mu &= \left[ \frac{M^2}{2} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right]^{1/2} \equiv \mu_{1c}(M), \\ l_2: \quad \mu &= M, \\ l_3: \quad \mu &= \frac{\Lambda}{2\sqrt{e}}. \end{aligned} \quad (21)$$

На кривых  $l_1$  и  $l_2$  величины  $f_\mu(0)$  и  $f_\mu(\mu)$  соответственно обращаются в нуль, а на кривой  $l_3$  обращается в нуль функция  $\varphi_\mu(\Sigma)$  (см. формулу (II.5) из Приложения) в точке  $\Sigma = 0$ . Эти, а также другие свойства функции  $f_\mu(\Sigma)$  представлены в Приложении, откуда следует, что если точка  $(\mu, M)$  лежит под кривыми  $l_1$  и  $l_2$ , то  $f_\mu(\Sigma)$ , как

функция  $\Sigma$ , отрицательна на интервале  $(0, \mu)$ . Эта ситуация отражена на рис. 2 двумя различными графиками функции  $f_\mu(\Sigma)$ , а именно: кривая 1 соответствует значениям химического потенциала  $\mu < \Lambda/2\sqrt{e}$ , а для кривой 2 имеем  $\mu > \Lambda/2\sqrt{e}$ . Следовательно, в этом случае уравнение (20) имеет только тривиальное решение  $\Sigma_2 = 0$ . Если точка  $(\mu, M)$  находится под  $l_2$ , но выше кривой  $l_1$ , то уравнение  $f_\mu(\Sigma) = 0$  будет иметь единственное решение  $\Sigma_3(\mu)$  (см. кривую 3 на рис. 2, которая качественно изображает поведение функции  $f_\mu(\Sigma)$  в этом случае). Однако в  $\Sigma_3(\mu)$  эффективный потенциал  $V_\mu(\Sigma)$  принимает значение большее, чем в точке  $\Sigma_2 = 0$  (это следует из положительности  $f_\mu(\Sigma)$  на интервале  $(0, \Sigma_3(\mu))$ , т. е. положительности производной  $dV_\mu(\Sigma)/d\Sigma$  и монотонного возрастания функции  $V_\mu(\Sigma)$  на этом же интервале).

Таким образом, при  $\mu < M$  глобальный минимум эффективного потенциала находится в одной из двух точек  $\Sigma_1 = M$  и  $\Sigma_2 = 0$ . Первая из них соответствует массивной фазе. Граница раздела фаз при  $\mu < M$  определяется уравнением

$$V_\mu(0) = V_\mu(M). \tag{22}$$

На рис. 4 она изображена в виде критической кривой  $\mu = \mu_{2c}(M)$ , которую нетрудно с помощью (13), (16) и (22) представить в аналитическом виде:

$$\mu_{2c}(M) = \left[ \frac{3}{4} \left( M^4 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) - M^2 \Lambda^2 \right) \right]^{1/4} \tag{23}$$

для всех  $M \geq M_{2c}$  ( $\mu_{2c}(M_{2c}) = M_{2c}$ ), где

$$M_{2c} = \Lambda / \sqrt{4.895676}. \tag{24}$$

При переходе через критическую кривую  $\mu_{2c}(M)$  в теории происходит фазовый переход первого рода из массивной фазы в безмассовую и наоборот, так как здесь параметр порядка (масса фермионов) скачком меняет свое значение.

Б) Пусть  $\mu > M$ .

В этом случае, очевидно, при  $\Sigma > \mu$  уравнение стационарности (17) не имеет решений. Если  $\Sigma < \mu$ , то (17) сводится к (20) и имеет явное решение  $\Sigma_2 = 0$ . Предположим теперь, что точка  $(\mu, M)$  находится между кривыми  $l_1$  и  $l_2$  (см. рис. 1) и, кроме того,  $M < M_{1c}$ , где  $M_{1c}$  — точка пересечения  $l_1$  и  $l_3$  (18).  $M_{1c}$  есть корень уравнения

$$\frac{M_{1c}^2}{2} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M_{1c}^2} \right) = \frac{\Lambda^2}{4e}. \tag{25}$$

С учетом результатов Приложения очевидно, что для таких точек  $(\mu, M)$  функция  $f_\mu(\Sigma)$  монотонно возрастает на интервале  $(0, \mu)$  и имеет единственный нуль  $\Sigma_4(\mu, M)$ , в котором и будет располагаться глобальный минимум потенциала  $V_\mu(\Sigma)$ . На рис. 3 этому случаю соответствует кривая 1. Дело в том, что  $\Sigma_2 = 0$  в этом случае является точкой локального минимума потенциала, так как для всех  $\Sigma \in (0, \Sigma_4(\mu, M))$  производная функции  $V_\mu(\Sigma)$  по переменной  $\Sigma$  отрицательна и, следовательно, на этом интервале  $V_\mu(\Sigma)$  — убывающая функция, т. е.  $V_\mu(0) > V_\mu(\Sigma_4(\mu, M))$ . Решение  $\Sigma_4(\mu, M)$  обладает следующими свойствами (при  $0 < M < M_{1c}$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\mu, M) &\rightarrow M, & \text{если } (\mu, M) &\rightarrow l_2, \\ \Sigma_4(\mu, M) &\rightarrow 0, & \text{если } (\mu, M) &\rightarrow l_1. \end{aligned} \tag{26}$$

В случае, когда точка  $(\mu, M)$  находится выше кривой  $l_1$  (при  $0 < M < M_{1c}$ ), уравнения стационарности (17) и (20) будут иметь единственное решение  $\Sigma_2 = 0$ , в котором у потенциала  $V_\mu(\Sigma)$  глобальный минимум.

Таким образом, в данной области изменения параметров  $\mu$  и  $M$  (т.е. при  $\mu > M$  и  $M < M_{1c}$ ) кривая  $l_1$  является критической кривой фазовых переходов второго рода в силу того, что на  $l_1$  параметр порядка является непрерывной функцией переменных  $\mu$  и  $M$  (см. (26)). Под кривой  $l_1$  находится область, соответствующая массивной фазе, над ней — безмассовой; аналитическое выражение, связывающее значение химического потенциала  $\mu$  и  $M$  на  $l_1$ , дано в формуле (21).

Предположим теперь, что мы находимся в области, где  $\mu > M$  и  $M > M_{1c}$ . Здесь также  $\Sigma_2 = 0$  является решением уравнений стационарности (17), (20), а  $\Sigma_1 = M$  не является их решением. В этом случае поведение функции  $f_\mu(\Sigma)$  сильно зависит от того, где лежит точка  $(\mu, M)$ . Если она находится под кривой  $l_3$  (см. рис. 1), то график функции  $f_\mu(\Sigma)$  выглядит как кривая 1 на рис. 3; если  $(\mu, M)$  располагается выше  $l_3$ , но ниже  $l_1$ , то  $f_\mu(\Sigma)$  соответствует кривая 2 на рис. 3. Для  $(\mu, M) \in l_1$  кривая  $f_\mu(\Sigma)$  имеет вид 3, наконец, для  $(\mu, M)$ , лежащих выше, но «вблизи» от  $l_1$ , поведение  $f_\mu(\Sigma)$  качественно описывается линией 4 на рис. 3. Для еще больших значений химического потенциала функция  $f_\mu(\Sigma)$  строго больше нуля на своей области определения  $\Sigma \in (0, \mu)$ , поэтому единственное решение  $\Sigma_2 = 0$  уравнения (20) в этом случае соответствует безмассовой симметричной фазе модели.

С помощью рис. 3 можно сделать следующие выводы (напомним, что  $\mu > M$  и  $M > M_{1c}$ ). Для точек, расположенных не выше  $l_1$  (см. рис. 1), соответствующее уравнение стационарности (20) имеет единственное нетривиальное решение  $\Sigma_4(\mu, M) \neq 0$  (на рис. 3 это точки пересечения кривых 1–3 с осью  $\Sigma$ ), в котором, очевидно, у потенциала находится глобальный минимум. Здесь располагается фаза модели с массивными фермионами массы  $\Sigma_4(\mu, M)$ .

В случае, когда  $(\mu, M)$  лежит выше кривой  $l_1$ , график функции  $f_\mu(\Sigma)$  может пересекать ось  $\Sigma$  (см. рис. 3) дополнительно к  $\Sigma_4$  еще в одной точке  $\Sigma_3(\mu)$ , в которой у потенциала  $V_\mu(\Sigma)$  — точка локального максимума (похожая ситуация обсуждалась нами в пункте А).

Таким образом, в исследуемой области параметров  $\mu$  и  $M$  точкой абсолютного минимума потенциала может быть либо  $\Sigma_2 = 0$ , либо  $\Sigma_4(\mu, M)$  (последняя является таким решением (20), которое при  $\mu \rightarrow M$  совпадает с  $M$ ), а граница между фазами  $\mu = \mu_{3c}(M)$  определяется из уравнения

$$V_\mu(0) = V_\mu(\Sigma_4(\mu, M)). \quad (27)$$

Из предыдущего обсуждения следует, что линия  $\mu = \mu_{3c}(M)$  располагается не ниже  $l_1$ . (Кривая  $l_1$  при  $\mu > M$  и  $M > M_{1c}$  вероятнее всего перестает быть критической кривой, т.е. границей между массивной и безмассовой фазами, как в случае  $\mu > M_{1c}$ . Если же на  $l_1$  все-таки и происходят фазовые переходы, то только первого рода, так как на  $l_1$  параметр порядка  $\Sigma_4(\mu, M) \neq 0$  в этом случае будет разрывной функцией переменных  $\mu$  и  $M$ .) Кроме того, очевидно, что

$$\begin{aligned} \mu_{3c}(M_{1c}) &= \mu_{1c}(M_{1c}) = \Lambda/2\sqrt{e}, \\ \mu_{3c}(M_{2c}) &= \mu_{2c}(M_{2c}) = M_{2c} = \Lambda/\sqrt{4.89}. \end{aligned}$$

и критическая кривая  $\mu_{3c}(M)$  является кривой фазовых переходов первого рода. Результаты этого раздела представлены на рис. 4, где нанесены критические кривые второго

$(-\mu_{1c} \equiv l_1)$  и первого  $(\mu_{2c}, \mu_{3c})$  родов, отделяющие безмассовую симметричную фазу *A* модели Намбу-Йона-Лазинио от области переменных  $(\mu, M)$ , соответствующей массивному состоянию модели. При этом мы фактически показали, что точка  $\alpha$  на рис. 4 является трикритической точкой, поскольку в сколь угодно малой ее окрестности есть фазовые переходы как второго, так и первого родов.

### 5. НОВАЯ ФАЗА МОДЕЛИ НАМБУ-ЙОНА-ЛАЗИНИО

В этом разделе мы покажем, что в массивном состоянии модель Намбу-Йона-Лазинио может существовать в двух различных фазах. На рис. 4 буквой *B* обозначена область, в которой фермионы имеют массу  $M$ , а в области *C* их масса равна  $\Sigma_4(\mu, M)$ , причем на линии, разделяющей области *B* и *C*, т. е. при  $\mu = M$ , масса фермионов — непрерывная функция параметров  $\mu$  и  $M$  в силу того, что  $\Sigma_4(M, M) = M$ .

Мы хотим показать, что линия  $\mu = M$  является на самом деле границей между двумя различными фазами. Как известно [18], критерием фазового перехода является наличие скачка какой-нибудь частной производной одного из термодинамических потенциалов системы на границе раздела фаз. В нашем случае удобнее всего использовать термодинамический потенциал  $\Omega(\mu)$ , который представляет собой значение эффективного потенциала модели в точке глобального минимума. Из (13)–(16) следует, что в области *B*

$$\Omega_B(\mu) = V_\mu(M) = V_0(M) = \frac{N}{16\pi^2} \left\{ M^4 - M^4 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) - \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{M^2}{\Lambda^2} \right) \right\}. \quad (28)$$

Ясно, что  $\Omega_B$  не зависит от  $\mu$ , поэтому все его производные по  $\mu$  тождественно равны нулю в области *B*, а также на ее границе  $\mu = M$ .

В области *C* термодинамический потенциал модели равен значению эффективного потенциала (16) в точке  $\Sigma_4(\mu, M)$ , которая является решением уравнения (20) и обладает свойством  $\Sigma_4(M, M) = M$ , т. е.

$$\Omega_C(\mu) = V_\mu(\Sigma_4(\mu, M)). \quad (29)$$

Очевидно, что  $\Omega_B(M) = \Omega_C(M)$ . Найдем первую производную функции  $\Omega_C(\mu)$ :

$$\frac{d\Omega_C(\mu)}{d\mu} = \left\{ \frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial \mu} + \frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} \right\} \Bigg|_{\Sigma=\Sigma_4(\mu, M)}. \quad (30)$$

Так как  $\Sigma_4$  (в дальнейшем мы часто будем пользоваться сокращенным обозначением  $\Sigma_4 = \Sigma_4(\mu, M)$ ) является решением уравнения стационарности (20), второе слагаемое в фигурных скобках в (30) обращается в нуль. При этом, с учетом (16), получаем

$$\frac{d\Omega_C(\mu)}{d\mu} = \frac{\partial V_\mu(\Sigma)}{\partial \mu} \Bigg|_{\Sigma=\Sigma_4} = \frac{N}{3\pi^2} (\mu^2 - \Sigma_4^2)^{3/2}. \quad (31)$$

При  $\mu \rightarrow M_+$ , т. е. на кривой  $\mu = M$ , выражение (31) обращается в нуль, так как здесь  $\Sigma_4 \rightarrow M$ , а значит первая производная термодинамического потенциала модели на этой кривой — непрерывная функция. Для вычисления производных более высокого порядка от  $\Omega_C(\mu)$  нам понадобятся следующие соотношения для производных функции

$\Sigma_4(\mu, M)$ , которые нетрудно получить из уравнения (20), задающего в неявном виде  $\Sigma_4$  как функцию параметра  $\mu$ :

$$\frac{d\Sigma_4}{d\mu} \equiv \Sigma'_4 = \left. \left\{ \frac{\partial f_\mu(\Sigma)}{\partial \mu} \left[ \frac{\partial f_\mu(\Sigma)}{\partial \Sigma} \right]^{-1} \right\} \right|_{\Sigma=\Sigma_4} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2}}{\Sigma_4 \left\{ \ln \left[ \frac{(\Sigma_4^2 + \Lambda^2)}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2})^2} \right] - \Lambda^2 / (\Sigma_4^2 + \Lambda^2) \right\}}, \quad (32)$$

$$\frac{d^2\Sigma_4}{d\mu^2} \equiv \Sigma''_4 = -\frac{2(\mu - \Sigma_4\Sigma'_4)}{\Sigma_4\sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2}\{\dots\}} + O(\mu^2 - \Sigma_4^2), \quad (33)$$

где подразумевается, что в фигурных скобках в (33) стоит то же выражение, что и в фигурных скобках в (30). Очевидно, что  $\Sigma'_4 \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow M$ , однако вторая производная  $\Sigma''_4$  при  $\mu \rightarrow M$  обращается в  $-\infty$ . Найдем теперь вторую и третью производные потенциала  $\Omega_C(\mu)$ . С учетом (32) и (33) из (31) нетрудно получить

$$\frac{d^2\Omega_C(\mu)}{d\mu^2} = -\frac{N}{\pi^2} \sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2} (\mu - \Sigma_4\Sigma'_4), \quad (34)$$

$$\frac{d^3\Omega_C(\mu)}{d\mu^3} = -\frac{N}{\pi^2} \frac{(\mu - \Sigma_4\Sigma'_4)^2}{\sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2}} - \frac{N}{\pi^2} \sqrt{\mu^2 - \Sigma_4^2} (1 - (\Sigma'_4)^2 - \Sigma_4\Sigma''_4). \quad (35)$$

Выражение (34) при  $\mu \rightarrow M$  обращается в нуль, однако третья производная термодинамического потенциала при  $\mu \rightarrow M$ , как легко видеть из (35) и (33), становится бесконечно большой.

Таким образом, в точках линии  $\mu = M$  (при  $M < M_{2c}$ ) третья производная термодинамического потенциала  $\Omega(\mu)$  претерпевает скачкообразные изменения при переходе из области  $B$  в  $C$  и наоборот. Этот факт — строгое указание на то, что линия  $\mu = M$  является критической кривой фазовых переходов второго рода, т. е. области  $B$  и  $C$  на рис. 4 соответствуют различным массивным фазам модели Намбу-Йона-Лазинио. Основная физическая характеристика, по которой фазы  $B$  и  $C$  отличаются друг от друга, — это плотность числа частиц

$$n = -\partial\Omega(\mu)/\partial\mu. \quad (36)$$

Из (36) и (28) легко получить, что  $n_B = 0$  в фазе  $B$ . В фазе  $C$  (см. (31)) имеем

$$n_C = \frac{N}{3\pi^2} (\mu^2 - \Sigma_4^2(\mu, M))^{3/2} \neq 0. \quad (37)$$

На рис. 4 критические кривые фазовых переходов второго рода изображены сплошными линиями, а первого рода — штриховыми. Кроме того, из изложенного выше следует, что дополнительно к точке  $\alpha$  точка  $\beta$  на этом рисунке также является трикритической точкой точной модели, поскольку в сколь угодно малой ее окрестности могут происходить фазовые переходы как первого, так и второго рода.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой работе в главном порядке  $1/N$ -разложения исследована фазовая структура модели Намбу-Йона-Лазинио при ненулевых значениях химического потен-

циала. Основные результаты представлены на рис. 4, где изображена фазовая диаграмма модели, детальное изучение которой осуществлено в настоящей статье.

Ранее считалось, что состояние теории Намбу–Йона–Лазинио с массивными фермионами представляет единую фазу со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Проведенное рассмотрение продемонстрировало возможность возникновения более сложной ситуации в данной модели. Возможно, что такие ситуации можно будет сопоставить с конкретными физическими реализациями и связать с наблюдаемыми эффектами (например, высокотемпературной сверхпроводимостью), которые описываются на основе этой модели. Однако здесь необходимо проявлять известную долю скептицизма и осторожности, поскольку данная модель не охватывает многих эффектов, характерных для этого явления. Ранее предполагалось, что переход из массивной в безмассовую фазу — переход второго рода [14], это сразу приводило к уравнению для критической кривой  $f_\mu(0) = 0$ , т. е. к выражению  $\mu = \mu_{1c}(M)$  (21) для всех значений масс  $M$ . Мы показали, что эта кривая  $\{l_1 : \mu = \mu_{1c}(M)\}$  является границей фаз только при достаточно малых  $M < M_{1c}$  (см. (25)). При  $M > M_{1c}$  восстановление киральной инвариантности происходит через фазовые переходы первого рода на кривых  $\mu_{2c}(M)$  и  $\mu_{3c}(M)$ , которые отличны от  $\mu_{1c}(M)$ .

Нами также показано, что у рассматриваемой модели существуют две массивные фазы  $B$  и  $C$  (см. рис. 4), переход между которыми — фазовый переход первого рода. Для сравнения укажем, что в отличие от четырехмерного случая фазовые диаграммы четырехфермионных моделей в двух- ( $D = 2$ ) и трехмерных ( $D = 3$ ) пространствах совсем не содержат фазу  $C$ . (Возможно, что в данной модели проявляется один из эффектов, связанных с размерностью пространства, и если принять во внимание попытку некоторых теоретиков связать эффект высокотемпературной сверхпроводимости с объемными свойствами материалов, то такая возможность оказывается не запрещенной.) Заметим, что в модели Гросса–Невье при  $D = 2$  фазы  $A$  и  $B$  разделяются критической кривой фазовых переходов первого рода  $\mu = M/\sqrt{2}$  [19], а при  $D = 3$  линия фазовых переходов первого рода  $\mu = M$  является также границей между фазами  $A$  и  $B$  [20].

Наконец, важно отметить, что существование трикритических точек  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 4) на фазовой диаграмме  $(\mu, M)$  модели Намбу–Йона–Лазинио — абсолютно новый результат, не имеющий аналогов в литературе.

Учитывая значимость данной модели не только для физики элементарных частиц, но и ее широкое использование в физике твердого тела, можно сказать, что проведенное нами рассмотрение может представить интерес для широкого круга физиков.

Авторы выражают признательность Д. Эберту, Р. Н. Фаустову и Н. О. Агасяну за полезные обсуждения, А. К. Клименко и В. А. Вшивцеву за проведение численных расчетов и подготовку рукописи к печати.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-037004-а).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем некоторые свойства функции  $f_\mu(\Sigma)$ , определенной в (17). Нетрудно видеть, что

$$f_\mu(0) = 2\mu^2 - M^2 \ln(1 + \Lambda^2/M^2), \tag{П.1}$$

$$f_\mu(\mu) = -M^2 \ln(1 + \Lambda^2/M^2) + \mu^2 \ln(1 + \Lambda^2/\mu^2), \tag{П.2}$$

$$\frac{d}{d\mu} [f_\mu(\Sigma)|_{\Sigma=0}] > 0, \quad \frac{d}{d\mu} [f_\mu(\Sigma)|_{\Sigma=\mu}] > 0. \quad (\text{П.3})$$

С учетом (П.3) очевидно, что  $f_\mu(\mu) = 0$  только при  $\mu = M$  (кривая  $l_2$  на рис. 1);  $f_\mu(\mu) < 0$ , если  $\mu < M$  и  $f_\mu(\mu) > 0$ , если  $\mu > M$ . Из (П.1) следует, что  $f_\mu(0) = 0$  на кривой  $l_1$  (см. рис. 1), на которой параметры  $\mu$  и  $M$  связаны соотношением (18):

$$\mu = \mu_{1c}(M) = \sqrt{\frac{1}{2}M^2 \ln(1 + \Lambda^2/M^2)}. \quad (\text{П.4})$$

Так как  $f_\mu(0)$  является монотонно возрастающей функцией параметра  $\mu$  (см. (П.3)), то для точек  $(\mu, M)$ , лежащих под кривой  $l_1$ ,  $f_\mu(0) < 0$  и  $f_\mu(0) > 0$  для  $\mu > \mu_{1c}$ .

Определим функцию  $\varphi_\mu(\Sigma)$  следующим образом:

$$\frac{df_\mu(\Sigma)}{d\Sigma} \equiv 2\Sigma\varphi_\mu(\Sigma) = 2\Sigma \left[ \ln \frac{\Sigma^2 + \Lambda^2}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2} - \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2 + \Lambda^2} \right]. \quad (\text{П.5})$$

Отсюда нетрудно видеть, что  $\varphi_\mu(0)$  — монотонно убывающая функция параметра  $\mu$ , которая только при  $\mu = \Lambda/2\sqrt{e}$  (кривая  $l_3$  на рис. 1) обращается в нуль. Из (П.5) очевидно также, что  $\varphi_\mu(\mu) > 0$  при всех значениях химического потенциала. Если  $\mu < \Lambda/2\sqrt{e}$ , то  $\varphi_\mu(0) > 0$  и  $\varphi_\mu(\Sigma) > 0$  для всех  $\Sigma \in (0, \mu)$ . Следовательно, в этой области параметра  $\mu$  функция  $f_\mu(\Sigma)$  является монотонно возрастающей по аргументу  $\Sigma$ . (Этому случаю соответствуют кривые 1 на рис. 2, 3.) Если точка  $(\mu, M)$  лежит над кривой  $l_3$ , то  $\varphi_\mu(0) < 0$ . Однако из (П.5) видно, что в этом случае существует точка  $\Sigma_0 \in (0, \mu)$ , в которой  $\varphi_\mu(\Sigma_0) = 0$ , а  $f_\mu(\Sigma)$  имеет абсолютный минимум (см. кривые 2, 3 на рис. 3).

## Литература

1. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345; **124**, 2461 (1961).
2. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **40**, 282; 1392 (1961); Б. А. Арбузов, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, ДАН СССР **139**, 345 (1961).
3. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
4. G. Semenoff and L. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **63**, 2633 (1989); N. Dorey and N. Mavromatos, Phys. Lett. B **250**, 107 (1990); A. Kovner and R. Rosenstein, Phys. Rev. B **42**, 4748 (1990); M. Carena, T. E. Clark, C. E. M. Wagner, Nucl. Phys. B **356**, 117 (1991).
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962).
6. Ю. А. Изюмов, УФН, **161**, 1 (1991).
7. В. Л. Гинзбург, К. Г. Максимов, СФХТ **5**, 1543 (1992).
8. А. С. Александров, А. Б. Кребс, УФН **162**, 1 (1992).
9. И. М. Лифшиц, *Избранные труды. Электронная теория металлов. Физика полимеров и биополимеров*, Наука, Москва (1994).
10. М. К. Волков, ЭЧАЯ **17**, 433 (1986); **24**, 81 (1993).
11. S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 974 (1976).
12. К. Г. Клименко, ТМФ **89**, 211 (1991); Z. Phys. C **54**, 323 (1992); А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, ТМФ **101**, 391 (1994); ЯФ **57**, 2260 (1994); Письма в ЖЭТФ **62**, 265 (1995); Nuovo Cim. A **107**, 439 (1994).

13. V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3499 (1994); R. R. Parwani, *Phys. Lett. B* **358**, 101 (1995).
14. S. Kawati and H. Miyata, *Phys. Rev. D* **23**, 3010 (1981); J. Fuch, *Z. Phys. C* **22**, 83 (1984).
15. V. Bernard, U. G. Meissner, and I. Zahel, *Phys. Rev. D* **36**, 829 (1987); Chr. V. Christov and K. Goeke, *Acta Phys. Pol. B* **22**, 187 (1991); D. Ebert, Yu. I. Kalinovsky, L. Munchow, and M. K. Volkov, *Int. J. Mod. Phys. A* **8**, 1295 (1993); T. Inagaki, T. Kuonto, and T. Muta, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 2241 (1995).
16. D. Ebert and M. K. Volkov, *ЯФ* **36**, 1265 (1982); *Z. Phys. C* **16**, 205 (1983); D. Ebert and H. Reinhardt, *Nucl. Phys. B* **271**, 188 (1986); D. Ebert and M. K. Volkov, *Phys. Lett. B* **272**, 86 (1991); S. P. Klevansky and R. H. Lemmer, *Phys. Rev. D* **39**, 3478 (1991); M. Faber, A. N. Ivanov, M. Nagy, and N. I. Troitskaya, *Mod. Phys. Lett. A* **8**, 335 (1993).
17. T. Inagaki, T. Muta, and S. D. Odintsov, *Mod. Phys. Lett. A* **8**, 2117 (1993); E. Elizalde, S. Lieseduarte, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **49**, 5551 (1994); *Phys. Lett. B* **347**, 33 (1995); D. K. Kim and I. G. Koh, *Phys. Rev. D* **51**, 4573 (1995).
18. И. П. Базаров, Э. В. Геворкян, П. П. Николаев, *Термодинамика и статистическая физика*, Изд-во МГУ, Москва (1986).
19. В. А. Осипов, В. К. Федянин, *ТМФ* **73**, 393 (1987); К. Г. Клименко, *ТМФ* **75**, 226 (1988).
20. К. Г. Клименко, *Z. Phys. C* **37**, 457 (1988).