ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 5, стр. 1869–1878

О ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ВИХРЯ АБРИКОСОВА В АНИЗОТРОПНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

И. М. Дубровский

Институт металлофизики Национальной академии наук Украины
252142, Киев, Украина

Поступила в редакцию 25 сентября 1996 г.

Показано, что в результате притяжения параллельных токов, образующих вихрь Абрикосова, при его изгибе удельная энергия на единицу длины понижается на величину, пропорциональную квадрату кривизны. Путем решения уравнения Лондонов в приближении, позволяющем учесть этот эффект, вычислена энергия вихря Абрикосова, имеющего форму винтовой линии, радиус и шаг которой значительно больше корреляционной длины, кривизна мала по сравнению с обратной лондоновской длиной и наклон к оси, совпадающей с направлением наибольшей энергии вихря, также мал. При достаточно большой анизотропии, характерной для ВТСП, энергия такого вихря Абрикосова оказывается меньше, чем прямолинейного. Обсуждаются некоторые следствия того, что вихри Абрикосова в ВТСП имеют геликоидальную форму, в частности, фазовый переход, нарушающий симметрию между вихрями Абрикосова, имеющими форму правого или левого винта, по отношению к магнитному полю.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] обсуждался вопрос о том, не является ли в одноосном анизотропном лондоновском сверхпроводнике геликоидальная конфигурация равновесной для вихря Абрикосова, направленного в среднем вдоль оси анизотропии, где его удельная энергия наибольшая. При этом учитывалось только то, что винтовая линия отклонена от ее среднего направления на постоянный угол θ. Тогда, как показано в [3], энергия геликоидального вихря Абрикосова на единицу длины вдоль среднего направления больше, чем прямолинейного. Действительно, в логарифмическом приближении [4] удельная энергия вихря Абрикосова, отклоненного от оси на малый угол, есть

$$\varepsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left[1 - \frac{\theta^2}{2}(1-\gamma^2)\right] \ln\kappa = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{2}(1-\gamma^2)\right] \ln\kappa. \tag{1}$$

Здесь Φ_0 — квант магнитного потока, λ — лондоновская длина в направлении оси анизотропии, $\gamma \leq 1$ — константа анизотропии (в изотропном случае $\gamma = 1$), $\kappa \gg 1$ — параметр Гинзбурга–Ландау. Относительное удлинение винтовой линии по сравнению с прямой равно $1 + \theta^2/2$. Тогда изменение энергии на единицу длины вдоль среднего направления при переходе от прямолинейного вихря Абрикосова к геликоидальному составляет

$$(1 + \frac{\theta^2}{2})\varepsilon - \varepsilon_0 \ln\kappa = \frac{\theta^2\gamma^2}{2}\varepsilon_0 \ln\kappa. \tag{2}$$

При этом, однако, возможно, что $\gamma^2 \ln\kappa \ll 1$ (например, для YBCO $\gamma = 1/8$, $\kappa = 50$), поэтому логарифмическое приближение может оказаться недостаточным, т. е. поправки к нему, хотя и малые, но по иному зависящие от положения и формы вихря Абрикосова и параметров сверхпроводника, могут существенно повлиять на результат. В [5] на основе достаточно общей модели вихрей Абрикосова вычислялись поправки к логарифмическому приближению для энергии прямолинейного наклонного вихря в анизотропном сверхпроводнике. В настоящей работе тот же подход будет применен для учета поправок к энергии вихря Абрикосова, связанных с изгибом его оси.

Вопрос о зависимости удельной энергии вихря Абрикосова от кривизны его оси не рассмотрен. Обычно предполагают, что такой зависимости нет, и увеличение энергии абрикосовского вихря при искривлении его оси с сохранением среднего направления связано только с удлинением. Де Жен [6] упоминает, что вихрь Абрикосова имеет «жесткую сердцевину», т. е., что удельная энергия возрастает при искривлении, но никак не обосновывает этого утверждения и нигде не использует его. Качественные соображения указывают на обратный эффект: искривление уменьшает удельную энергию вихря. Параллельные круговые токи, образующие абрикосовский вихрь, при изгибе сгущаются со стороны центра кривизны и разрежаются с противоположной. Поскольку сила притяжения параллельных токов обратно пропорциональна расстоянию, в результате изгиба энергия должна понижаться. Эти соображения могут быть подтверждены путем вычисления энергии кольцевого вихря Абрикосова в виде разложения по степеням кривизны (см. Приложение). При большом радиусе энергия взаимодействия диаметрально противоположных участков кольцевого вихря экспоненциально мала, поэтому зависимость от кривизны обусловлена только изгибом. Коэффициент при второй степени кривизны (при первой коэффициент — нуль), т. е. модуль изгиба вихря, оказывается отрицательным.

Винтовая линия имеет не только постоянный наклон к среднему направлению, но и постоянную кривизну. Отрицательная поправка к энергии вихря Абрикосова, связанная с кривизной, несущественно зависит от анизотропии, поэтому при малом значении γ может оказаться, что геликоидальная конфигурация абрикосовского вихря энергетически выгоднее прямолинейной.

Геликоидальная конфигурация вихрей Абрикосова рассматривалась также в работах [7–9] в связи с одновременным действием внешнего магнитного поля и транспортного тока на сверхпроводник. Однако оценка энергии геликоидального абрикосовского вихря в этих работах недостаточно точна для решения поставленного вопроса. Для более точного вычисления энергии определим модель геликоидального вихря в лондоновском сверхпроводнике. В случае, когда ось вихря Абрикосова — винтовая линия малой кривизны и малого наклона, это можно сделать, введя специальную систему криволинейных координат. Далее в этой системе координат найдем решение неоднородного уравнения Лондонов, определяющего магнитное поле вихря, в виде разложения по степеням кривизны и из него — энергию вихря Абрикосова.

2. ГЕЛИКОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Геликоидальные координаты можно рассматривать как результат деформации цилиндрических координат, ось которых превращена в винтовую линию. Пусть винтовая линия задана уравнениями в декартовых координатах:

$$x_\nu = a\cos\psi, \quad y_\nu = a\sin\psi, \quad z_\nu = b\psi, \quad \psi = \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Здесь l — длина дуги винтовой линии, отсчитанная от точки пересечения ее с плоскостью $z = 0$, a и b — параметры линии: a — радиус цилиндра, на котором она лежит, $2\pi b$ — шаг винта. Введем безразмерные цилиндрические координаты ρ, φ, ζ:

$$\rho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda}, \quad \zeta = \frac{z}{\lambda}, \tag{4}$$

а также безразмерные величины

$$\alpha = \lambda a/b^2, \quad \beta = b/\lambda. \tag{5}$$

Точка $\mathbf{r}_\nu$, в которой плоскость, проходящая через точку $\mathbf{r}$ перпендикулярно винтовой линии, пересекает эту линию, определяется уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu)\frac{d\mathbf{r}_\nu}{d\psi} = 0. \tag{6}$$

В переменных $\rho, \varphi, \zeta, \psi$ уравнение (6) имеет вид

$$\alpha\beta\rho\sin(\varphi - \psi) + \zeta - \beta\psi = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим условие однозначности решения этого уравнения относительно ψ при произвольных фиксированных $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \zeta < 2\pi\beta$. Все хорды синусоиды

$$y(\psi) = \alpha\beta\rho\sin(\varphi - \psi) + \zeta \tag{8}$$

имеют модуль углового коэффициента

$$\left|\frac{y_2 - y_1}{\psi_2 - \psi_1}\right| = \alpha\beta\rho\left|\frac{\sin(\varphi - \psi_2) - \sin(\varphi - \psi_1)}{\psi_2 - \psi_1}\right| \leq \alpha\beta\rho. \tag{9}$$

Следовательно, при $\alpha\rho < 1$ прямая $y(\psi) = \beta\psi$ имеет единственную точку пересечения с синусоидой, и условие единственности решения уравнения (7) есть

$$\rho < \alpha^{-1}. \tag{10}$$

В этой области пространства плоскости перпендикулярные винтовой линии можно считать координатными поверхностями $\psi = \text{const}$ новой криволинейной системы координат. Величину α в дальнейшем будем полагать малой, тогда область $\rho \geq \alpha^{-1}$, т. е. $\sqrt{x^2 + y^2} > \lambda\alpha^{-1}$, несущественна.

Поле магнитной индукции и энергия геликоидального вихря Абрикосова будут вычисляться в виде разложения по α с точностью до α^2. Будем также считать, что

$$\alpha\beta = a/b = \operatorname{tg}\theta \approx \theta \ll 1, \quad \alpha\beta^2 = a/\lambda < 1. \tag{11}$$

Тогда с той же точностью безразмерная кривизна есть

$$\lambda C = \frac{\lambda a}{a^2 + b^2} \approx \alpha. \tag{12}$$

В плоскости $\psi = \text{const}$ введем полярные координаты с центром в точке пересечения ее с винтовой линией. Тогда радиус $\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu|$ определяется уравнением

$$\tau^2 = \rho^2 - 2\alpha\beta^2\rho\cos(\varphi - \psi) + \alpha^2\beta^4 + \alpha^2\beta^2\rho^2\sin^2(\varphi - \psi). \tag{13}$$

Азимутальный угол ω будем отсчитывать от направления противоположного главной нормали к винтовой линии. Тогда

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\nu)d^2\mathbf{r}_\nu/d\psi^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\nu||d^2\mathbf{r}_\nu/d\psi^2|} = \frac{1}{\tau}\left[\rho\cos(\varphi-\psi)-\alpha\beta^2\right], \\ \sin\omega &= \frac{\rho}{\tau}\sin(\varphi-\psi)\sqrt{1-\alpha^2\beta^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

При выводе соотношений (14) использованы (7) и (13). Знак $\sin\omega$ определен тем, что он должен совпадать со знаком смешанного произведения

$$\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\nu)\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{d\psi^2}\right]\mathbf{z} = \rho\sin(\varphi-\psi), \tag{15}$$

где $\mathbf{z}$ — единичный вектор в направлении оси z. Решая уравнения (7), (13) и (14) в принятом приближении, получим выражение цилиндрических координат ρ, φ, ζ в области $\rho < \alpha^{-1}$, $0 \le \zeta < 2\pi\beta$, $0 \le \varphi < 2\pi$ через новые криволинейные координаты τ, ω, ψ:

$$\begin{aligned} \rho &= \tau + \alpha\beta^2\cos\omega + \frac{\alpha^2\beta^2}{2\tau}(\beta^2-\tau^2)\sin^2\omega, \\ \varphi &= \omega + \psi - \frac{\alpha\beta^2}{\tau}\sin\omega + \frac{\alpha^2\beta^4}{2\tau^2}\sin 2\omega - \frac{\alpha^2\beta^2}{4}\sin 2\omega, \\ \zeta &= \beta\psi - \alpha\beta\tau\sin\omega. \end{aligned} \tag{16}$$

Для использования в дальнейшем обозначений тензорного анализа введем индексы

$$\tau \to 1, \quad \omega \to 2, \quad \psi \to 3. \tag{17}$$

Фундаментальный тензор этой системы координат имеет вид

$$\begin{aligned} & g_{11} = 1, \quad g_{13} = g_{31} = g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \tau^2, \\ & g_{33} = \tau^2 + \beta^2 + 2\tau\alpha\beta^2\cos\omega + \alpha^2\beta^4 - \alpha^2\beta^2\tau^2\sin^2\omega, \\ & g_{23} = g_{32} = \tau^2 - \frac{\alpha^2\beta^2\tau^2}{2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, введенная система координат не является ортогональной, и в дальнейшем необходимо различать ковариантные и контрвариантные компоненты векторов.

Уравнения (3) описывают правую по отношению к направлению оси z винтовую линию. Поскольку в рассматриваемой задаче направление оси z выделено физически (оно совпадает с направлением среднего поля магнитной индукции вихря Абрикосова), следует различать правые и левые винтовые линии. Проделав все вышеизложенные вычисления для случая левовинтовой линии, можно убедиться, что это приведет к изменению знака компонент $g_{23} = g_{32}$ фундаментального тензора.

3. МОДЕЛЬ ГЕЛИКОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ АБРИКОСОВА И ЕГО ЭНЕРГИЯ

Поле магнитной индукции вихря Абрикосова при $\kappa \gg 1$ описывается уравнением

$$\mathbf{h} + \operatorname{rot}(\hat{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \Delta(\mathbf{R})\mathbf{n}(\mathbf{R}). \tag{19}$$

Здесь координаты измеряются в единицах λ, тензор $\hat{\mu}$ в главных осях имеет вид

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 1, \quad \mu_{33} = \gamma^{-2}, \tag{20}$$

за ось 3 принята ось анизотропии. Векторное поле $\Delta(\mathbf{R})\mathbf{n}(\mathbf{R})$ определяется полной системой уравнений Гинзбурга–Ландау. При $\kappa \gg 1$ для прямолинейного вихря Абрикосова оно параллельно его оси, сосредоточено в области размером порядка κ^{-1} вблизи оси, и поток его через плоскость перпендикулярную оси равен $2\pi\lambda^2$. Основное предположение предлагаемой модели следующее: если параметры винтовой линии таковы, что $a/\lambda = \alpha\beta^2 \gg \kappa^{-1}$ и $b/\lambda = \beta \gg \kappa^{-1}$, то структура ядра вихря Абрикосова не меняется, т. е. значение $\Delta(\mathbf{R})$ зависит только от τ, пренебрежимо мало́ при $\tau > \kappa^{-1}$, и при этом

$$\int_0^\infty \Delta(\tau)\tau\, d\tau = 1, \tag{21}$$

а вектор $\mathbf{n}(\mathbf{R})$ всюду перпендикулярен координатной поверхности $\psi = \mathrm{const}$ (плоскости) и по модулю равен единице. Тогда $\mathbf{n}(\mathbf{R})$ в геликоидальных координатах имеет только одну ковариантную компоненту

$$n_3 = \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \approx \beta\left(1 + \alpha\tau\cos\omega + \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\right). \tag{22}$$

Исходной формулой для вычисления удельной энергии геликоидального вихря Абрикосова на единицу длины вдоль среднего направления является

$$\varepsilon = \frac{\lambda^3}{16\pi^2 b} \int_V \left(\mathbf{h}^2 + \operatorname{rot}\mathbf{h} \cdot \hat{\mu} \operatorname{rot}\mathbf{h}\right) dV, \tag{23}$$

где V — объем слоя толщиной $2\pi b$, т. е. один виток винтовой линии. Интегрируя второе слагаемое по частям (см. [6]) и учитывая (19), получим

$$\varepsilon = \frac{\Phi_0}{32\pi^3\beta} \int_V \Delta(\tau)(\mathbf{nh})\, dV. \tag{24}$$

После подстановки выражения скалярного произведения через ковариантные компоненты векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{h}$ с использованием (18) и (22) и интегрирования по ψ выражение (24) приобретает вид

$$\varepsilon = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\beta} \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \Delta(\tau)\left[h_3 - \left(1 - \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\right) h_2\right] \tau d\tau d\omega. \tag{25}$$

Для интегрирования по τ, так же, как и в [5], воспользуемся тем, что произведение $\Delta(\tau)\tau$ имеет острый максимум вблизи $\tau = \kappa^{-1}$. Вынося остальные функции из-под интеграла по τ и учитывая (21), получим

$$\varepsilon = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\beta}\int\limits_0^{2\pi}\left[h_3(\kappa^{-1},\omega) - \left(1 - \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\right)h_2(\kappa^{-1},\omega)\right]d\omega. \tag{26}$$

Записывая уравнения (19) в виде уравнений для ковариантных компонент **h** и разлагая по степеням α, можно найти решение, имеющее вид

$$h_1(\tau,\omega) = \alpha h_1^{(1)}(\tau)\sin\omega,$$

$$h_2(\tau,\omega) = \alpha h_2^{(1)}(\tau)\cos\omega + \alpha^2\left[h_2^{(2)}(\tau) + \tilde{h}_2^{(2)}(\tau)\cos 2\omega\right], \tag{27}$$

$$h_3(\tau,\omega) = h_3^{(0)}(\tau) + \alpha h_3^{(1)}(\tau)\cos\omega + \alpha^2\left[h_3^{(2)}(\tau) + \tilde{h}_3^{(2)}(\tau)\cos 2\omega\right].$$

Подставляя (27) в (26) и интегрируя по ω, получим

$$\varepsilon = \frac{\Phi_0}{8\pi\beta}\left\{h_3^{(0)}(\kappa^{-1}) + \alpha^2\left[h_3^{(2)}(\kappa^{-1}) - h_2^{(2)}(\kappa^{-1})\right]\right\}. \tag{28}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для величин $h_i^{(m)}(\tau)$ значительно упрощается, если ввести функции

$$u^{(1)}(\tau) = \frac{d}{d\tau}h_2^{(1)} - h_1^{(1)}, \quad v^{(2)}(\tau) = h_3^{(2)} - h_2^{(2)}. \tag{29}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2h_3^{(0)}}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dh_3^{(0)}}{d\tau} - h_3^0 = -f,\\
&\frac{d^2u^{(1)}}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau}\frac{du^{(1)}}{d\tau} - \eta^2u^{(1)} = -\tau\frac{d}{d\tau}\left[(1-\eta^2)h_3^{(0)} - (1-\gamma^2)f\right],\\
&\frac{d^2h_3^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dh_3^{(1)}}{d\tau} - \delta^2h_3^{(1)} - \frac{h_3^{(1)}}{\tau^2} = \tau(h_3^{(0)} - f) - \frac{\tau}{\gamma^2}\frac{d^2h_3^{(0)}}{d\tau^2} +\\
&\quad + \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2\tau}u^{(1)} - \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\frac{du^{(1)}}{d\tau},\\
&\frac{d^2v^{(2)}}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dv^{(2)}}{d\tau} - v^{(2)} = \frac{1}{2\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\tau h_3^{(1)}\right) - \frac{\tau}{2}\frac{dh_3^{(0)}}{d\tau} - \frac{u^{(1)}}{2} +\\
&\quad + \beta^2\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\left(f - \frac{1}{2\tau}\frac{du^{(1)}}{d\tau} - \frac{h_3^{(0)}}{2}\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\Phi_0\beta}{2\pi\lambda^2}\Delta(\tau) = f, \quad \delta^2 = 1 + \beta^{-2}, \quad \eta = \gamma\delta. \tag{31}$$

Граничные условия для всех функций следующие: стремление к нулю при $\tau \to \infty$, конечность и непрерывность. Фундаментальные решения соответствующих однородных уравнений известны, правая часть первого уравнения — известная функция, а каждого последующего уравнения выражается через решения предыдущего. Поэтому решение системы (30) получить легко. После некоторых преобразований с помощью интегрирования по частям оно выражается через модифицированные функции Бесселя $I_n(\xi\tau)$ и $K_n(\xi\tau)$ и интегралы от них вида

$$L_n(\xi,\tau) = \int_0^\tau I_n(\xi x)\Delta(x)x^{n+1}dx,$$
$$M_n(\xi,\tau) = \int_\tau^\infty K_n(\xi x)\Delta(x)x^{n+1}dx. \tag{32}$$

Здесь ξ может приобретать значения γ, δ, η, а $n = 0, 1$. При подстановке этого решения в (28) для вычисления интегралов (32) можно снова воспользоваться тем, что зависимость $\tau\Delta(\tau)$ имеет острый максимум при $\tau = \kappa^{-1}$. При $\beta \gg \kappa^{-1}$ параметры δ и η не могут быть велики, $\gamma < 1$, поэтому для модифицированных функций Бесселя можно использовать приближенные выражения при малом аргументе. Учитывая также (21), получим окончательное выражение для энергии геликоидального вихря Абрикосова на единицу длины оси винтовой линии:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left\{\ln\frac{2\kappa}{e^C} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\left[\gamma^2\ln\frac{2\kappa}{e^C\gamma} + \frac{1}{2}(\beta^2-\gamma^2)\ln(1+\beta^{-2}) - \frac{1}{2}\right]\right\}, \tag{33}$$

где C — постоянная Эйлера.

Оценим вклад ε_n в энергию единицы длины вихря Абрикосова от уменьшения модуля параметра порядка в области радиусом $\lambda\kappa^{-1}$ вблизи линии вихря. Если допустить, что параметр порядка в этой области равен нулю, а вне ее — равновесному значению, то получим

$$\varepsilon_n \cong \left(\frac{\Phi_0}{8\pi\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0. \tag{34}$$

Это оценка сверху, на самом деле ε_n несколько меньше. Учитывая, что на единицу длины оси винтовой линии приходится $1+\alpha^2\beta^2/2$ длины линии вихря, в (33) следовало бы добавить слагаемое $(1+\alpha^2\beta^2/2)\varepsilon_0 d$, где $d < 1/4$. Это не изменит качественно выводы, следующие из (33).

4. ВЫВОДЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Из выражения (33) можно сделать вывод, что при любых $\gamma \le 1$ существует область значений β достаточно малых, чтобы энергия геликоидального вихря Абрикосова была меньше, чем прямолинейного. Необходимо, однако, принимать во внимание, что формула (33) была получена при предположении $\beta \gg \kappa^{-1}$. При $\gamma = 1$, например, второе слагаемое в (33) отрицательно при $\beta \le \kappa^{-1}$, поэтому для изотропного сверхпроводника такое заключение неправомерно. При $\gamma = 1/8$, $\kappa = 50$ геликоидальный вихрь Абрикосова энергетически выгоднее прямолинейного при $\beta < 1.4$.

Если не учитывать энергию изгиба, то энергия геликоидального вихря Абрикосова совпадает с энергией прямолинейного, наклоненного к оси анизотропии под углом $\theta = \alpha\beta$. Для вычисления ее из (33) необходимо устремить $\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$ при сохранении $\alpha\beta$. Результат совпадает с тем, который можно получить из соответствующей формулы в [5]. Эта энергия всегда больше энергии соответствующего прямолинейного вихря Абрикосова, направленного вдоль оси анизотропии, как и в [3]. Таким образом, возможность понижения энергии вихря Абрикосова при переходе к винтовой конфигурации можно увидеть только при учете отрицательной энергии изгиба.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что при достаточно сильной анизотропии прямолинейный вихрь Абрикосова, направленный вдоль оси анизотропии, неустойчив. Его истинная конфигурация должна находиться из решения соответствующей вариационной задачи, но формулировка такой задачи в настоящий момент неизвестна. Если индукция в среднем должна быть направлена вдоль оси анизотропии, то из соображений симметрии можно предположить, что устойчивая конфигурация должна быть геликоидальной. Чтобы найти значения ее параметров α и β, минимизирующие свободную энергию, необходимо вычислить $\varepsilon(\alpha, \beta)$ без использования теории возмущений по α. При отклонении среднего направления индукции от оси анизотропии равновесная конфигурация вихря Абрикосова должна быть другой. Возможно, это сближает результаты лондоновской анизотропной модели со ступенчатой моделью вихрей Абрикосова в слоистом сверхпроводнике, рассмотренной в [10].

Криволинейность осевой линии вихря Абрикосова может быть существенна для количественных расчетов его взаимодействия с различными неоднородностями сверхпроводника и с транспортным током, а значит, для механизмов пиннинга и проникновения вихря в сверхпроводник. С ней связаны также новые явления в системе вихрей Абрикосова. Как уже отмечалось, вихрь Абрикосова может быть левым или правым винтом по отношению к направлению магнитной индукции. В отсутствие транспортного тока вдоль направления индукции энергии левого и правого вихрей равны. Отталкивание разноименных вихрей Абрикосова должно быть сильнее, чем одноименных, поскольку одинаково направленные кольцевые вихри, лежащие в одной плоскости, притягиваются. Правый и левый вихри Абрикосова могут превращаться один в другой путем пробегания соответствующего топологического солитона. При малой плотности вихрей Абрикосова количество правых и левых должно быть одинаковым с точностью до флуктуаций, а с повышением плотности должен происходить фазовый переход со спонтанным нарушением симметрии правого и левого направлений. Управляющим полем для этого перехода является транспортный ток, коллинеарный магнитной индукции, так как он по-разному изменяет энергии правых и левых вихрей.

Решетка геликоидальных вихрей Абрикосова не может быть представлена как деформация решетки прямолинейных вихрей. При малой плотности вихрей Абрикосова по энергии взаимодействия и упругим свойствам такая решетка мало отличается от решетки прямолинейных, так как левые и правые вихри Абрикосова перемешаны случайно и энергия взаимодействия их круговых компонент убывает с расстоянием быстрее, чем прямолинейных. При фазовом переходе в упорядоченное состояние зависимость упругих модулей решетки от магнитного поля должна иметь особенность. В упорядоченной по направлению винта решетке энергия взаимодействия из-за притяжения круговых компонент геликоидальных вихрей Абрикосова меньше, чем в решетке прямолинейных вихрей такой же плотности. Другими будут также упругие свойства, в частности, по отношению к изгибу. Новых особенностей можно ожидать, когда постоянная решетки сравняется с радиусом винтовой линии. Перекрытие винтовых линий должно вести к усилению отталкивания, которое, возможно, компенсируется выпрямлением вихрей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Энергия кольцевого вихря Абрикосова большого радиуса R в изотропном сверхпроводнике может быть вычислена тем же методом, что и энергия геликоидального в основном тексте. Естественной системой координат при этом являются тороидальные координаты (см. [11]). Если ось цилиндрических координат r, φ, z проходит через центр окружности осевой линии вихря перпендикулярно ее плоскости, то эти координаты выражаются через тороидальные t, φ, ω:

$$r = R\frac{1-t^2}{1-2t\cos\omega+t^2}, \quad z = \frac{2Rt\sin\omega}{1-2t\cos\omega+t^2}. \tag{П.1}$$

Единственной компонентой поля индукции является $h_\varphi(t,\omega)$. Уравнение для функции $H(t,\omega) = h_\varphi\sqrt{r/R}$ имеет вид

$$H - \frac{\lambda^2}{4R^2t^2}(1-2t\cos\omega+t^2)^2\left[t^2\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + t\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial\omega^2} - \frac{3t^4}{(1-t^2)^2}H\right] =$$
$$= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\Delta\left(\frac{2R}{\lambda}t\right)n(t,\omega)\sqrt{\frac{r}{R}}, \tag{П.2}$$

где $\Delta(\tau)$ — та же функция, что и в основном тексте, а $n(t,\omega)$ определяется из условия равенства потока магнитной индукции через полуплоскость $\varphi = \text{const}$ кванту потока Φ_0. Малым параметром для решения этого уравнения является безразмерная кривизна $\alpha = \lambda/R$. Сделав в (П.2) замену переменной $t = \tau\alpha/2$, можно с помощью теории возмущений вычислить во втором приближении магнитную индукцию, а затем и энергию кольцевого вихря Абрикосова на единицу длины. Получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(\ln\frac{2\kappa}{e^C} - \frac{3}{8}\alpha^2\right). \tag{П.3}$$

Таким образом, модуль изгиба вихря Абрикосова в изотропном лондоновском сверхпроводнике отрицателен.

Литература

1. T. Koyama and M. Tachiki, Sol. St. Comm. **79**, 1949 (1991).
2. M. L. Kulič and A. Kramer, Sol. St. Comm. **82**, 537 (1992).
3. E. H. Brandt, Phys. Rev. Lett. **69**, 1105 (1992).
4. А. В. Балацкий, Л. И. Бурлачков, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **90**, 1478 (1986).
5. И. М. Дубровский, ЖЭТФ **111**, 954 (1997).
6. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968), с. 61.

7. Ю. А. Гененко, Письма в ЖЭТФ **59**, 807 (1994).
8. Yu. A. Genenko, Physica C **235–240**, 2709 (1994).
9. Yu. A. Genenko, J. Appl. Phys. **76**, 7144 (1994).
10. L. N. Bulaevskii, M. Ledvij, and V. G. Kogan, Phys. Rev. B **46**, 366 (1992).
11. Э. Маделунг, *Математический аппарат физики*, Физматгиз, Москва (1961), с. 279.