

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВУМЕРНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

А. Г. Грошев, С. Г. Новокшенов.

*Физико-технический институт
Уральского отделения Российской академии наук
426001, Ижевск, Россия*

Поступила в редакцию 8 августа 1996 г.

Предложено обобщение самосогласованной теории локализации Вольхардта-Вельфле, позволяющее учесть пространственную дисперсию кинетических коэффициентов двумерной неупорядоченной системы. Показано, что при $\omega \rightarrow 0$ основной вклад в сингулярную часть интеграла столкновений уравнения Бете-Солпитера вносит диффузионный полюс $i\omega = (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 D(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)$, обеспечивающий аномальный рост вероятности рассеяния назад $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}'$. В этом пределе зависимость коэффициента диффузии от q, ω имеет локализационный характер $D(q, \omega) = -i\omega f(l_D q)$, где $|f(z)| \leq f(0) = d^2$ (d — длина локализации). В соответствии с критерием Березинского-Горькова $D(q, 0) = 0$ при всех q . Пространственная дисперсия $D(q, \omega)$ проявляется на масштабе $q \propto 1/l_D$, где l_D — зависящая от частоты длина диффузии. В режиме локализации $l_D \ll l$ средней длины свободного пробега; при $\omega \rightarrow 0$ величина l_D убывает $\propto \omega$, что говорит о подавлении пространственной дисперсии коэффициента диффузии вплоть до атомных масштабов. В этих же условиях $\sigma(q, \omega)$ обнаруживает сильную зависимость от q на масштабе $q \propto 1/d$, т. е. радиус нелокальности электропроводности имеет порядок длины локализации d . Эти результаты подтверждают на микроскопическом уровне основные выводы работы [15], полученные в пределе $\omega \rightarrow 0$ до некоторой степени феноменологическим образом. Существенным продвижением по сравнению с [15] здесь является исследование пространственной дисперсии кинетических коэффициентов при конечных (а не бесконечно малых) частотах.

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние двадцать лет достигнут значительный прогресс в понимании явления андерсоновской локализации [1]. К настоящему времени эта область исследований превратилась в обширный раздел физики конденсированного состояния (см., например, [2–5]). Один из наиболее плодотворных подходов к изучению этой проблемы дает самосогласованная теория локализации Вольхардта-Вельфле [6–8]. В рамках этой теории получены результаты, подтверждающие гипотезу о полной локализации носителей заряда в двумерных неупорядоченных системах [6, 7]. Критическое поведение вблизи перехода Андерсона в системах с размерностью $d > 2$, предсказываемое теорией Вольхардта-Вельфле [8], согласуется с результатами, полученными в рамках теоретико-полевого [9] и скейлингового [4, 10] подходов к данной проблеме. Ее идеи лежат в основе микроскопической теории локализации при наличии внешнего магнитного поля [11, 12] и современной теории «грязных» сверхпроводников [5, 13, 14].

Одним из недостатков самосогласованной теории локализации в ее современной формулировке является невозможность последовательного учета пространственной дис-

персии кинетических коэффициентов. Дело в том, что основное уравнение этой теории устанавливает интегральную связь между локальным $D(\omega) = D(q = 0, \omega)$ и обобщенным $D(q, \omega)$ коэффициентами диффузии. Следуя Вольхардту и Вельфле [6], эту трудность обходят, заменяя всюду $D(q, \omega)$ на $D(\omega)$, т. е. предполагая, что в локализованной фазе пространственная дисперсия $D(q, \omega)$ незначительна. Следует отметить, что до последнего времени эта проблема практически не исследовалась [5]. Качественные оценки зависимости коэффициента диффузии от q $D(q, \omega \rightarrow 0)$, сделанные на основе скейлинговых соображений [4], приводят к противоречивым выводам и фактически разрушают структуру самосогласованной теории локализации.

В связи с этим возникает целый ряд проблем. 1. Возможен ли последовательный учет пространственной дисперсии кинетических коэффициентов в рамках самосогласованной теории локализации? 2. Как меняется ее характер при переходе от металлического режима к диэлектрическому? 3. Какие ограничения на область применимости теории Вольхардта–Вельфле накладывает пренебрежение пространственной дисперсией?

По-видимому, впервые эти проблемы серьезно обсуждались в недавно опубликованной работе [15], где был сделан вывод о том, что на масштабах $q \propto 1/d$ (здесь d — длина локализации) пространственная дисперсия коэффициента диффузии незначительна, а ее наличие при $q \propto 1/k_F$ (k_F — импульс Ферми) не влияет на критическое поведение вблизи перехода Андерсона. Фактически в [15] утверждается, что в достаточно малой окрестности порога подвижности (для систем с размерностью $d > 2$) теория Вольхардта–Вельфле становится асимптотически точной. Важным результатом работы [15] является доказательство того, что в соответствии с критерием Березинского–Горькова [16] в локализованной фазе $D(q, \omega = 0) \equiv 0$ при всех q .

В данной работе предлагается другой подход к решению сформулированных выше проблем, представляющий собой непосредственное обобщение теории локализации Вольхардта–Вельфле [6], позволяющее исследовать пространственно-временную дисперсию электропроводности $\sigma(q, \omega)$ и коэффициента диффузии $D(q, \omega)$ двумерной неупорядоченной системы в низкочастотном, $\omega \ll \mathcal{E}_F$ (\mathcal{E}_F — энергия Ферми), и длинноволновом, $q \ll k_F$, пределах. Полученные нами результаты согласуются с основными выводами работы [15] ($d > 2$). Кроме этого, наш подход позволяет найти явный вид низкочастотной и длинноволновой асимптотик кинетических коэффициентов в режиме локализации.

В дополнение к сказанному следует отметить, что учет пространственной дисперсии кинетических коэффициентов неупорядоченных систем необходим не только для обобщения или обоснования самосогласованной теории локализации, но и для решения некоторых практически интересных задач. Например, задачи о влиянии локализации носителей заряда на спектр длинноволновых «акустических» плазмонов, существующих в системах с квазидвумерным электронным газом [17].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерный вырожденный идеальный газ бесспиновых электронов, испытывающих упругое рассеяние на неподвижных примесях с концентрацией n_I , распределенных в образце по закону Пуассона. Одноэлектронный гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_R U(\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (1)$$

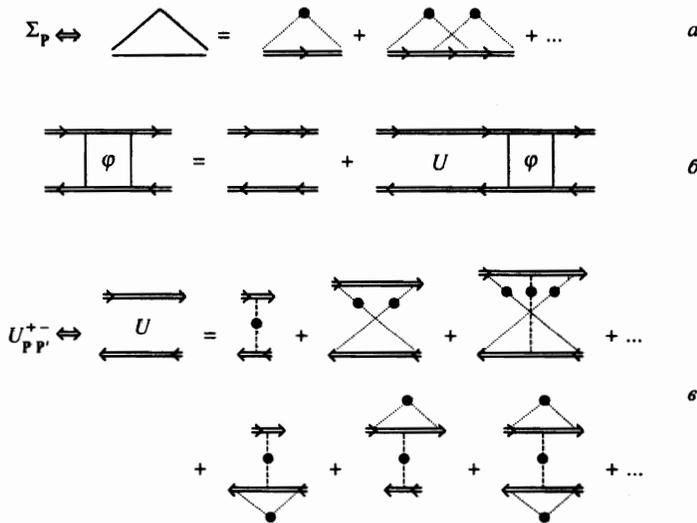


Рис. 1. Ряд одночастичных неприводимых диаграмм Эдвардса [18] для электронной собственно-энергетической части $\Sigma_p(\mathcal{E})$ (a); графическая форма уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции Грина (4) (б); ряд двухчастичных неприводимых диаграмм для вершины $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ (в). Здесь используются общепринятые правила соответствия между аналитическими выражениями для членов рядов теории возмущений и их графическим изображением

Здесь $U(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ — потенциал изолированной примеси, локализованной в точке R . Ниже он предполагается короткодействующим и аппроксимируется δ -образным $U(\mathbf{r}) = U_0\delta(\mathbf{r})$. Это является хорошим приближением при выполнении условия $r_0 \ll \lambda_F, l$, где r_0 — радиус действия потенциала $U(\mathbf{r})$, λ_F — длина волны де Бройля, l — длина свободного пробега электрона на уровне Ферми. Кроме этого, мы предполагаем, что рассеяние электрона на изолированной примеси является слабым и для вычисления его амплитуды достаточно первого борновского приближения.

В силу того, что рассматриваемая система в среднем пространственно однородна, усредненная одноэлектронная функция Грина диагональна в импульсном представлении

$$G_p^\pm(\mathcal{E}) = \langle \langle \mathbf{p} | R^\pm(\mathcal{E}) | \mathbf{p} \rangle \rangle_I = [\mathcal{E} - \mathcal{E}_p - \Sigma_p^\pm(\mathcal{E})]^{-1}, \quad (2)$$

где

$$R^\pm(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} - H \pm i\delta)^{-1}, \quad \delta \rightarrow +0 \quad (3)$$

— резольвента гамильтониана (1), скобки $\langle \rangle_I$ обозначают усреднение по распределению примесей, $\Sigma_p^\pm(\mathcal{E})$ — электронная собственно-энергетическая часть, которая на языке диаграмм эдвардсовского типа [18] определяется рядом, изображенным на рис. 1a. Информацию о кинетических свойствах системы содержат двухчастичные функции Грина

$$\varphi_{pp'}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}, \omega) = \langle R^\sigma(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}'_+; \mathcal{E}^+) R^{\sigma'}(\mathbf{p}'_-, \mathbf{p}_-; \mathcal{E}^-) \rangle_I, \quad (4)$$

$\sigma, \sigma' = \pm$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2$, $\mathcal{E}^\pm = \mathcal{E} \pm \omega/2$, $R^\pm(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathcal{E})$ — матричный элемент резольвенты (3) гамильтониана (1). Они удовлетворяют уравнению Бете–Солпитера, представленному на рис. 1б в графическом виде. Входящая в это уравнение вершина $U_{pp'}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}, \omega)$ определяется рядом неприводимых диаграмм, изображенным на рис. 1в.

Согласно современной теории необратимых процессов [19] кинетические коэффициенты выражаются через корреляционные функции Кубо. В низкочастотном и длинноволновом пределе ($\omega \ll \mathcal{E}_F, q \ll k_F$) для них справедливо следующее асимптотическое выражение ($l, m = 0, 1$):

$$K_{lm}(q, \omega) = - \int d\mathcal{E} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} \langle K_{lm}(\mathbf{q}, \omega) \rangle_I. \tag{5}$$

Здесь $f(\mathcal{E})$ — функция Ферми-Дирака,

$$\begin{aligned} \langle K_{lm}(\mathbf{q}, \omega) \rangle &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \left(\frac{\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}}{m} \right)^l \left(\frac{\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}'}{m} \right)^m \{ 2\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) - \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{++}(\mathbf{q}, \omega) - \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{--}(\mathbf{q}, \omega) \}, \end{aligned} \tag{6}$$

объем (площадь) рассматриваемой системы $V = 1, \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$.

Корреляционные функции (5), (6) удовлетворяют уравнениям непрерывности, вытекающим из закона сохранения числа частиц

$$\begin{aligned} -\omega K_{00}(q, \omega) + qK_{01}(q, \omega) &= -in_F + O \left[\left(\frac{\omega}{\mathcal{E}_F} \right)^2 \right], \\ -\omega K_{01}(q, \omega) + qK_{11}(q, \omega) &= O \left[\frac{\omega}{\mathcal{E}_F} \frac{q}{k_F} \right] \end{aligned} \tag{7}$$

(n_F — плотность состояний на уровне Ферми) и связаны простыми соотношениями с обобщенным кинетическим коэффициентом $L(q, \omega)$, электропроводностью $\sigma(q, \omega)$

$$L(q, \omega) = \frac{1}{n_F} K_{11}(q, \omega), \quad \sigma(q, \omega) = e^2 n_F L(q, \omega) \tag{8}$$

и функцией Грина уравнения диффузии

$$G(q, \omega) = \frac{1}{n_F} K_{00}(q, \omega) = \frac{1}{-i\omega + q^2 D(q, \omega)}. \tag{9}$$

Здесь $D(q, \omega)$ — обобщенный коэффициент диффузии [19]:

$$D(q, \omega) = \frac{L(q, \omega)}{1 + (q^2/i\omega)L(q, \omega)}. \tag{10}$$

Как хорошо известно [6], диффузионный полюс $i\omega = q^2 D(q, \omega)$ функции Грина (9) определяется первым из трех слагаемых, входящих в коррелятор (6) ($l = m = 0$), тогда как вклад двух последних слагаемых остается конечным в точке $\omega = 0, q = 0$. Поэтому всю необходимую информацию о низкочастотной и длинноволновой асимптотиках интересующих нас кинетических коэффициентов содержит двухчастичная функция Грина $\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ (4).

С помощью соотношения

$$\Delta G_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) \Phi^{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \omega) = \sum_{\mathbf{p}'} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) \left(\frac{\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}'}{m} \right)^k, \quad k = 0, 1 \tag{11}$$

определим функции релаксации $\Phi^{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \omega)$ плотности ($k = 0$) и тока ($k = 1$), удовлетворяющие уравнению переноса

$$\begin{aligned} & \left[\omega - \left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{p}}{m} \right) + \Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \right] \Phi^{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \\ & = \left(\frac{\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}}{m} \right)^k + \sum_{p'} U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) \Phi^{(k)}(\mathbf{p}', \mathbf{q}, \omega), \end{aligned} \quad (12)$$

которое нетрудно получить из уравнения Бете–Солпитера [6] для $\varphi_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ (см. рис. 1б). Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega) = G_{p-}^{-}(\mathcal{E}^{-}) - G_{p+}^{+}(\mathcal{E}^{+}), \quad \Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) = \Sigma_{p-}^{-}(\mathcal{E}^{-}) - \Sigma_{p+}^{+}(\mathcal{E}^{+}). \quad (13)$$

Собственно-энергетическая часть $\Sigma_p^{\pm}(\mathcal{E})$ и ядро интегрального уравнения (12) $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ связаны тождеством Уорда [6]

$$\Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{p'} U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega). \quad (14)$$

Это соотношение играет важную роль в дальнейших вычислениях, обеспечивая, в частности, выполнение закона сохранения числа частиц.

В отличие от обычного определения функций релаксации [6, 8] в (11) явно выделена присутствующая в них δ -образная особенность при $|\mathbf{p}| \simeq k_F$ ($q \ll k_F$). Поэтому, предполагая, что вблизи поверхности Ферми $\Phi^{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ достаточно плавно зависят от \mathbf{p} , будем искать решение уравнения переноса (12) в виде ряда Фурье:

$$\Phi^{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(k)}(k_F, q, \omega) \cos(n\theta), \quad \theta = \widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}. \quad (15)$$

После подстановки (15) в (10) нетрудно получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье (для краткости индекс F у импульса Ферми в дальнейшем опускается)

$$\begin{aligned} & \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ (1 + \delta_{n0} + \delta_{0n'} - \delta_{n0}\delta_{0n'}) \left[\omega \delta_{nn'} - (\delta_{n+1, n'} + \delta_{n, n'+1}) \frac{qk}{2m} \right] + M_{nn'}(q, \omega) \right\} \times \\ & \times \Phi_{n'}^{(k)}(k, q, \omega) = \left(\frac{k}{m} \right)^k \delta_{nk} (1 + \delta_{n0}). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{nn'}(q, \omega) = & \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' \cos(n\theta) \cos(n'\theta') \times \\ & \times \left\{ \pi \Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \delta(\theta - \theta') - \sum_{p'} U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

— матрица функций памяти. Символ p' под знаком суммы в (17) обозначает, что суммирование здесь ведется только по модулю вектора \mathbf{p}' . Для вычисления электропроводности (8) и коэффициента диффузии (10) достаточно знания лишь одного коэффициента

Фурье $\Phi_1^{(1)}(k, q, \omega)$. Поэтому обычно, следуя работам Вольхардта и Вельфле [6, 7], в разложении (15) сохраняют лишь два первых слагаемых ($n = 0, 1$), а вместо (16) получают систему двух линейных уравнений. Как будет показано ниже, такое приближение позволяет вычислять кинетические коэффициенты лишь без учета их пространственной дисперсии. В противном случае необходимо решать полную систему уравнений (16).

С помощью тождества Уорда (14) нетрудно показать, что для любого n $M_{n0}(q, \omega) \equiv 0$. Остальные матричные элементы (17), вообще говоря, отличны от нуля и зависят как от выбора приближения для вершинной функции $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$, так и от ряда потенциала примесей $U(\mathbf{r})$. В следующих двух параграфах мы рассмотрим решение системы уравнений (16) и вычисление кинетических коэффициентов двумерной неупорядоченной системы в лестничном приближении и приближении самосогласованной теории локализации.

3. ЛЕСТНИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Сохранив в диаграммных рядах на рис. 1а и 1в лишь первые слагаемые, мы получим следующие выражения для электронной собственно-энергетической части $\Sigma_p^\pm(\mathcal{E})$ и вершины $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$

$$U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) = n_I |U_{p-p'}|^2, \quad U_p = \int U(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (18)$$

$$\Sigma_p^\pm(\mathcal{E}) = n_I \sum_{p'} |U_{p-p'}|^2 G_{p'}^\pm(\mathcal{E}).$$

Впервые это приближение было предложено Эдвардсом [18], но до сих пор оно применялось для вычисления кинетических коэффициентов без учета их пространственной дисперсии. Используя (18), нетрудно убедиться в том, что в длинноволновом пределе можно пренебречь всеми недиагональными элементами матрицы функций памяти (17). Действительно, с точностью до слагаемых порядка $(q/k)^2$

$$M_{nn}(q, \omega) = \frac{i}{\tau_n} = n_I \sum_{p'} |U_{p-p'}|^2 \Delta G_{p'}(\mathcal{E}) (1 - \cos(n\varphi)), \quad (19)$$

где $\varphi = \theta - \theta' = \widehat{pp'}$; τ_n имеет смысл времени релаксации n -го порядка, в частности, $\tau_1 \equiv \tau$ — транспортное время релаксации. Для оценки относительной величины $M_{nn'}(q, \omega)$ ($n \neq n'$) воспользуемся модельным гауссовским потенциалом, фурье-образ которого равен $U_p = U_0 \exp(-p^2 r_0^2 / 2)$. Разлагая недиагональные элементы (17) в ряд по степеням малых параметров r_0/λ_F , λ_F/l и q/k_F , получим

$$\left| \frac{M_{n,n\pm 1}(q, \omega)}{qv_F} \right| \propto \frac{r_0^2}{\lambda_F^2} \frac{\lambda_F}{l}, \quad \left| \frac{M_{n,n\pm k}(q, \omega)}{M_{n,n\pm 1}(q, \omega)} \right| \propto \left(\frac{q}{k_F} \right)^{k-1}. \quad (20)$$

Таким образом, с указанной здесь точностью в системе уравнений (16) можно сохранить только диагональные элементы матрицы функций памяти (17). Следует отметить, что неравенства $r_0 \ll \lambda_F \ll l$ являются условиями применимости классической кинетической теории.

В пределе δ -образного рассеивающего потенциала примесей ($\tau_0 \rightarrow 0$) все недиагональные элементы $M_{nn'}(q, \omega)$ ($n \neq n'$) обращаются в нуль точно, а все времена релаксации равны друг другу ($\tau_n = \tau$), поскольку интеграл по углу φ от второго слагаемого обращается в нуль при $U_p = U_0 = \text{const}$. Эти упрощения позволяют не только получить точное решение системы уравнений (16), но и просуммировать соответствующие ряды Фурье (15) (см. Приложение 1)

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{1 - (i/\tau)\Phi_0^0(k, q, \omega + i/\tau)} \frac{1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{p}/m + i/\tau}, \quad (21)$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{q} + \frac{\omega}{q}\Phi^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega).$$

Здесь символ $\Phi_0^0(k, q, z)$ обозначает нулевой коэффициент Фурье функции релаксации плотности в отсутствие рассеяния на примесях

$$\Phi_0^0(k, q, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z - qv_F \cos \theta} = (z^2 - q^2v_F^2)^{-1/2}. \quad (22)$$

Содержащий эту функцию множитель в $\Phi^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ (21) играет важную роль. Благодаря ему функции релаксации плотности и тока оказываются связанными уравнением непрерывности (21) и, следовательно, удовлетворяют закону сохранения числа частиц. Аналогичную структуру имеет решение классического кинетического уравнения для пространственно-неоднородного неравновесного распределения [20], а также выражение для функции релаксации плотности, полученное Гетце [21] в приближении взаимодействующих мод.

Используя выражения (21) для функций релаксации плотности и тока, нетрудно вычислить обобщенный коэффициент диффузии

$$D(q, \omega) = \frac{2D_0}{1 - i\omega\tau + \sqrt{(1 - i\omega\tau)^2 + 2q^2D_0\tau}}, \quad D_0 = \frac{1}{2}v_F^2\tau \quad (23)$$

и связанный с ним соотношением (10) обобщенный кинетический коэффициент $L(q, \omega)$ или электропроводность $\sigma(q, \omega)$. При $q = 0$ из (23) мы получаем обычные формулы Друде для зависящих от частоты электропроводности и коэффициента диффузии, связанных между собой соотношением Эйнштейна

$$\sigma(\omega) = e^2 n_F D(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (24)$$

где σ_0 — статическая электропроводность, n — концентрация электронов. Менее тривиальный характер имеет пространственная дисперсия вычисленных здесь кинетических коэффициентов. Если обобщенный коэффициент диффузии (23) как функция от ω и q непрерывен при $\omega = 0$ и $q = 0$, то электропроводность в этой точке испытывает разрыв:

$$\sigma_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 0} \sigma(q, \omega) \neq \lim_{q \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(q, \omega) = 0. \quad (25)$$

Равенство нулю второго предела в (25) вытекает из низкочастотной асимптотики электропроводности

$$\sigma(q, \omega) \propto -\frac{i\omega}{q^2} e^2 n_F, \quad \omega \rightarrow 0, \quad q \neq 0, \quad (26)$$

которую нетрудно получить из соотношений (8), (10), учитывая конечность статического коэффициента диффузии $D(q)$ (23).

Таким образом, полученные здесь выражения для кинетических коэффициентов правильно воспроизводят их поведение в окрестности точки $\omega = 0, q = 0$. Равенство $\sigma(q, 0) \equiv 0$ имеет простой физический смысл. В стационарном неоднородном состоянии в отсутствие сил неэлектрической природы диффузионный и дрейфовый токи в точности компенсируют друг друга, обращая в нуль суммарный ток.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Из множества диаграмм, вносящих вклад в неприводимую вершину $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$, особенно важную роль играет ряд, изображенный в первой строке на рис. 1в (максимально пересеченные или «веерные» диаграммы). В случае рассеяния электронов на примесях с короткодействующим потенциалом его сумма может быть найдена точно. Ее учет ведет к появлению в $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ слагаемого, содержащего диффузионный полюс в точке $i\omega = (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 D_0(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)$, где $D_0(q, \omega)$ — классический коэффициент диффузии (23). При итерационном решении уравнения Бете–Солпитера это слагаемое дает логарифмически расходящиеся при $\omega \rightarrow 0$ поправки к кинетическим коэффициентам. Как было показано в работе [22], с наличием этих поправок тесно связано явление слабой локализации в низкоразмерных неупорядоченных системах.

Эта идея получила развитие в работах Вольхардта и Вельфле [6–8]. Они предложили самосогласованное обобщение «веерного» ряда для неприводимой вершины, добавив к нему все возможные диаграммы, содержащие две внешние пересекающиеся линии взаимодействия. В результате для $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ получается уравнение, изображенное в графической форме на рис. 2. Здесь диаграммный блок между линиями взаимодействия во втором слагаемом правой части представляет собой свертку по импульсам \mathbf{k}, \mathbf{k}' двухчастичной функции Грина в куперовском канале или канале частица-частица (куперон)

$$\Psi(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle R^+(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}'_+; \mathcal{S}^+) R^-(-\mathbf{k}_-, -\mathbf{k}'_-; \mathcal{S}^-) \rangle_I, \tag{27}$$

где $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2, \mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$. Однако в системах, инвариантных относительно обращения времени, $R^{\sigma}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'; \mathcal{S}) = R^{\sigma}(\mathbf{k}', \mathbf{k}; \mathcal{S})$, поэтому куперон (27) в точности совпадает с функцией Грина уравнения диффузии $G(q, \omega)$ (9), а неприводимая вершина принимает вид

$$U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega) = W + \frac{W}{\tau} \frac{1}{-i\omega + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 D(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)}, \tag{28}$$

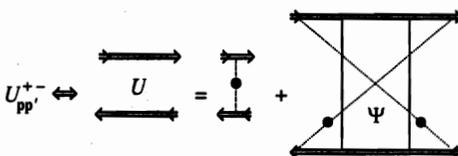


Рис. 2. Графическая форма уравнения для вершины $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ в приближении самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вельфле [6, 7]

где $W = n_I U_0^2$, $\tau = (2\pi W n_F)^{-1}$ — затравочное время релаксации, $D(q, \omega)$ — точный коэффициент диффузии.

Переходя к вычислению элементов матрицы функций памяти (17), обратим внимание на то, что согласно тождеству Уорда (14) в $\Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega)$ присутствует слагаемое, содержащее диффузионный полюс (28). На первый взгляд это должно приводить в локализованной фазе ($D(q, \omega) \propto -i\omega$) к сингулярности $\Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \propto 1/\omega$, что противоречит известным аналитическим свойствам усредненной одночастичной функции Грина (2). Для случая $2 < d < 4$ этот парадокс недавно был разрешен в работе [15], где показано, что отсутствие расходимости типа $1/\omega$ в правой части тождества Уорда (14) в локализованной фазе обеспечивается приближенной (с точностью $\propto \omega$) ортогональностью сингулярной части вершины $U_{pp'}^{+-}(\mathbf{q}, \omega)$ к $\Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega)$. Поэтому мы здесь заменим первое слагаемое из (17) на i/τ и для простоты отождествим τ с присутствующим в (28) затравочным временем релаксации, поскольку это не приводит к качественному изменению основных результатов.

Здесь так же, как и в лестничном приближении, ведущую роль играют диагональные элементы матрицы функций памяти (17), которые после несложных преобразований приобретают следующий вид:

$$M_{nn}(q, \omega) = \frac{i}{\tau} - \frac{W}{2\pi\tau} \int_0^{+\infty} k' dk' \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) \cos(n\varphi) d\varphi}{-i\omega + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 D(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)}. \quad (29)$$

После замены $z = \exp(i\varphi)$ интеграл по полярному углу в (29) преобразуется в интеграл по окружности единичного радиуса $|z| = 1$ на комплексной плоскости. Мы предполагаем, что основной вклад в него вносит диффузионный полюс (обоснование этого приближения дано в Приложении 2). Тогда, применяя теорему о вычетах, получим следующее выражение для диагонального элемента матрицы функций памяти:

$$M_{nn}(q, \omega) = \frac{i}{\tau} - (-1)^n \frac{i}{\tau} \Delta, \quad (30)$$

$$\Delta = \frac{W}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) k' dk'}{\left\{ [-i\omega + (k - k')^2 \tilde{D}] [-i\omega + (k + k')^2 \tilde{D}] \right\}^{1/2}}.$$

Здесь \tilde{D} — значение коэффициента диффузии в полюсе $i\omega = q^2 D(q, \omega)$. Асимптотика (30) имеет место в пределе $\omega \rightarrow 0$ при условии $\omega \ll 4k^2 |\tilde{D}|$ ($k \simeq k' \simeq k_F$). В металлическом режиме это неравенство выполняется автоматически, в локализованной фазе ($\tilde{D} \propto -i\omega d^2$) (30) остается справедливым при $d \gg \lambda_F$, где d — длина локализации. Для вычисления входящего в Δ (30) интеграла по k' положим в $\Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega)$ приближенно $\mathcal{E} \simeq k^2/2m$. Если кроме неравенства $\omega \ll 4k^2 |\tilde{D}|$ выполняется условие $k^2 \gg m/\tau$ (или $l = k\tau/m \gg \lambda_F$), то нижний предел интегрирования по $x = k'^2 - k^2$ можно заменить на $-\infty$. В итоге

$$\Delta = \frac{\lambda_F}{\pi^2 l} \frac{D_0}{\tilde{D}} \left(1 + 4i\omega \frac{l^2}{\tilde{D}} \right)^{-1/2} \ln \frac{1 + (1 + 4i\omega l^2 / \tilde{D})^{1/2}}{1 - (1 + 4i\omega l^2 / \tilde{D})^{1/2}}. \quad (31)$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений для коэффициентов Фурье $\Phi_n^{(0)}(k, q, \omega)$, точное решение которой (см. Приложение 1) дает следующее выражение

для искомой корреляционной функции

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{1 - (i/\tau)(1 - \Delta)\Phi_0^0(k, q, \omega + i/\tau)} \frac{\omega + i/\tau + i\Delta/\tau + \mathbf{pq}/m}{(\omega + i/\tau)^2 + \Delta^2/\tau^2 - (\mathbf{pq}/m)^2}, \quad (32)$$

где

$$\Phi_0^0\left(k, q, \omega + \frac{i}{\tau}\right) = \left(\left(\omega + \frac{i}{\tau} - i\frac{\Delta}{\tau} \right)^2 - q^2 v_F^2 \frac{\omega + i/\tau - i\Delta/\tau}{\omega + i/\tau + i\Delta/\tau} \right)^{-1/2}. \quad (33)$$

Функция релаксации тока $\Phi^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ связана с $\Phi^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ уравнением непрерывности (21). С помощью этих соотношений и уравнений (8)–(10) нетрудно найти выражение для коэффициента диффузии

$$D(q, \omega) = \frac{D_0}{1 - i\omega\tau + \Delta} \frac{2}{1 + (1 + 2D_0q^2\tau / [(1 - i\omega\tau)^2 - \Delta^2])^{1/2}}. \quad (34)$$

При $q = 0$ после замены $\tilde{D} \rightarrow D(\omega)$ ($|i\omega l^2/D(\omega)| \ll 1$) (34) переходит в известное уравнение для коэффициента диффузии $D(\omega)$, получаемое в рамках самосогласованной теории локализации [6, 7]. При $\Delta = 0$ (34) совпадает с выражением (23) для коэффициента диффузии в лестничном приближении.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В правую часть уравнения (34) через параметр Δ (31) входит значение коэффициента диффузии в полюсе $i\omega = q^2 D(q, \omega)$. Поэтому для вычисления $D(q, \omega)$ необходимо сначала решить самосогласованное уравнение относительно \tilde{D} , которое получается из (34) при $q^2 = i\omega/\tilde{D}$. В низкочастотном пределе его решение имеет локализационный характер $\tilde{D} \propto -i\omega d^2$. Действительно, подставляя эту асимптотику в уравнение для \tilde{D} , нетрудно проверить, что она реализуется при выполнении условия $\omega\tau \ll l^2/d^2$, где длина локализации d при $l \gg \lambda_F$ имеет вид

$$d = l \exp\left(\frac{\pi^2}{2} \frac{l}{\lambda_F}\right), \quad d \gg l \gg \lambda_F. \quad (35)$$

Следующая итерация уравнения относительно \tilde{D} позволяет найти низкочастотную асимптотику его вещественной части. Таким образом,

$$\text{Im } \tilde{D}(\omega) \propto -d^2\omega, \quad \text{Re } \tilde{D}(\omega) \propto \pi \frac{m}{\hbar} d^4 \omega^2, \quad \omega\tau \frac{d^2}{l^2} \ll 1. \quad (36)$$

Фактически (35), (36) воспроизводят результаты Вольхардта и Вельфле [6], отличаясь от них численным множителем 1/2 в экспоненте (35) и отсутствием искусственно вводимого обрезającego параметра.

Таким образом, учет пространственной дисперсии в самосогласованных уравнениях для кинетических коэффициентов не меняет их низкочастотного поведения (36) в режиме локализации при $q = 0$, что согласуется с одним из выводов работы [15]. Однако

локализация носителей заряда по разному влияет на характер пространственной дисперсии электропроводности $\sigma(q, \omega)$ и коэффициента диффузии $D(q, \omega)$. Действительно, подставляя асимптотики (36) в (10) и (34), получим

$$\sigma(q, \omega) = e^2 n_F \frac{\tilde{D}(\omega)}{1 + d^2 q^2}, \quad (37)$$

$$D(q, \omega) = \frac{2\tilde{D}(\omega)}{1 + (1 + 2l_D^2(\omega)q^2)^{1/2}}.$$

Если в лестничном приближении радиус нелокальности, определяющий пространственную дисперсию коэффициента диффузии (23), равен средней длине свободного пробега l (или классической длине диффузии $l_D = l/\sqrt{2} = \sqrt{D_0\tau}$), то в режиме локализации он равен $l_D(\omega) = \sqrt{D_0\tau} |\tilde{D}(\omega)/D_0| \ll l \ll d$. Таким образом, в соответствии с выводами работы [15] пространственная дисперсия $D(q, \omega)$ незначительна на масштабах $q \propto 1/d$. Параметр l_D в локализованной фазе имеет смысл зависящей от частоты длины диффузии. Согласно (36) низкочастотная асимптотика (37) имеет вид $D(q, \omega) = -i\omega f(q\omega)$, что обеспечивает подавление пространственной дисперсии коэффициента диффузии в локализованной фазе ($l_D(\omega) \propto \omega \rightarrow 0$). Этот результат справедлив в области частот, удовлетворяющих условию $l_D(\omega) > \lambda_F$ ¹⁾.

Иначе обстоит дело с электропроводностью. В металлическом режиме радиус нелокальности, определяющий ее пространственную дисперсию равен длине свободного пробега l при $q \rightarrow 0$, $\omega \neq 0$ (23) и обращается в бесконечность при $\omega \rightarrow 0$, $q \neq 0$ (26). В диэлектрической фазе $\sigma(q, \omega)$ (37) как функция от q и ω непрерывна в точке $q = 0$, $\omega = 0$, а роль радиуса нелокальности играет длина локализации d ²⁾. Таким образом, в отличие от коэффициента диффузии электропроводность в режиме локализации обнаруживает заметную пространственную дисперсию уже на масштабах $q \propto 1/d$. На этом основании мы предполагаем, что в локализованной фазе электродинамические свойства двумерных неупорядоченных систем при $d \gg l$ должны значительно сильнее, чем в металлическом режиме, зависеть от эффектов пространственной дисперсии.

Различие в зависимостях от q коэффициента диффузии и электропроводности (37) можно понять, если учесть, что они определяют разные потоки. Действительно, $D(q, \omega)$ как кинетический коэффициент определяет величину потоков только диффузионной природы, поэтому масштаб его пространственной дисперсии определяется диффузионной длиной $l_D(\omega)$. Электропроводность $\sigma(q, \omega)$ определяет суммарную величину диффузионных и дрейфовых потоков, причем в длинноволновом пределе доминирует последний. Радиус пространственной нелокальности материального уравнения, связывающего плотность тока с напряженностью электрического поля в среде, равен среднему расстоянию, на котором электроны сохраняют память о своих предыдущих состояниях. В режиме локализации ведущую роль играет когерентное рассеяние электронов на

¹⁾ Это ограничение является следствием волновой природы законов движения микрочастиц. Оценки, выполненные в Приложении 2 (см. (П.2.6)) показывают, что при $l \gg \lambda_F$ существует интервал частот, в котором одновременно $\lambda_F < l_D \ll l$ и $|\tilde{D}(\omega)| \ll D_0$.

²⁾ Учет пространственной дисперсии коэффициента диффузии (37) при вычислении $\sigma(q, \omega)$ приводит лишь к слабой перенормировке d в (37).

хаотически распределенных примесях, что ведет к аномальному росту вероятности рассеяния назад ($\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$) [22] (см. (28)). Естественно, что в этом случае радиус нелокальности определяется длиной когерентности, т. е. средним размером замкнутых петель самопересекающихся траекторий, который по порядку величины равен длине локализации d^3 .

Из асимптотик (36), (37) следует, что в режиме локализации статический предел коэффициента диффузии равен нулю при любом конечном значении волнового вектора, т. е. $\lim_{\omega \rightarrow 0} D(q, \omega) = D(q, 0) = 0$. Это согласуется с критерием Березинского-Горькова [16], согласно которому в локализованной фазе при $\omega \rightarrow 0$ функция Грина уравнения диффузии (9) имеет асимптотику $G(q, \omega) \propto 1/\omega$.

В основе данной работы лежит теория Вольхардта-Вельфле, проблема обоснования которой до сих пор актуальна [5]. Важный шаг в этом направлении сделан в работе [15], где было показано, что сингулярная структура вершины (28) является прямым следствием симметрии относительно обращения времени. Тем не менее еще остается ряд проблем, связанных с контролем приближенной процедуры самосогласования [15]. Полученные здесь результаты позволяют решить некоторые из них. В частности, неравенство (П.2.6) определяет область частот, в которой справедлива не только процедура Вольхардта-Вельфле $D(q, \omega) = D(\omega)$, но и (при дополнительном условии $l_D(\omega) > \lambda_F$) предложенная выше приближенная схема учета слабой пространственной дисперсии электропроводности и коэффициента диффузии (37). Что касается зависимости кинетических коэффициентов от q , то, как показывают оценки не учтенных здесь недиагональных элементов матрицы функций памяти (17), асимптотики (37) остаются справедливыми в области $q \ll 1/l$.

Авторы выражают благодарность А. К. Аржникову и Л. И. Данилову за плодотворные дискуссии и поддержку в ходе выполнения данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Решение систем рекуррентных уравнений

В случае рассеяния электронов на примесях с δ -образным потенциалом, система уравнений для коэффициентов $\Phi_n^{(0)}$ в лестничном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \omega \Phi_0^{(0)} - \frac{qk}{2m} \Phi_1^{(0)} &= 1, \\ \frac{qk}{2m} \Phi_0^{(0)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right) \Phi_1^{(0)} + \frac{qk}{2m} \Phi_2^{(0)} &= 0, \\ \frac{qk}{2m} \Phi_n^{(0)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right) \Phi_{n+1}^{(0)} + \frac{qk}{2m} \Phi_{n+2}^{(0)} &= 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{П.1.1}$$

Это — бесконечная система однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее решение можно искать в виде [23]

$$\Phi_n^{(0)} = \Phi_0^{(0)} C z^n. \tag{П.1.2}$$

³⁾ На наш взгляд, эти рассуждения неприменимы к пространственной нелокальности коэффициента диффузии, поскольку градиент концентрации не является силой, действующей на электроны, а связь между ним и величиной диффузионного потока имеет статистический характер.

Подстановка (П.1.2) в последнее уравнение из (П.1.1) приводит к квадратному уравнению относительно z , из двух решений которого следует выбрать удовлетворяющее условию $\Phi_n^{(0)}(q=0) = 0$ ($n \geq 1$)

$$z = -\frac{1}{qv_F} \left[\left(\left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)^2 - q^2 v_F^2 \right)^{1/2} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right) \right]. \quad (\text{П.1.3})$$

Неопределенная константа C и нулевой коэффициент Фурье $\Phi_0^{(0)}$ находятся с помощью первых двух уравнений из (П.1.1), играющих роль граничных условий для системы разностных уравнений. После подстановки найденного решения в (15) получающийся ряд Фурье сводится к геометрической прогрессии и легко суммируется.

Система уравнений для коэффициентов $\Phi_n^{(1)}$ отличается от (П.1.1) лишь граничными условиями

$$\begin{aligned} \omega \Phi_0^{(1)} - \frac{qk}{2m} \Phi_1^{(1)} &= 0, \\ \frac{qk}{m} \Phi_0^{(1)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right) \Phi_2^{(1)} + \frac{qk}{2m} \Phi_2^{(1)} &= -\frac{k}{m} \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

и решается аналогично. Окончательные выражения для функций релаксации плотности и тока в лестничном приближении имеют вид (21), (22).

Согласно (30) система уравнений для коэффициентов Фурье $\Phi_n^{(0)}$ в приближении самоогласованной теории локализации имеет вид

$$\begin{aligned} \omega \Phi_0^{(0)} - \frac{qk}{2m} \Phi_1^{(0)} &= 1, \\ \frac{qk}{m} \Phi_0^{(0)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} + \frac{i}{\tau} \Delta \right) \Phi_1^{(0)} + \frac{qk}{2m} \Phi_2^{(0)} &= 0, \\ \frac{qk}{2m} \Phi_{2k-1}^{(0)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} - \frac{i}{\tau} \Delta \right) \Phi_{2k}^{(0)} + \frac{qk}{2m} \Phi_{2k+1}^{(0)} &= 0, \\ \frac{qk}{2m} \Phi_{2k}^{(0)} - \left(\omega + \frac{i}{\tau} + \frac{i}{\tau} \Delta \right) \Phi_{2k+1}^{(0)} + \frac{qk}{2m} \Phi_{2k+2}^{(0)} &= 0, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

где Δ определен в (31). Из двух последних уравнений (П.1.5) нетрудно показать, что коэффициенты Фурье одинаковой четности связаны однородными рекуррентными соотношениями второго порядка

$$\left(\frac{qk}{2m} \right)^2 \Phi_n^{(0)} - \left[\left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)^2 + \frac{\Delta^2}{\tau^2} - 2 \left(\frac{qk}{2m} \right)^2 \right] \Phi_{n+2}^{(0)} + \left(\frac{qk}{2m} \right)^2 \Phi_{n+4}^{(0)} = 0, \quad (\text{П.1.6})$$

где $n = 2k - 1$ или $2k$ ($k \geq 1$). В этом случае по аналогии с (П.1.2) решение системы уравнений (П.1.6) следует искать в виде

$$\Phi_{2k}^{(0)} = \Phi_0^{(0)} C z^{2k}, \quad \Phi_{2k-1}^{(0)} = \Phi_0^{(0)} B z^{2k-1}. \quad (\text{П.1.7})$$

Подстановка этих выражений в (П.1.6) дает квадратное уравнение относительно z^2 . Его решение, удовлетворяющее условию $\Phi_n^{(0)}(q=0) = 0$ ($n \geq 1$), имеет вид

$$z = \frac{1}{qv_F} \left[\left(\left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)^2 + \frac{\Delta^2}{\tau^2} - q^2 v_F^2 \right)^{1/2} - \left(\left(\omega + \frac{i}{\tau} \right)^2 + \frac{\Delta^2}{\tau^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{П.1.8})$$

Неопределенные константы C и B вновь находятся из граничных условий (первые два уравнения в (П.1.5)). Аналогично решается и система уравнений для коэффициентов $\Phi_n^{(1)}$. Окончательные выражения для функций релаксации плотности и тока в приближении самосогласованной теории локализации имеют вид (32), (33).

В заключение отметим, что для вычисления коэффициента диффузии $D(\omega)$ и электропроводности $\sigma(\omega)$ без учета пространственной дисперсии достаточно в системах (П.1.1) и (П.1.5) сохранить лишь первые пары уравнений и положить $\Phi_n^{(0)} \equiv 0$ ($n \geq 2$). При этом (П.1.1) дает хорошо известный предел Друде (24), а (П.1.5) — приближение Вольхардта–Вельфле [6, 7] (см. соотношение (34) при $q = 0$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценка интегралов вдоль линий разреза

Используя явное выражение (37) для низкочастотной асимптотики обобщенного коэффициента диффузии $D(q, \omega)$, можно оценить величину вклада от интегралов вдоль линий разреза, отброшенных при вычислении матричных элементов функций памяти (29). После подстановки (37) в интеграл по полярному углу φ (29) положим

$$q^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 \simeq 2k^2 + k^2(z + z^{-1}), \quad z = \exp(i\varphi). \quad (\text{П.2.1})$$

На плоскости z подынтегральное выражение симметрично относительно инверсии $z \rightarrow z^{-1}$ и имеет две линии разреза C_1 ($z_1 \leq z \leq 0$) внутри круга единичного радиуса $|z| = 1$ и C_2 ($-\infty \leq z \leq z_2$) — за его пределами. Здесь z_1, z_2 — корни уравнения

$$1 + 2l_D^2(\omega)k^2(2 + z + z^{-1}) = 0, \quad (\text{П.2.2})$$

$$z_1, z_2 = 1, |z_1| < 1, |z_2| > 1.$$

После несложных преобразований вклад от линий разреза в $M_{nn}(q, \omega)$ (29) может быть представлен в виде

$$M_{nn}^{cut} \simeq \frac{1}{2\omega\tau^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz z^{n-1/2} \frac{\sqrt{2l_D^2(\omega)k^2(z+1)^2 + z}}{d^2 k^2 (z+1)^2 + z}. \quad (\text{П.2.3})$$

В подынтегральном выражении (П.2.3) сохранены только ветвящиеся в точках $z = 0$ и $z = z_1$ слагаемые. Кроме этого, в знаменателе опущены члены, которые в режиме локализации малы по параметру $l_D^2(\omega)/d^2 \ll 1$. Для того чтобы оценить M_{nn}^{cut} сверху по модулю, заменим числитель выражения под знаком интеграла в (П.2.3) его максимальным значением в точке $z = 0$, а знаменатель — минимальным в точке $z = z_1$. С учетом неравенства $|z_1| < 1$ это дает

$$|M_{nn}^{cut}| < \frac{\lambda_F l_D(\omega)}{8\sqrt{2}\pi^2\omega\tau^2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8l_D^2(\omega)k^2}}{d} \right)^2 \frac{2}{2n + 1}, \quad (\text{П.2.4})$$

$n = 1, 2, 3, \dots, k = 2\pi/\lambda_F$.

Таким образом, в области частот, удовлетворяющих условию $l_D > \lambda_F$, мы получаем следующую оценку для отношения вкладов от линий разреза и диффузионного полюса в матричные элементы функций памяти (29)

$$\frac{|M_{nn}^{cut}|}{|M_{nn}^{pol}|} < \frac{4}{2n+1} \left| \frac{\tilde{D}(\omega)}{D_0} \right|^3 \frac{l}{\lambda_F} = \frac{4\sqrt{2}}{2n+1} \left| \frac{\tilde{D}(\omega)}{D_0} \right|^2 \frac{l_D(\omega)}{\lambda_F}. \quad (\text{П.2.5})$$

Несмотря на наличие в (П.2.5) двух конкурирующих множителей ($\lambda_F < l_D(\omega) \ll l$, $|\tilde{D}(\omega)| \ll D_0$), существует такой интервал частот, в котором

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\tilde{D}(\omega)}{D_0} \right|^3 \frac{l}{\lambda_F} = \left| \frac{\tilde{D}(\omega)}{D_0} \right|^2 \frac{l_D(\omega)}{\lambda_F} \ll 1 \quad (\text{П.2.6})$$

и, следовательно, главный вклад в матричные элементы функций памяти вносит диффузионный полюс. Таким образом, разработанная выше схема вычисления $D(q, \omega)$ работает при выполнении неравенства (П.2.6). Это же условие ограничивает область применимости приближения Вольхардта-Вёльфле [6–8] $D(q, \omega) = D(\omega)$. В противном случае сложная аналитическая структура обобщенного коэффициента диффузии может существенно изменить значение интеграла (29).

Литература

1. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
2. N. F. Mott and E. A. Davis, *Electron Processes in Non-Crystalline Materials*, Clarendon Press, Oxford (1979) (пер.: Н. Мотт, Э. Дэвис, *Электронные процессы в некристаллических веществах*, Мир, Москва (1982)).
3. *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin–New York (1982).
4. P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
5. М. В. Садовский, СФХТ **8**, 337 (1995).
6. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
7. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **45**, 842 (1980).
8. P. Wölfle and D. Vollhardt, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin–New York (1982), p. 26.
9. F. J. Wegner, Z. Phys. B **25**, 327 (1976).
10. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
11. D. Yoshioka, Y. Ono, and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jap. **50**, 3419 (1981).
12. D. Yoshioka, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin–New York (1982), p. 44.
13. A. Theumann, M. A. Pires Idiart, J. Phys.: Condens. Matter **3** 3765 (1991).
14. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, СФХТ **4**, 2278 (1991).
15. И. М. Сулов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
16. В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2499 (1979).
17. T. Ando, A. V. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982). (пер. Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн, *Электронные свойства двумерных систем*, Мир, Москва (1985)).
18. S. F. Edwards, Phil. Mag. **8**, 1020 (1958).

19. Д. Н. Зубарев, Современные методы статистической теории неравновесных процессов, в кн.: *Современные проблемы математики* т. 15, ВИНТИ АН СССР (1979).
20. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
21. W. Götze, *Phil. Mag.* **43**, 219 (1981).
22. Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).
23. А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы*, Наука, Москва (1989).