ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 5, стр. 1563–1578

ЭВОЛЮЦИЯ ШИРИНЫ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С КВАНТОВЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*С. В. Фалеев**

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 17 сентября 1996 г.

С помощью метода функционального интегрирования исследуется эволюция ширины волнового пакета релятивистской заряженной частицы, взаимодействующей с квантовым электромагнитным полем. Получено общее выражение для распределения плотности частицы, движущейся в произвольных внешних потенциалах. В качестве конкретного примера рассмотрен электронный синхротрон со слабой фокусировкой. Найдена ширина волнового пакета электрона в данном ускорителе.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, ширина волнового пакета электрона в циклическом ускорителе на достаточно больших временах определяется двумя конкурирующими эффектами — классическим радиационным затуханием [1, 2] и увеличением ширины пакета вследствие квантового характера излучения [3]. Однако используемый на сегодняшний день метод расчета ширины волнового пакета [1, 2] имеет полуклассический, статистический характер. Электрон в данном подходе рассматривается как классическая частица, случайным образом излучающая фотоны с заданной (классической) средней интенсивностью излучения. Строго говоря, при таком рассмотрении нужно использовать такое понятие, как ширина пучка частиц, а не ширина волнового пакета одной частицы.

В настоящей работе мы попытаемся развить общий метод для строгого квантового расчета распределения плотности волнового пакета релятивистской заряженной частицы, взаимодействующей с квантовым электромагнитным полем. Для решения поставленной задачи релятивистскую квантовую механику удобнее всего формулировать на языке функциональных интегралов. В рамках этого подхода влияние на частицу квантового электромагнитного поля можно учитывать с помощью техники функционала влияния [4, 5].

В разд. 2 мы получим выражение для функционала влияния для случая, когда в начальный момент времени электромагнитное поле находилось в тепловом равновесии с некоторой температурой T. В квазиклассическом приближении, когда ширина пакета много меньше характерных масштабов внешних потенциалов, учет взаимодействия с квантовым электромагнитным полем приводит к возникновению трех дополнительных

*E-mail: S.V.Faleev@INP.NSK.SU

сил в уравнении для классической траектории частицы — силы радиационного трения и двух флуктуационных сил, которые учитывают квантовый, дискретный характер излучения. В разд. 3 будет получено общее выражение (в форме функциональных интегралов по флуктуационным силам) для распределения плотности волнового пакета заряженной частицы, движущейся в произвольных внешних потенциалах. В последнем разделе мы рассмотрим эволюцию волнового пакета электрона в конкретной системе — синхротроне со слабой фокусировкой. Будет показано, что при каждой фиксированной конфигурации флуктуационных сил волновой пакет имеет некоторое «собственное» относительное распределение плотности, которое определяется начальной волновой функцией, не зависит от флуктуационных сил и ширина которого экспоненциально затухает со временем. С другой стороны, координата центра этого распределения как целого сильно зависит от флуктуационных сил, и при усреднении по ним мы получим так называемый «броуновский», лидирующий при больших временах вклад в ширину пакета.

Рассматриваемая система является примером квантовой диссипативной системы. Простейшая модель квантовой диссипативной системы — частица, линейно связанная с ансамблем невзаимодействующих гармонических осцилляторов, — исследовалась в работе [6]. Несмотря на формальные различия нашей и обсуждаемой в [6] моделей (релятивистский формализм и более сложная связь), ширина пакета в обоих случаях имеет одинаковую структуру, а именно, разделяется на «броуновскую» и «собственную» части, которые характерным образом зависят от времени.

2. ФУНКЦИОНАЛ ВЛИЯНИЯ

Действие рассматриваемой системы дается следующим выражением:

$$S[q,A] = S_0[q]+S_I[q,A]+S_A[A] = \int_0^t d\tau \left(-M\sqrt{1-\dot{q}^2}+e\,\dot{q}\,A^{(ex)}(q,\tau)-eU^{(ex)}(q,\tau)\right)+$$
$$+\,e\int_0^t d\tau\,\dot{q}\,A(q,\tau)-\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int d^3x\,\left(F_{\mu\nu}(x,\tau)\right)^2, \tag{1}$$

где q, e и M — координата, электрический заряд и масса электрона, $A^{(ex)}$ и $U^{(ex)}$ — внешние векторный и скалярный потенциалы, $F_{\mu\nu}(x,\tau)=\partial_\mu A_\nu(x,\tau)-\partial_\nu A_\mu(x,\tau)$ — тензор напряженности квантового электромагнитного поля. Скорость света и постоянная Планка в данной работе приняты равными единице: $\hbar = c = 1$. Здесь и ниже (где возможно) мы будем опускать векторные индексы для координаты электрона $\mathbf{q}$, электромагнитного поля $\mathbf{A}$ и т. д. Также выберем наиболее удобную для наших целей кулоновскую калибровку поля

$$A_0 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla\mathbf{A}(x) = 0. \tag{2}$$

Выразим лагранжиан электромагнитного поля L_A в терминах фурье-компонент поля $A(k,\tau)=\int d^3x A(x,\tau)\exp(-ikx)$:

$$L_A[A] =$$

$$= \sum_{k_z>0} \left(\left(\mathrm{Re}\left[\dot{A}(k,\tau)\right]\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left[\dot{A}(k,\tau)\right]\right)^2 - k^2 (\mathrm{Re}\,[A(k,\tau)])^2 - k^2 (\mathrm{Im}\,[A(k,\tau)])^2 \right), \quad (3)$$

где для удобства последующих вычислений мы дискретизовали импульсы $\mathbf{k}$ и заменили интеграл по $\mathbf{k}$ на сумму:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \to \sum_k .$$

Обозначение области суммирования $\sum\limits_{k_z>0}$ в (3) означает, что в качестве независимых переменных мы выбрали реальную и мнимую части фурье-компонент $A(k) = \mathrm{Re}[A(k)] + i\,\mathrm{Im}[A(k)]$ в полупространстве $k_z > 0$ ($A(-k) = \mathrm{Re}[A(k)] - i\,\mathrm{Im}[A(k)]$, так как поле $A(x)$ — реальная величина).

Лагранжиан взаимодействия L_I в терминах переменных $\mathrm{Re}[A(k)]$ и $\mathrm{Im}[A(k)]$ имеет вид

$$L_I = e \int d^3x\, \dot{q}(\tau)\delta^3(x - q(\tau))\, A(x) =$$
$$= e \sum_{k_z>0} (2\cos(kq)\,\mathrm{Re}\,[A(k)] - 2\sin(kq)\,\mathrm{Im}\,[A(k)]) \left(\dot{q} - k\frac{(\dot{q}\,k)}{k^2} \right). \quad (4)$$

Выбор калибровки (2) ($\mathbf{A}(k)\mathbf{k} = 0$) позволяет нам прибавить пропорциональный вектору $\mathbf{k}$ член в (4), после чего можно считать, что мы имеем также и продольную поляризацию поля $\mathbf{A}(k) \propto \mathbf{k}$, которая, однако, не взаимодействует с электроном.

Пусть первоначально электрон находился в чистом состоянии с некоторой волновой функцией $\psi(q)$, а электромагнитное поле находилось в тепловом равновесии с температурой T и описывалось соответствующей матрицей плотности $\rho(A, A')$.

Матрица плотности электрона в момент времени t дается сверткой пропагатора матрицы плотности с начальной матрицей плотности частицы

$$\rho(q_f, q'_f, t) = \int dq_i dq'_i J(q_f, q'_f, t; q_i, q'_i, 0)\psi(q_i)\psi^*(q'_i). \quad (5)$$

Пропагатор матрицы плотности можно выразить через функциональные интегралы по траекториям электрона

$$J(q_f, q'_f, t; q_i, q'_i, 0) = \iint DqDq' \exp\left(iS_0[q] - iS_0[q']\right) F[q, q'], \quad (6)$$

где функционал влияния $F[q, q']$ выражается через интегралы по полям $A(k)$ [4, 5]:

$$F[q, q'] = \int \prod_{k_z>0} dA_f(k) dA_i(k) dA'_i(k) \rho_A(A_i, A'_i) \times$$
$$\times \iint \prod_{k_z>0} DA(k)DA'(k) \exp\left(i\left(S_I[q, A] - S_I[q', A'] + S_A[A] - S_A[A']\right)\right). \quad (7)$$

Все функциональные интегралы в (5) и (7) берутся по траекториям $q(\tau)$, $q'(\tau)$, $A(\tau)$ и $A'(\tau)$ с граничными точками $q(t) = q_f$, $q'(t) = q'_f$, $q(0) = q_i$, $q'(0) = q'_i$, $A(t) = A'(t) = A_f$, $A(0) = A_i$ и $A'(0) = A'_i$.

Если положить функционал влияния равным единице $F[q, q'] = 1$, то функциональный интеграл (6) будет соответствовать «положительно частотной» части уравнения Клейна–Гордона для волновой функции частицы

$$\left[\left(i\partial_t - eU^{(ex)}\right) - \sqrt{\left(-i\nabla - e\mathbf{A}^{(ex)}\right)^2 + M^2}\right]\psi(q, t) = 0. \tag{8}$$

Заметим, что говорить о волновой функции одной частицы имеет смысл только тогда, когда энергия частицы много больше, чем неопределенность энергии, связанная как с излучением фотонов, так и с конечными размерами волнового пакета. В противном случае мы должны рассматривать теорию поля с произвольным количеством электрон-позитронных пар. Таким образом, в сопутствующей системе отсчета характерная энергия излучаемых фотонов, а также обратная ширина волнового пакета, выраженная в единицах энергии, должны быть много меньше, чем энергия покоя частицы Mc^2. В случае циклического ускорителя первое условие дает следующее ограничение на энергию электрона:

$$E \ll E_{1/2} \equiv Mc^2(RMc/\hbar)^{1/2},$$

где R — радиус ускорителя.

Другим ограничением на область применимости нашего подхода является то, что мы не можем рассматривать слишком короткие промежутки времени. Функция

$$\psi(q_f, t) = \int^{q_f} Dq \exp\left(iS_0[q]\right) \tag{9}$$

представляет собой решение уравнения (8) только в пределе $dtM \gg 1$, где dt — это промежутки времени, на которые разбит весь временной интервал t в функциональном интеграле по Dq в (9). Более того, при $dtM \sim 1$ функциональный интеграл (9) вообще является плохо определенной величиной. Таким образом, в рамках данного подхода мы не сможем получить правильное выражение для (бесконечной) поправки к массе частицы, которая набирается именно на малых временных масштабах (см. обсуждение после формулы (17)).

Как было сказано выше, электрон не взаимодействует с продольной поляризацией электромагнитного поля (4), и в (7) мы можем интегрировать по всем трем поляризациям поля $A(k)$.

Лагранжиан электромагнитного поля (3) представляет собой набор лагранжианов невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Задача о вычислении функционала влияния для гармонического осциллятора, линейно связанного с некоторой другой системой (см. (4)), была решена точно в [4, 5]. Таким образом, можно получить следующее выражение для функционала влияния (7):

$$F[q, q'] = \exp(iI)\exp(-R), \tag{10}$$

где

$$I = I_{qq} - I_{q'q'} + I_{qq'} - I_{q'q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \frac{e^2}{2|k|} \sin\left(|k|(\tau - s)\right) \times$$
$$\times \left\{ \cos\left(k(q_\tau - q_s)\right) \left(\dot{q}_\tau \dot{q}_s - \left(\dot{q}_\tau n\right)\left(\dot{q}_s n\right)\right) - \cos\left(k(q'_\tau - q'_s)\right) \left(\dot{q}'_\tau \dot{q}'_s - \left(\dot{q}'_\tau n\right)\left(\dot{q}'_s n\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\left(k(q_\tau - q'_s)\right) \left(\dot{q}_\tau \dot{q}'_s - \left(\dot{q}_\tau n\right)\left(\dot{q}'_s n\right)\right) - \cos\left(k(q'_\tau - q_s)\right) \left(\dot{q}'_\tau \dot{q}_s - \left(\dot{q}'_\tau n\right)\left(\dot{q}_s n\right)\right) \right\} \quad (11)$$

и

$$R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^t ds \frac{e^2}{4|k|} \cos\left(|k|(\tau - s)\right) \operatorname{cth} \frac{|k|}{2k_B T} \times$$
$$\times \left\{ \cos\left(k(q_\tau - q_s)\right) \left(\dot{q}_\tau \dot{q}_s - \left(\dot{q}_\tau n\right)\left(\dot{q}_s n\right)\right) + \cos\left(k(q'_\tau - q'_s)\right) \left(\dot{q}'_\tau \dot{q}'_s - \left(\dot{q}'_\tau n\right)\left(\dot{q}'_s n\right)\right) - \right.$$
$$\left. - 2\cos\left(k(q_\tau - q'_s)\right) \left(\dot{q}_\tau \dot{q}'_s - \left(\dot{q}_\tau n\right)\left(\dot{q}'_s n\right)\right) \right\}. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/|k|$, k_B — константа Больцмана и, для краткости, $q_\tau \equiv q(\tau)$.

Сначала рассмотрим вклад $I_{qq'}$-члена. Интегрируя по частям выражение

$$\sin\left(|k|(\tau - s)\right) \cos\left(k(q_\tau - q'_s)\right) \left(\dot{q}_\tau n\right)\left(\dot{q}'_s n\right) = \sin\left(|k|(\tau - s)\right) \frac{d^2}{d\tau\, ds} \cos\left(k(q_\tau - q'_s)\right) k^{-2}$$

в (11), можно заменить слагаемое $(\dot{q}_\tau n)(\dot{q}'_s n)$ в подынтегральном выражении (11) на единицу. При этом зависимость от вектора $\mathbf{n}$ в (11) становится тривиальной и интеграл по d^3k легко берется:

$$I_{qq'} - I_{q'q} = \frac{\alpha}{2} \int_0^t d\tau \int_0^t ds \frac{1}{|q_\tau - q'_s|} \left\{ \delta\left(\tau - s - |q_\tau - q'_s|\right) - \delta\left(\tau - s + |q_\tau - q'_s|\right) \right\} \left(\dot{q}_\tau \dot{q}_s - 1\right). \quad (13)$$

Здесь

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

— константа связи электромагнитных взаимодействий. Вклад члена $I_{q'q}$ учитывается в (13) тем, что область интегрирования по s распространена на весь временной интервал t.

Дисперсия траекторий частицы $\delta q_\tau \equiv q_\tau - q'_\tau$, которая по порядку величины совпадает с размерами волнового пакета, много меньше, чем характерный масштаб изменения внешних потенциалов L. Поэтому достаточно удерживать в (13) только линейные по δq члены. После некоторых вычислений можно получить

$$I_{qq'} - I_{q'q} = \frac{2\alpha}{3} \int_0^t d\tau\, \delta q_\tau \left(\frac{\ddot{v}}{1 - v^2} + 3\frac{\dot{v}\,(v\,\dot{v})}{(1 - v^2)^2} + \frac{v\,(v\,\ddot{v})}{(1 - v^2)^2} + 3\frac{v\,(v\,\dot{v})^2}{(1 - v^2)^3} \right) \times$$
$$\times \left(1 + O\left(\frac{(\delta q)^2}{L^2}\right)\right), \quad (14)$$

где $v = \dot{\bar{q}}$ — скорость «средней» траектории частицы $\bar{q}_\tau \equiv (q_\tau + q'_\tau)/2$. Как видно, вклад (14) в функционал влияния приводит к возникновению хорошо известных сил радиационного трения [7] в уравнении для классической траектории.

Запишем член I_{qq} в (11) в релятивистски инвариантной форме:

$$I_{qq} = -\alpha \int_0^t d\tau \int_0^t ds \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' j_\mu(r,\tau) j^\mu(r',s) \delta\left((\tau - s)^2 - (r - r')^2\right), \tag{15}$$

где $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$ — 4-вектор плотности «частицы»:

$$\rho(r,\tau) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{q}_\tau)$$

и

$$\mathbf{j}(r,\tau) = \dot{\mathbf{q}}_\tau \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_\tau).$$

Вычислим релятивистский скаляр I_{qq} в сопутствующей системе отсчета:

$$I_{qq} = \int_0^t d\tau \sqrt{1 - \dot{q}^2}\,(-\delta M), \tag{16}$$

где $d\tau\sqrt{1 - \dot{q}^2}$ есть дифференциал «собственного времени», а величина δM дается выражением

$$\delta M = \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \rho_0(r)\rho_0(r') \frac{\alpha}{2} \frac{1}{|r - r'|}, \tag{17}$$

где $\rho_0(r)$ — распределение плотности «частицы» в системе отсчета, в которой она покоится. Как мы видим, член I_{qq} (16) приводит к перенормировке массы электрона: $M + \delta M \to M$, причем выражение для δM совпадает с классическим выражением для собственной энергии распределенного заряда. В нашем случае поправка к массе оказывается бесконечной, так как «заряд» точечный: $\rho_0(r) = \delta(\mathbf{r})$.

В (17) мы получили классическую линейную расходимость массы электрона $\delta M \sim \sim e^2/r_e$, где r_e условно обозначает «радиус» электрона. Этот результат противоречит квадратичной расходимости массы частицы в скалярной квантовой электродинамике $\delta(M^2) \sim \alpha\Lambda^2$, где Λ — обрезание в интегралах по импульсам в КЭД. Причина такого несоответствия заключается в том, что, как было сказано выше, функциональный интеграл (6) не описывает очень короткие промежутки времени $|\tau - s| \le 1/M$, которые, как видно из (15), и дают вклад в расходимость собственной энергии электрона.

Выражение (12) для R в лидирующем, квадратичном по δq, порядке имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int_0^t ds \frac{e^2 \cos\left(|k|(\tau - s)\right)}{4|k|} \operatorname{cth}\left(\frac{|k|}{2k_BT}\right) \cos\left(k\left(\bar{q}_\tau - \bar{q}_s\right)\right) \times \\ \times \left\{\left(\delta\dot{q}_\tau \delta\dot{q}_s - \left(\delta\dot{q}_s n\right)\left(\delta\dot{q}_\tau n\right)\right) + (k\delta q_\tau)(k\delta q_s)\left[\dot{\bar{q}}_\tau \dot{\bar{q}}_s - \left(\dot{\bar{q}}_s n\right)\left(\dot{\bar{q}}_\tau n\right)\right]\right\} \times \\ \times \left(1 + O\left(\frac{(\delta q)^2}{L^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Для того чтобы в эффективном действии остались только линейные по δq члены, запишем экспоненту e^{-R} через некоторые новые функциональные интегралы по так называемым флуктуационным силам $F_{\|}(\tau)$ и $F_{\perp}(\tau)$ с весовыми функционалами $P_{\|}[F_{\|}]$ и $P_{\perp}[F_{\perp}]$, которые определяются из тождества

$$e^{-R} \equiv \iint DF_{\|} DF_{\perp} P_{\|}[F_{\|}] P_{\perp}[F_{\perp}] \exp\left\{ i\int_0^t d\tau\, F_{\|}(\tau)\delta q(\tau) - i\int_0^t d\tau\, F_{\perp}(\tau)\delta \dot{q}(\tau)\right\}. \quad (19)$$

Корреляторы сил $F_{\|}(F_{\perp})$ в различные моменты времени легко могут быть найдены с помощью второй функциональной производной экспоненты (19) по $\delta q(\delta \dot{q})$:

$$\langle F_{\| i}(\tau) F_{\| j}(s)\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \cos\left(|k|(\tau - s)\right)}{2|k|} \operatorname{cth}\left(\frac{|k|}{2k_B T}\right) \times$$
$$\times \cos\left(k\left(\bar{q}_\tau - \bar{q}_s\right)\right) k_i k_j \left(\dot{\bar{q}}_\tau \dot{\bar{q}}_s - \left(\dot{\bar{q}}_\tau n\right)\left(\dot{\bar{q}}_s n\right)\right), \quad (20)$$

$$\langle F_{\perp i}(\tau) F_{\perp j}(s)\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \cos\left(|k|(\tau - s)\right)}{2|k|} \operatorname{cth}\left(\frac{|k|}{2k_B T}\right) \times$$
$$\times \cos\left(k\left(\bar{q}_\tau - \bar{q}_s\right)\right)\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right). \quad (21)$$

Как видно из корреляторов (20) и (21), в ультрарелятивистском случае, когда излучение направлено, в основном, вдоль скорости частицы, сила $F_{\|}$ действует в направлении, параллельном скорости, а $F_{\perp}$ — в направлении, перпендикулярном ей.

В нерелятивистском пределе вкладом силы $F_{\|}$ можно пренебречь, так как он содержит две лишние степени скорости по сравнению с вкладом силы $F_{\perp}$. В ультрарелятивистском же случае, наоборот, вклад силы $F_{\|}$ является основным, так как содержит в качестве множителя частоту излучаемых фотонов $|k|$, которая много больше характерных частот движения частицы во внешних потенциалах.

В рассматриваемом нами квазиклассическом пределе, когда ширина волнового пакета считается малой по сравнению с масштабами изменения внешних потенциалов, можно считать траекторию $\bar{q}$ в (20) и (21) классической траекторией, полученной из решения классических уравнений движения без учета поправок, связанных с флуктуационными силами.

Физический смысл флуктуационных сил достаточно ясен. Они учитывают квантовый, флуктуационный характер излучения. В задаче о движении электрона в циклическом ускорителе подобные силы были введены в работах [1, 2] из статистических соображений на основании того факта, что различные фотоны излучаются независимо друг от друга. В данной работе флуктуационные силы возникли сами собой из точного квантового расчета.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ

В функциональных интегралах (6) введем новые переменные $\bar{q}$ и δq вместо $q(\tau)$ и $q'(\tau)$:

$$\bar{q}(\tau) = \left(q(\tau) + q'(\tau)\right)/2, \quad \delta q(\tau) = \left(q(\tau) - q'(\tau)\right). \quad (22)$$

В терминах новых переменных выражение для распределения плотности частицы (6) принимает вид

$$\rho\left(\bar{q}_f,t\right) = \int d\bar{q}_i d(\delta q_i)\psi\left(\bar{q}_i + \frac{\delta q_i}{2}\right)\psi^*\left(\bar{q}_i - \frac{\delta q_i}{2}\right)\int DF_{\parallel}DF_{\perp}P_{\parallel}[F_{\parallel}]P_{\perp}[F_{\perp}]\times$$
$$\times\int D\bar{q}D(\delta q)\exp\left(iS_{eff}\left[\bar{q},\delta q\right]\right). \tag{23}$$

Функциональные интегралы в (23) берутся по траекториям $\bar{q}(\tau)$ и $\delta q(\tau)$ с граничными точками $\bar{q}(0) = \bar{q}_i$, $\bar{q}(t) = \bar{q}_f$, $\delta q(0) = \delta q_i$ и $\delta q(t) = 0$. Эффективное действие S_{eff} в линейном по δq приближении получено в предыдущем разделе (см. (10), (14) и (19)):

$$S_{eff}\left[\bar{q},\delta q\right] = \int\limits_0^t d\tau\left\{\delta\dot{q}\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} + \delta q\left(eE(\bar{q}) + e\left[v,H(\bar{q})\right] + F_{fr} + F_{\parallel}\right) - \right.$$
$$\left. - \delta\dot{q}F_{\perp} + e\frac{d}{d\tau}\left(\delta q A^{(ex)}(\bar{q})\right)\right\}, \tag{24}$$

где $v(\tau) \equiv \dot{\bar{q}}(\tau)$, $E(\bar{q})$ и $H(\bar{q})$ — внешние электрические и магнитные поля, F_{fr} — сила радиационного трения:

$$F_{fr} = \frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\ddot{v}}{1-v^2} + 3\frac{\dot{v}(v\dot{v})}{(1-v^2)^2} + \frac{v(v\ddot{v})}{(1-v^2)^2} + 3\frac{v(v\dot{v})^2}{(1-v^2)^3}\right). \tag{25}$$

Функциональные интегралы по траекториям электрона в (23) мы будем брать методом перевала в квазиклассическом приближении. Перевальная точка эффективного действия S_{eff} определяется из уравнений

$$\frac{\delta}{\delta(\delta q)}S_{eff}\left[\bar{q}_{cl},\delta q_{cl}\right] = 0, \qquad \frac{\delta}{\delta\bar{q}}S_{eff}\left[\bar{q}_{cl},\delta q_{cl}\right] = 0 \tag{26}$$

с соответствующими граничными условиями. Первое из уравнений (26) не зависит от δq_{cl} и имеет вид классического уравнения движения во внешних полях с силой радиационного трения и флуктуационными силами в правой части

$$\frac{d}{dt}\frac{M\dot{\bar{q}}}{\sqrt{1-\dot{\bar{q}}^2}} = eE + e\left[\dot{\bar{q}},H\right] + F_{fr} + F_{\parallel} + \dot{F}_{\perp}. \tag{27}$$

Перевальное значение эффективного действия (24), вычисленное вдоль классической траектории $\bar{q}_{cl}$, не зависит от δq_{cl} и представляет собой чисто поверхностный член

$$S_{eff}\left[\bar{q}_{cl}\right] = -\delta q_i\left(p_i + eA^{(ex)}(\bar{q}_i) - F_{\perp}(0)\right), \tag{28}$$

где $p_i = p_i(\bar{q}_i,\bar{q}_f;t;F_{\parallel},F_{\perp})$ — это начальный импульс классической траектории, которая удовлетворяет уравнению (27) с граничными условиями $\bar{q}(0) = \bar{q}_i$ и $\bar{q}(t) = \bar{q}_f$.

Можно убедиться, что функциональные интегралы по траекториям частицы (23), записанные в терминах сдвинутых на классические величины переменных $(\bar{q} - \bar{q}_{cl})$ и $(\delta q - \delta q_{cl})$, в квазиклассическом приближении не зависят от флуктуационных сил и граничных точек $\bar{q}_f$, $\bar{q}_i$, δq_i и сводятся к некоторой функции, которая зависит только от времени.

Таким образом, в выражении для распределения плотности электрона остаются функциональные интегралы только по флуктуационным силам:

$$\rho\left(\bar{q}_f, t\right) = \tilde{N}(t) \int DF_{\parallel} DF_{\perp} P_{\parallel}[F_{\parallel}] P_{\perp}[F_{\perp}] \int d\bar{q}_i f\left(\bar{q}_i, p_i\left(\bar{q}_i, \bar{q}_f; t; F_{\parallel}, F_{\perp}\right)\right), \qquad (29)$$

где функция $f(q,p)$ имеет смысл начальной функции распределения в фазовом пространстве:

$$f(q,p) = \int d(\delta q) \psi^* \left(q - \frac{\delta q}{2}\right) \psi\left(q + \frac{\delta q}{2}\right) \exp\left\{-i\delta q\left(p + eA^{(ex)}(q) - F_{\perp}(0)\right)\right\}. \qquad (30)$$

Появление в экспоненте в (30) члена, пропорционального $F_{\perp}(0)$, можно объяснить тем, что, как видно из уравнения (27), в действительности силой является производная по времени $\dot{F}_{\perp}$, и величина $(-F_{\perp}/e)$, тем самым, имеет смысл добавки к векторному потенциалу внешнего поля.

Как видно из (29), при каждой фиксированной конфигурации флуктуационных сил волновой пакет имеет распределение плотности, совпадающее с распределением плотности пучка классических частиц, который в начальный момент времени задавался бы функцией распределения в фазовом пространстве (30) и в последующие моменты времени эволюционировал бы в соответствии с классическим уравнением движения (27) с силой радиационного трения и флуктуационными силами в правой части.

Таким образом, в данном разделе мы получили замкнутое выражение (29), (30) для распределения плотности волнового пакета заряженной скалярной частицы, движущейся в произвольных внешних потенциалах при произвольной начальной температуре квантового электромагнитного поля (температура входит в выражения для корреляторов (20) и (21)).

Напомним также об основных допущениях, сделанных нами при выводе формулы (29) для распределения плотности волнового пакета. В сопутствующей частице системе отсчета характерная энергия излучаемых фотонов, а также обратная ширина волнового пакета, выраженная в единицах энергии, должны быть много меньше, чем энергия покоя частицы Mc^2 (только тогда имеет смысл говорить об одной частице). С другой стороны, ширина волнового пакета должна быть мала по сравнению с масштабами изменения внешних потенциалов (только тогда можно говорить о волновом пакете).

Расчет предложенным методом ширины волнового пакета для какой-либо конкретной системы внешних полей не представляет принципиальной сложности, так как весь расчет сводится к решению классического уравнения движения (27). В приближении малого отклонения δq от траектории q_{cl} центра пучка классических частиц, заданного в начальный момент времени функцией распределения в фазовом пространстве (30), уравнение (27) становится линейным по этому отклонению с флуктуационными силами в правой части. Решение получившегося линейного уравнения с правой частью разбивается на частное решение δq_p, которое зависит от флуктуационных сил; и на общее решение линейного уравнения (с нулем в правой части), которое удовлетворяет соответствующим граничным условиям. Так мы получим выражение (аналогичное выражению (41) следующего раздела), которое связывает граничные точки $\bar{q}_i$, $\bar{q}_f$ с начальным импульсом p_i (который является аргументом функции распределения в (29)), причем конечная точка $\bar{q}_f$ и частное решение δq_p будут входить в выражение для p_i только в комбинации $(\delta q_f - \delta q_p)$, где $\delta q_f \equiv \bar{q}_f - q_{cl}$ — отклонение конечной точки от классической траектории. Так как частное решение δq_p является единственной величиной, которая зависит от флуктуационных сил, то при каждой фиксированной конфигурации этих сил волновой пакет имеет некоторое «собственное» относительное распределение плотности, которое не зависит от флуктуационных сил и определяется начальной волновой функцией. Роль флуктуационных сил сводится просто к сдвигу полученного (классического!) распределения как целого.

Таким образом, квадрат ширины пакета (по осям $j = x, y, z$)

$$\sigma_j^2 \equiv \left\langle \int d^3q_f \rho(q_f, t)(\delta q_f^j)^2 \right\rangle$$

разделяется на так называемые «броуновскую» и «собственную» части. «Броуновский» вклад в квадрат ширины пакета определяется флуктуациями излучения и дается средним по флуктуационным силам от квадрата полученного частного решения $(\sigma_j^{(Br)})^2 \equiv \equiv \langle (\delta q_p^j)^2 \rangle$. «Собственная» же ширина не зависит от флуктуационных сил и, таким образом, совпадает с шириной пучка классических частиц, который в начальный момент времени задавался бы функцией распределения в фазовом пространстве (30) и в последующие моменты времени эволюционировал бы в соответствии с классическим уравнением движения (27) с силой радиационного трения, но без флуктуационных сил в правой части.

4. ШИРИНА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ЭЛЕКТРОНА В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ

В этом разделе мы попытаемся использовать полученные выше общие формулы для расчета ширины волнового пакета ультрарелятивистского электрона, движущегося в циклическом ускорителе — синхротроне со слабой фокусировкой.

Пусть электрон движется в однородном магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, направленном по оси z. Радиус R равновесной траектории определяет скорость электрона $v_0 = R\omega$ и ларморовскую частоту вращения $\omega = (eH/M)\sqrt{1 - v_0^2}$. Пусть в малом интервале углов $\Delta\varphi$ около некоторого угла β, отсчитанного в плоскости вращения xy от полуоси x по часовой стрелке ($\varphi \in [\beta - \Delta\varphi/2, \beta + \Delta\varphi/2]$), отлично от нуля ускоряющее электрическое поле, гармонически (с ларморовской частотой ω) зависящее от времени. В данном интервале углов электрическое поле описывается потенциалом

$$U(q_x, q_y, \tau) = E_0(R + r)(\varphi - \beta)\cos\omega\tau,$$

где $R + r \equiv (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$ — радиус и φ — угол в цилиндрических координатах. Амплитуда электрического поля E_0 выбирается так, что при движении по равновесной траектории из точки $\mathbf{R} = (R, 0, 0)$ электрон приобретает на ускоряющем участке энергию, которая в точности компенсирует средние потери на радиационное трение:

$$|e|E_0 R\Delta\varphi\cos\beta = \frac{2\pi}{\omega} W_0. \tag{31}$$

Здесь $W_0 = (2/3)\alpha\omega^2 v_0^2 \gamma^4$ — средняя мощность радиационных потерь [7], а $\gamma = = (1 - v_0^2)^{-1/2}$ — (большой) релятивистский фактор.

Движение вдоль оси z регулируется потенциалом общего вида $U_z(q_z)$, который имеет абсолютный минимум в точке $q_z = 0$. Таким образом, действие электрона $S_0[q]$ имеет вид

$$S_0[q] = \int_0^t d\tau \left\{ -M\sqrt{1-\dot{q}^2} + \frac{1}{2} e\,\dot{\mathbf{q}}[\mathbf{H}\mathbf{q}] - eU(q_x, q_y, \tau) - eU_z(q_z) \right\}, \tag{32}$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Как было сказано в конце второго раздела, в интересующем нас ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ силу $F_\perp$ можно не принимать во внимание. Вклад этой силы меньше вклада силы $F_\parallel$ по крайней мере в $k_{ch}^2/\omega^2 \sim \gamma^6$ раз, где $k_{ch} \sim \omega\gamma^3$ — характерная частота излучаемых в ускорителе фотонов.

Пусть первоначально электрон находился в чистом состоянии, описываемом гауссовым волновым пакетом с центром в точке $\mathbf{R}$, шириной σ_0 и импульсом $\mathbf{p}_0 = (0, Mv_0\gamma, 0)$:

$$\psi(q) = (2\pi\sigma_0^2)^{-3/2} \exp\left\{ i\mathbf{q}\left(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}e[\mathbf{H}\mathbf{R}]\right) - \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{R})^2}{4\sigma_0^2} \right\}. \tag{33}$$

Второе слагаемое в показателе степени экспоненты учитывает тот факт, что в присутствии магнитного поля оператор импульса нужно «удлинять»:

$$\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q} - eA^{(ex)}(q).$$

Волновая функция (33) задает функцию распределения в фазовом пространстве (см. (30)):

$$f(q, p_i) \propto \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{R})^2}{2\sigma_0^2} - 2\sigma_0^2 \left(p_i - p_0 + \frac{1}{2}e[\mathbf{H}(\mathbf{q}-\mathbf{R})]\right)^2 \right\}. \tag{34}$$

Теперь нам нужно выразить начальный импульс классической траектории p_i через граничные точки, т. е. решить уравнение движения (27). Для этого перейдем к новым переменным — отклонению от равновесного радиуса r и отклонению от равновесной фазы ϕ:

$$\bar{q}_x = (R + r)\cos(\omega\tau + \phi), \quad \bar{q}_y = (R + r)\sin(\omega\tau + \phi). \tag{35}$$

Так как отклонения от равновесной траектории малы, то движения электрона вдоль оси z и в плоскости xy можно считать не зависящими друг от друга. Следовательно, распределение плотности факторизуется. В дальнейшем нас будет интересовать распределение плотности электрона $\rho(r_f, \phi_f, t)$ только в xy-плоскости.

В линейном по малым отклонениям r и ϕ приближении классическое уравнение движения (27) выглядит довольно громоздко:

$$\ddot{r}\,\gamma = \omega R\,\dot{\phi}\,\gamma^3 + v_0^2\omega^2 r\gamma^3 + \frac{2\alpha}{3M}\left\{ \gamma^2\,\dddot{r} - \gamma^4\left(3\,\dot{r}\,\omega^2 + 3\omega R\,\ddot{\phi} + v_0^2\,\dot{r}\,\omega^2\right)\right\} + f_1,$$

$$R\ddot{\phi}\gamma^3 = -\omega\dot{r}\gamma^3 + \frac{2\alpha}{3M}\left\{\gamma^4\left(3\omega\ddot{r} - 3R\dot{\phi}\omega^2 - r\omega^3 + R\dddot{\phi}\right) - 4v_0^2\omega^2\gamma^6\left(R\dot{\phi} + r\omega\right) + \right.$$
$$\left. + v_0\omega^2\gamma^4\left(-1 + \frac{\cos(\phi-\beta)}{\cos\beta}\right)\right\} + f_2, \tag{36}$$

где

$$f_1 = \left(F_{\|x}\cos\omega\tau + F_{\|y}\sin\omega\tau\right)/M, \quad f_2 = \left(-F_{\|x}\sin\omega\tau + F_{\|y}\cos\omega\tau\right)/M. \tag{37}$$

В уравнении (36) оставлена только первая гармоника из разложения Фурье по углу φ ускоряющего электрического поля. Вклады остальных гармоник (например, $\sim \cos 2\varphi\cos\omega\tau$) обращаются в нуль при усреднении по периоду обращения.

Запишем уравнение (36) в матричной форме

$$\hat{M}_{ij}(\tau)\varphi_j(\tau) = f_i(\tau). \tag{38}$$

Здесь индексы i, j пробегают значения 1, 2 и $\varphi_i \equiv (r(\tau), R\phi(\tau))$. Однородное уравнение ($f_i = 0$) имеет четыре решения:

$$\begin{aligned} &\varphi_i^{(1)}(\tau) = (\cos\omega\tau, -\sin\omega\tau)\, e^{-\gamma_r\tau}, \quad \varphi_i^{(3)}(\tau) = \left(\cos\Omega\tau, -\frac{v_0^2\omega}{\Omega}\sin\Omega\tau\right) e^{-\gamma_\phi\tau}, \\ &\varphi_i^{(2)}(\tau) = (\sin\omega\tau, \cos\omega\tau)\, e^{-\gamma_r\tau}, \quad \varphi_i^{(4)}(\tau) = \left(\sin\Omega\tau, \frac{v_0^2\omega}{\Omega}\cos\Omega\tau\right) e^{-\gamma_\phi\tau}. \end{aligned} \tag{39}$$

Первые два решения представляют собой так называемые радиальные бетатронные колебания с ларморовской частотой ω и константой затухания γ_r. Эти решения соответствуют сдвигу центра орбиты в однородном магнитном поле и являются затухающими вследствие правильно выбранной зависимости амплитуды ускоряющего напряжения от радиального отклонения r:

$$U \propto R + ar \quad \text{с} \quad a = 1.$$

Как легко понять, в случае $a = 0$ (приобретенная на ускоряющем промежутке энергия не зависит от радиального отклонения) радиальные колебания были бы незатухающими ($\gamma_r = 0$), а при $a < 0$ эти колебания становятся экспоненциально растущими ($\gamma_r < 0$). Третье и четвертое решения (39) соответствуют радиально-фазовым синхротронным колебаниям с частотой $\Omega \ll \omega$ и константой затухания γ_ϕ. Для радиальной константы затухания γ_r, фазовой константы затухания γ_ϕ и частоты синхротронных колебаний можно получить следующие выражения:

$$\gamma_r = \frac{\alpha}{3M}\omega^2\gamma^3, \quad \gamma_\phi = \frac{2\alpha}{3M}\omega^2\gamma^3, \quad \Omega^2 = \frac{2\alpha}{3M}\omega^3\gamma^3\,\mathrm{tg}\,\beta. \tag{40}$$

Решение неоднородного уравнения (38) с заданными начальными условиями в приближении $\gamma_r, \gamma_\phi \ll \Omega \ll \omega$ имеет вид

$$\varphi_i(t) = \left(r(0) - \frac{\delta p_y}{\omega M\gamma}\right)\varphi_i^{(1)} + \left(R\phi(0) + \frac{\delta p_x}{\omega M\gamma}\right)\varphi_i^{(2)} + \frac{\delta p_y}{\omega M\gamma}\varphi_i^{(3)} - \frac{\Omega\delta p_x}{v_0^2\omega^2 M\gamma}\varphi_i^{(4)} + \varphi_{pi}, \tag{41}$$

где $\delta p = p_i - p_0$ — отклонение начального импульса классической траектории p_i от равновесного импульса p_0:

$$\delta p_x = \gamma M\left(\dot{r}(0) - \omega R\phi(0)\right), \quad \delta p_y = \gamma^3 M\left(R\dot{\phi}(0) + r(0)\omega\right).$$

Последнее слагаемое в правой части (41) $\varphi_{pi}(t) = (r_p(t), R\phi_p(t))$ представляет собой частное решение уравнения (38) с нулевыми начальными условиями $\varphi_{pi}(0) = \dot{\varphi}_{pi}(0) = 0$. Это решение можно найти с помощью техники функций Грина

$$\varphi_{pi}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_{ij}(\tau,\tau') f_j(\tau'). \tag{42}$$

Функция Грина $G_{ij}(\tau,\tau')$ должна удовлетворять уравнению

$$\hat{M}_{ij}(\tau) G_{jk}(\tau,\tau') = \delta_{ik}\delta(\tau-\tau') \tag{43}$$

с начальными условиями

$$G_{ij}(0,\tau') = 0, \quad \frac{d}{d\tau} G_{ij}(\tau,\tau')\Big|_{\tau=0} = 0.$$

Записывая функцию Грина в виде разложения по решениям однородного уравнения (39) при $\Delta\tau \equiv \tau - \tau' > 0$, получим

$$G_{ij}(\tau,\tau') = \begin{pmatrix} \sin\omega\Delta\tau & -\cos\omega\Delta\tau \\ \cos\omega\Delta\tau & \sin\omega\Delta\tau \end{pmatrix} \frac{e^{-\gamma_r\Delta\tau}}{\omega\gamma} - \begin{pmatrix} 0 & -\cos\Omega\Delta\tau \\ \cos\Omega\Delta\tau & \dfrac{v_0^2\omega}{\Omega}\sin\Omega\Delta\tau \end{pmatrix} \frac{e^{-\gamma_\phi\Delta\tau}}{\omega\gamma}. \tag{44}$$

Чтобы не получать громоздких формул в ответе, предположим, что начальная ширина пакета достаточно мала $\sigma_0^2\omega M \ll 1$. Тогда на временах порядка времени одного оборота ширина волнового пакета станет много больше чем начальная ширина σ_0, и мы можем пренебречь слагаемыми пропорциональными начальным отклонениям $r(0)$ и $\phi(0)$ в выражении (41), а также членом $\propto e[\mathbf{H}, \mathbf{q} - \mathbf{R}]$ в (34). При этом интеграл по $\bar{q}_i$ в (29) становится тривиальным и окончательный ответ для распределения плотности волнового пакета электрона в плоскости xy принимает вид

$$\rho(r_f,\phi_f,t) = N(t)\int DF_{\parallel}(\tau) P_{\parallel}[F_{\parallel}]\times$$

$$\times\exp\left\{-2\frac{(M\sigma_0\gamma\omega)^2}{(A^2+BC)^2}\left(\left[A(r_f-r_p)+BR(\phi_f-\phi_p)\right]^2+\left[C(r_f-r_p)-AR(\phi_f-\phi_p)\right]^2\right)\right\}, \tag{45}$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\cos\omega t e^{-\gamma_r t} + \cos\Omega t e^{-\gamma_\phi t}, \quad B = \sin\omega t e^{-\gamma_r t}, \\ C &= \sin\omega t e^{-\gamma_r t} - \frac{\omega v_0^2}{\Omega}\sin\Omega t e^{-\gamma_\phi t}. \end{aligned} \tag{46}$$

Как видно из (45), при любой фиксированной конфигурации $F_{\parallel}(\tau)$ волновой пакет имеет некоторое «собственное» относительное распределение плотности, которое не зависит от $F_{\parallel}$. От флуктуационных сил зависит только координата (r_p,ϕ_p) центра этого распределения как целого. Как было сказано в конце предыдущего раздела, такое поведение распределения плотности имеет общий характер и не зависит от конкретного вида внешних потенциалов.

Для радиальной и угловой дисперсий координаты электрона получим

$$\sigma_r^2(t) \equiv \frac{\int dr_f d(R\phi_f)\rho(r_f,\phi_f,t)r_f^2}{\int dr_f d(R\phi_f)\rho(r_f,\phi_f,t)} = \left(\sigma_r^{(own)}\right)^2 + \langle r_p^2(t)\rangle, \tag{47}$$

$$\sigma_\phi^2(t) \equiv \frac{\int dr_f d(R\phi_f)\rho(r_f,\phi_f,t)(R\phi_f)^2}{\int dr_f d(R\phi_f)\rho(r_f,\phi_f,t)} = \left(\sigma_\phi^{(own)}\right)^2 + \left\langle \left(R\phi_p(t)\right)^2\right\rangle. \tag{48}$$

«Собственные» ширины $\sigma_r^{(own)}$ и $\sigma_\phi^{(own)}$ определяются начальным разбросом скоростей и экспоненциально затухают со временем вследствие классического радиационного трения:

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_r^{(own)}\right)^2 &= (2\sigma_0 M\gamma\omega)^{-2}\left\{\left(\cos\omega t e^{-\gamma_r t} - \cos\Omega t e^{-\gamma_\phi t}\right)^2 + (\sin\omega t e^{-\gamma_r t})^2\right\}, \\
\left(\sigma_\phi^{(own)}\right)^2 &= (2\sigma_0 M\gamma\omega)^{-2}\times \\
&\times\left\{\left(\cos\omega t e^{-\gamma_r t} - \cos\Omega t e^{-\gamma_\phi t}\right)^2 + \left(\sin\omega t e^{-\gamma_r t} - \frac{\omega v_0^2}{\Omega}\sin\Omega t e^{-\gamma_\phi t}\right)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

«Броуновские» вклады в радиальную и угловую ширины электрона $\sigma_r^{(Br)}$ и $\sigma_\phi^{(Br)}$ определяются квантовыми флуктуациями излучения

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_r^{(Br)}\right)^2 \equiv \langle r_p^2(t)\rangle &= \frac{1}{2(M\gamma\omega)^2}\left(\frac{1-e^{-2\gamma_r t}}{2\gamma_r} + \frac{1-e^{-2\gamma_\phi t}}{2\gamma_\phi}\right)\int d^3k \,\mathrm{cth}\left(\frac{|k|}{2k_BT}\right)\frac{dI}{d^3k}|k|, \\
\left(\sigma_\phi^{(Br)}\right)^2 \equiv \langle (R\phi_p(t))^2\rangle &= \frac{1}{2(M\gamma\Omega)^2}\,\frac{1-e^{-2\gamma_\phi t}}{2\gamma_\phi}\int d^3k \,\mathrm{cth}\left(\frac{|k|}{2k_BT}\right)\frac{dI}{d^3k}|k|.
\end{aligned} \tag{50}$$

Для усреднения по силам $F_\parallel$ квадратов частных решений (42) здесь были использованы выражение (44) для функции Грина и формула (20) для коррелятора флуктуационных сил.

Выражение для функции dI/d^3k (50) совпадает с хорошо известной формулой для классической интенсивности излучения [8]

$$\frac{dI}{d^3k} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left\{\dot{q}(\tau)\,\dot{q}(0) - \left(\dot{q}(\tau)n\right)\left(\dot{q}(0)n\right)\right\}\exp\left\{i|k|\tau - i\mathbf{k}(\mathbf{q}(\tau)-\mathbf{q}(0))\right\}, \tag{51}$$

где $q(\tau)$ — равновесная траектория электрона. При любых разумных температурах выполняется сильное неравенство $k_BT \ll k_{ch} \sim \omega\gamma^3$. В этом пределе выражение для интеграла в (50) известно [1]:

$$\int d^3k\frac{dI}{d^3k}|k| = \frac{55}{24\sqrt{3}}\alpha\omega^3\gamma^7. \tag{52}$$

В рассматриваемой задаче структурой коррелятора (20) на временах порядка времени испускания фотона $|\tau - s| \sim (\omega\gamma)^{-1}$ можно пренебречь, так как при вычислении средних $\langle r_p^2(t)\rangle$ и $\langle(R\phi_p(t))^2\rangle$ данный коррелятор входит в подынтегральное выражение при интегрировании по τ и s вместе с функциями, которые имеют характерный масштаб времени $\sim 1/\omega$ или же $\sim 1/\Omega$. С учетом этого замечания выражение для коррелятора (20) можно упростить:

$$\langle F_{\parallel}(\tau)F_{\parallel}(s)\rangle = \delta(\tau - s)\int d^3k \frac{dI}{d^3k}|k|. \qquad (53)$$

Как видно, коррелятор (53) совпадает с коррелятором флуктуационных сил, введенных в работах [1, 2] на основании статистических соображений. Таким образом, выражения для «броуновских» вкладов в ширину пакета (50), полученные из строгого квантового расчета, совпадают с соответствующими выражениями, полученными полуклассическим методом.

Оценим теперь область применимости полученных результатов. Энергия излучаемых фотонов $\sim \omega\gamma^3$ должна быть много меньше, чем энергия электрона $E = M\gamma$. Это приводит к следующему ограничению сверху на энергию электрона:

$$E \ll E_{1/2} \equiv Mc^2(RMc/\hbar)^{1/2}.$$

Радиус ускорителя для оценки примем равным десяти метрам. Видно, что для всех существующих на сегодня ускорителей данное ограничение на энергию электрона выполняется $E \ll E_{1/2} \sim 10^6$ МэВ.

Что касается ограничения на ширину пакета, то, как видно из (50), наши результаты верны только на временах $t \ll 1/\gamma_\phi$. На временах $t \sim 1/\gamma_\phi \sim MR^2/\alpha\hbar\gamma^3 \sim 10^{-1}$ с (при значении параметров $R \sim 10^3$ см, $\gamma \sim 10^3$) угловая «броуновская» ширина достигает значения, сравнимого с радиусом ускорителя $\sigma_\phi^{(Br)} \simeq R/\sqrt{\alpha\gamma}$. Это является основным недостатком ускорителей со слабой фокусировкой. Для уменьшения углового разброса пучка до размеров существенно меньших чем размеры ускорителя используют ускорители с сильной фокусировкой [9].

«Собственный» вклад в угловую ширину пакета (49) обратно пропорционален начальной ширине пакета и быстро спадает с увеличением релятивистского фактора γ:

$$\sigma_\phi^{(own)} \sim \left(\frac{R^3\hbar}{\sigma_0^2 Mc\alpha\gamma^5}\right)^{1/2}.$$

Для характерных значений параметров $R \sim 10^3$ см, $\gamma \sim 10^3$ и $\sigma_0 \sim 10^{-4}$ см угловая «собственная» ширина имеет порядок $\sigma_\phi^{(own)} \sim 10^{-3}$ см.

Характерные значения «броуновской» и «собственной» радиальных ширин меньше соответствующих угловых ширин в $\omega/\Omega \sim (RMc/\hbar\alpha\gamma^3)^{1/2} \sim 10^3$ раз (при $R \sim 10^3$ см, $\gamma \sim 10^3$).

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Колоколову за предложение темы и полезные обсуждения. Также я благодарен И. Б. Хрипловичу за внимание к работе и ценные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS № 93-2492-ext.

Литература

1. M. Sands, Rhys. Rev. **97**, 470 (1955).

2. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ЖЭТФ **30**, 205 (1956).
3. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ **25**, 698 (1953).
4. R. P. Feynman and F. L. Vernon, Annals of Physics **24**, 118 (1963).
5. Р. П. Фейнман, А. Р. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
6. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Physica A **121**, 587 (1983).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
8. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989), с. 432.
9. С. А. Хейфец, *Электронный синхротрон*, Изд-во АН АрмССР, Ереван (1963).