ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 4, стр. 1410–1425

МОДЕЛЬ ИЗ ДВУХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ P-СПИНОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И С ФИКСИРОВАННОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ МЕЖДУ ИХ СПИНОВЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ

А. Э. Аллахвердян, Д. Б. Саакян

Ереванский физический институт
375036, Ереван, Армения
Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 1996 г.

Бинарные спины каждой из подсистем взаимодействуют в пределах своей подсистемы. Скалярное произведение между спиновыми конфигурациями обеих подсистем фиксировано. Возникает нетривиальная интерференция между подсистемами, когда (при некоторых значениях параметров) они смогут лишь одновременно скатываться в спин-стекольную фазу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Дерриды [1] для P-спинового стекла является простейшей системой, точно решаемой при однократном нарушении репличной симметрии [2]. Она может быть использована также для оптимального кодирования [3–6]. В данной работе мы рассматриваем систему, состоящую из двух подсистем с P-спиновым взаимодействием, в каждой из них для наборов ± 1 спинов σ_i^1, $i = 1, \ldots, N$, и σ_i^2, $i = 1, \ldots, N$, соответственно. При этом ставится ограничение

$$\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^1 \sigma_i^2 = C \tag{1}$$

(C — параметр). Общий гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_P \le N} \left(\sigma_{i_1}^1 \ldots \sigma_{i_P}^1 j_{i_1 \ldots i_P}^1 + \sigma_{i_1}^2 \ldots \sigma_{i_P}^2 j_{i_1 \ldots i_P}^2 \right) \sqrt{\frac{N}{C_N^P}}, \tag{2}$$

где C_N^P — биномиальные коэффициенты, j^1 и j^2 — гауссовы случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями $1/2$, $J^2/2$ соответственно. Мы берем параметр $J \le 1$. Параметр C в (1) меняется в пределах $0 \le C \le 1$. Когда $C = 0$, мы имеем две независимые системы. При высоких температурах обе подсистемы будут находиться в парамагнитной фазе. Затем, при понижении температуры, первая подсистема перейдет в спин-стекольную фазу, а вторая останется в парамагнитной. Наконец, произойдет второй фазовый переход и вторая подсистема тоже перейдет в спин-стекольное состояние. Такая качественная картина сохранится в нашей модели при ненулевых (меньше критического) значениях C.

При этом мы сталкиваемся с ситуацией, когда система точно решается во втором порядке нарушения репличной симметрии. Когда $C = 1$, мы возвращаемся к обычной модели Дерриды, в которой

$$\langle (j^1_{i_1 \ldots i_P})^2 \rangle = \frac{1 + J^2}{2}. \tag{3}$$

В такой системе всего один фазовый переход и однократное нарушение репличной симметрии. Когда одна из подсистем находится в ферромагнитной или спин-стекольной фазе, термодинамические свойства другой подсистемы будут соответствовать обычной модели Дерриды, в которой не 2^N, а всего лишь

$$\exp\left[-N\left(\frac{1+C}{2}\ln\frac{1+C}{2} + \frac{1+C}{2}\ln\frac{1+C}{2}\right)\right] \tag{4}$$

конфигураций. Термодинамические свойства модели Дерриды можно вычислить по следующему принципу: при высоких температурах провести высокотемпературное разложение и вычислить свободную энергию для парамагнитной фазы. Затем продолжить выражение для свободной энергии от температуры, где энтропия обращается в нуль, до нулевой температуры. Ниже мы вычислим свободную энергию строго, методом среднего поля. Все результаты, полученные нами исходя из названных выше простых принципов, совпадают с тем, что мы ожидали.

В первых пяти разделах мы будем исследовать модель методом среднего поля, а в двух последних выведем полученные результаты методом, применяемым в модели случайных энергий.

2. ПАРАМАГНИТНАЯ ФАЗА

Решая модель (1)–(3) с помощью реплик, для статсуммы Z^n получаем следующее выражение:

$$\langle Z^n \rangle = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{\alpha<\beta} dQ_{\alpha\beta}\delta\left(C - \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)\delta\left(Q^1_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^1_{\alpha i}\sigma^1_{\beta i}\right) \times$$
$$\times\,\delta\left(Q^2_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2_{\alpha i}\sigma^2_{\beta i}\right)\exp\left\{Nn\frac{B^2}{4}\left[\sum_{\alpha,\beta}\sum_{s=1}^{2}(J_s)^2(Q^s_{\alpha\beta})^P\right]\right\}, \tag{5}$$

где B — обратная температура, $Q_{\alpha,\beta}$ — параметры порядка, а

$$J_1 = 1, \quad J_2 = J. \tag{6}$$

Вводя интегральное представление для δ-функции, получим аналогично [2]

$$\langle Z^n \rangle = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dk}{2\pi}\prod_{\alpha<\beta}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{NdQ_{\alpha\beta}d\lambda_{\alpha\beta}}{2\pi}\exp\left\{N\left\{\frac{B^2}{4}\left[(1+J^2)n + \sum_{\alpha\neq\beta}(Q^1_{\alpha\beta})^P + J^2(Q^2_{\alpha\beta})^P\right] -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{s=1}^{2}\sum_{\alpha<\beta}Q^s_{\alpha\beta}\lambda^s_{\alpha\beta}\sum_{\alpha}CK_\alpha + \ln\sum_{\sigma^1_\alpha\sigma^2_\alpha}\exp\left[\sum_{s=1}^{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\lambda^s_{\alpha\beta}\sigma^s_\alpha\sigma^s_\beta - \sum_\alpha K_\alpha\sigma^1_\alpha\sigma^2_\beta\right]\right\}\right\}. \tag{7}$$

В парамагнитной фазе мы берем

$$\lambda^s_{\alpha\beta} = \lambda^s, \quad Q^s_{\alpha\beta} = q^s, \quad K_\alpha = K. \tag{8}$$

Здесь $\lambda_{\alpha\beta}$ — лагранжевы множители в выражении для δ-функции. Для $F = \langle \ln Z \rangle / N$ получаем выражение

$$\frac{B^2(1+J^2)}{4} + \frac{B^2}{4}\left[q_1^P + J^2 q_2^P\right] - KC + \frac{\lambda^1 q^1 + \lambda^2 q^2}{2} - \frac{\lambda^1 + \lambda^2}{2} + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} Dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ds \ln\left[2e^K \operatorname{ch}\left(r\sqrt{\lambda^1} + s\sqrt{\lambda^2}\right) + 2e^{-K}\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\lambda^1} - s\sqrt{\lambda^2}\right)\right], \tag{9}$$

где

$$Dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-r^2/2), \quad Ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-s^2/2), \tag{10}$$

r, s — вспомогательные переменные в преобразовании Стратановича. Для λ_1, λ_2 получаем, дифференцируя (9) по q_1, q_2:

$$PB^2 q_1^{P-1}/2 = \lambda_1, \quad PJ^2B^2 q_2^{P-1}/2 = \lambda_2. \tag{11}$$

В парамагнитной фазе должно быть $q_1 < 1$, $q_2 < 1$. Отсюда следует, что

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \tag{12}$$

После подстановки (12) в (9) интегралы легко берутся, и мы получаем (положив $q_1 = 0$, $q_2 = 0$)

$$F = B^2(1+J^2)/4 - KC + \ln 4 \operatorname{ch} K, \tag{13}$$

где K удовлетворяет уравнению

$$C = \operatorname{th} K.$$

Окончательно для свободной энергии получаем

$$F = \frac{1}{N}\langle \ln Z \rangle = \frac{4(1+J^2)}{B^2} + [1 + h(C)]\ln 2, \tag{14}$$

где

$$h(C) = \left[-\frac{1+C}{2}\ln\frac{1+C}{2} - \frac{1-C}{2}\ln\frac{1-C}{2}\right] / \ln 2. \tag{15}$$

Когда $C = 0$, свободная энергия (14) представляет собой сумму свободных энергий для двух независимых моделей. При $C = 1$ получаем свободную энергию для одной модели с эффективной константой.

3. СПИН-СТЕКОЛЬНАЯ ФАЗА В ДВУХ ПОДСИСТЕМАХ

Мы рассматриваем случай, когда репличная симметрия нарушается однократно и обе подсистемы одновременно скатываются в фазу спинового стекла. Как выяснится в дальнейшем, такая имеет место при

$$J^2 > h. \tag{16}$$

Аналогично [2], введем переменные $\lambda_0^1, \lambda_1^1, \lambda_0^2, \lambda_1^2, q_0^1, q_0^2, q_1^1, q_1^2$, где верхние индексы соответствуют номеру подсистемы, тогда получим для свободной энергии

$$\begin{aligned}
F = {} & \frac{B^2}{4}(1+J^2) + \frac{B^2}{4}\left[-m(q_0^1)^P + (m-1)(q_1^1)^P\right] + \frac{B^2 J^2}{4}\left[-m(q_0^2)^P + (m-1)(q_1^2)^P\right] + \\
& + \frac{1}{2}\left[\lambda_0^1 q_0^1 m - (m-1)\lambda_1^1 q_1^1\right] + \frac{1}{2}\left[\lambda_0^2 q_0^2 m - (m-1)\lambda_1^2 q_1^2\right] - \frac{\lambda_1^1+\lambda_1^2}{2} + \\
& + \frac{1}{m}\int Dr_0 Ds_0 \ln \int Dr_1 Ds_1 \left[2e^K \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_0^1}\, r_0 + \sqrt{\lambda_1^1-\lambda_0^1}\, r_1 + \sqrt{\lambda_0^2}\, s_0 + \sqrt{\lambda_1^2-\lambda_0^2}\, s_1\right) + \right. \\
& \left. + 2e^{-K} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_0^1}\, r_0 - \sqrt{\lambda_1^1-\lambda_0^1}\, r_1 + \sqrt{\lambda_0^2}\, s_0 - \sqrt{\lambda_1^2-\lambda_0^2}\, s_1\right)\right]^m,
\end{aligned} \tag{17}$$

где m — параметр нарушения репличной симметрии. Дифференцирование (17) по $q_0^1, q_1^1, q_0^2, q_1^2$ дает

$$\lambda_i^1 = \frac{PB^2(q_i^1)^{P-1}}{2}, \quad \lambda_i^2 = \frac{PB^2(q_i^2)^{P-1}}{2}. \tag{18}$$

Опять мы получим, что

$$\lambda_0^1 \to 0, \quad \lambda_0^2 \to 0, \tag{19}$$

$$\lambda_1^1 \to \infty, \quad \lambda_1^2 \to \infty. \tag{20}$$

Из условия (20) следует

$$F = \frac{B^2}{4}(1+J^2)m + \frac{1}{m}\ln 4 \operatorname{ch} Km - KC. \tag{21}$$

Дифференцируя (21) по K и m, получим соответственно

$$\operatorname{th} Km = C, \tag{22}$$

$$\frac{B^2 m^2}{4}(1+J^2) + \operatorname{ch}(Km)\ln 4 + Km \operatorname{th} Km = 0. \tag{23}$$

Уравнения (22), (23) имеют следующие решения:

$$\frac{B_c^2}{4}(1+J^2) = \ln 2\,[1 + h(C)]\,, \tag{24}$$

$$m = B_c/B, \tag{25}$$

где B_c — критическое значение обратной температуры, при котором происходит фазовый переход. Теперь для свободной энергии $F = \langle \ln Z \rangle / N$ получаем следующее выражение:

$$F = \frac{B}{B_c}\left[\frac{B_c^2}{4}(1+J^2) + \ln 2\,(1+h(C))\right]. \tag{26}$$

Найденная спин-стекольная фаза существует при

$$B > B_c, \quad J^2 > h(C). \tag{27}$$

Второе из условий (27) будет рассмотрено в следующем разделе.

4. СПИН-СТЕКОЛЬНАЯ ФАЗА С ДВУХКРАТНЫМ НАРУШЕНИЕМ РЕПЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ И СМЕСЬ СПИНОВОЕ СТЕКЛО + ПАРАМАГНЕТИК

Рассмотрим случай, когда для первой подсистемы репличная группа нарушена до подгруппы m_1, а для второй — до m_2. Расчеты, аналогичные тем, что были проведены в предыдущем разделе, дают

$$F = \frac{B^2}{4}(1+J^2) + \frac{B^2}{4} + (m_1-1)(q_1^1)^P + \frac{B^2J^2}{4}(m_2-1)(q_1^2)^P - \frac{\lambda_1^1+\lambda_1^2}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[(1-m_1)\lambda_1^1 q_1^1 + (1-m_2)\lambda_1^2 q_1^2\right] + \frac{1}{m_2}\ln\int Dr_1 \times$$
$$\times\left\{Ds_1\left[2e^K \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_1^1}\,r_1+\sqrt{\lambda_1^2}\,s_1\right) + 2e^{-K}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_1^1}\,r_1-\sqrt{\lambda_1^2}\,s_1\right)\right]^{m_2}\right\}^{m_2/m_1}. \tag{28}$$

Мы пропустили здесь члены с $q_0^1, q_0^2, \lambda_0^1, \lambda_0^2$, которые имеют нулевое значение. При выводе (28) мы рассмотрели случай, когда репличная группа сначала нарушается до подгруппы m_2 перестановок, а затем — до подгруппы m_1. После интегрирования по ds_1 в (28) приходим к выражению типа

$$\frac{1}{m_2}\ln\int Dr_1\,[2\operatorname{ch}(Km_1)]^{m_2/m_1}\left\{\theta(r_1)\exp\left[m_1\sqrt{\lambda_1^1}\,r_1 + \lambda_1^2(m_1)^2\right] +\right.$$
$$\left.+\,\theta(-r_1)\exp\left[m_1\sqrt{-\lambda_1^1}\,r_1 + \lambda_1^2(m_1)^2\right]\right\} = \frac{1}{m_2}\ln 2 + \frac{1}{m_1}\ln(2\operatorname{ch} Km_1), \tag{29}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Подставляя (29) в (28) и дифференцируя по m_2, m_1, получим

$$\frac{B^2m_1^2}{4} - \ln 2 = 0, \tag{30}$$

$$\frac{J^2B^2m_1^2}{4} - h(C)\ln 2 = 0. \tag{31}$$

Для свободной энергии имеем

$$F = \frac{B}{B_1}\left[\frac{B_1^2}{4} + \ln 2\right] + \frac{B}{B_2}\left[\frac{J^2B_1^2}{4} + h(C)\ln 2\right], \tag{32}$$

где

$$B_1 = \lambda_1 \sqrt{\ln 2}, \tag{33}$$

$$B_2 = \lambda_2 \sqrt{h(C) \ln 2} / J. \tag{34}$$

Это решение существует при

$$B > B_2, \tag{35}$$

$$B_c > B_2 > B_1. \tag{36}$$

Последнее неравенство имеет место при условии

$$J^2 > h(C). \tag{37}$$

Когда же

$$B_1 < B < B_2, \tag{38}$$

первая подсистема находится в спин-стекольной фазе, а вторая — в парамагнитной. Вместо (28) получаем выражение

$$F = \frac{1}{4}B^2(1 + J^2) + \frac{1}{4}B^2J^2(m-1)q_1^P + (m-1)q_1^P - (m-1)\lambda_1 q_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - KC + \\ + \frac{1}{m}\ln \int Dr \ln\left[(2\,\mathrm{ch}\,k)^m 2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_1}\,mr\right)\right]. \tag{39}$$

Выбирая режим

$$q_1 = 1, \quad \lambda_1 \to \infty, \tag{40}$$

получаем

$$F = \frac{1}{4}B^2J^2 + \frac{1}{4}B^2 m + \frac{1}{m}\ln 2 - KC + \ln\frac{1}{m}\,\mathrm{ch}\,K. \tag{41}$$

Дифференцируя по m и K, получаем

$$\mathrm{th}\,K = C, \tag{42}$$

$$\frac{1}{4}B^2m^2 = \ln 2. \tag{43}$$

Окончательно

$$F = \frac{B}{B_1}\left[\frac{B_1^2}{4} + \ln 2\right] + \frac{B^2J^2}{4} + h(C)\ln 2, \tag{44}$$

где B_1 определено в (33). Этот режим существует при условии (38). Формулу (44) можно трактовать следующим образом: когда значение $h(C)$ достаточно велико (близко к 1), первая подсистема скатывается в спин-стекольную фазу, как это происходит в обычной модели Дерриды. Поскольку в спин-стекольной фазе энтропия нулевая, для другой подсистемы остается ровно $\exp[Nh(C)]$ состояний (в парамагнитной фазе). Когда же энтропия в выражении (44) исчезает, система скатывается в спин-стекольную фазу со свободной энергией, определяемой формулой (32).

5. ФЕРРОМАГНИТНАЯ ФАЗА ПРИ СИЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПОДСИСТЕМ

До сих пор мы рассматривали лишь симметричное распределение констант связи. Теперь мы рассмотрим гамильтониан

$$H = - \sum_{1\le i_1<i_2\ldots<i_P\le N} \sigma^1_{i_1}\ldots\sigma^1_{i_P}\left(\sqrt{N/C^P_N}j^1_{i_1\ldots i_P} + J^1_0 N/C^P_N\right) +$$
$$+ \sigma^2_{i_1}\ldots\sigma^2_{i_P}\left(j^2_{i_1\ldots i_P}\sqrt{N/C^P_N} + J^2_0 N/C^P_N\right) \tag{45}$$

при наличии связи (1). Константы $j^1_{i_1\ldots i_P}$ и $j^2_{i_1\ldots i_P}$ имеют распределение (3). Считаем, что условие (1) выполнено для $\{\sigma^1_i\} = \{1\}$, $\{\sigma^2_i\} = \{\xi_i\}$, где $\{\xi_i\}$ — некоторая заданная конфигурация спинов второй подсистемы. Нас будет интересовать переход спиновое стекло — ферромагнетик при условии

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i = C. \tag{46}$$

В ситуации, когда обе системы находятся в ферромагнитной фазе, метод среднего поля дает следующее выражение для свободной энергии:

$$F = (J^1_0 + J^2_0)B. \tag{47}$$

Мы сначала рассмотрим ситуацию сильной корреляции между подсистемами, а затем — случай слабой корреляции.

Для того чтобы решение (47) было термодинамически выгодно, требуется, чтобы выполнялось условие

$$J^1_0 + J^2_0 > B_c(1+J^2)/2 = \sqrt{\ln 2}\,[1+h(C)]. \tag{48}$$

Это условие является необходимым, но не достаточным. В принципе, в системе может реализовываться ситуация, когда одна из подсистем находится в ферромагнитной фазе, а другая — в спин-стекольной. Пусть первая подсистема находится в ферромагнитной фазе, а вторая — в спин-стекольной. Тогда

$$F = \frac{1}{4}B^2(1+J^2) + J^1_0 s^P + \frac{1}{4}J^2(m-1)(q^2_1)^P - (m-1)\lambda^2_1 q^2_1/2 - st - KC - \lambda^2_1/2 -$$
$$- \frac{1}{4}(q^1_0)^P B^2 J^2 + \frac{\lambda^1_0 q^1_0}{2} - \frac{\lambda^1_0}{2} + \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} Dz_0 \,\times$$
$$\times \ln\int_{-\infty}^{\infty} Dr_1\left[2e^K \operatorname{ch}\left(r_1\sqrt{\lambda^2_1}+t+z_0\sqrt{\lambda^2_0}\right) + 2e^{-K}\operatorname{ch}\left(r_1\sqrt{\lambda^2_1}-t-z_0\sqrt{\lambda^2_0}\right)\right]^m, \tag{49}$$

где s — намагниченность первой подсистемы, t — сопряженная переменная. Мы опустим член J^2_0, поскольку он не дает вклада в свободную энергию в термодинамическом пределе, когда намагниченность (во второй подсистеме) равняется нулю. Дифференцирование по s, q^1_0, q^2_1 при $s=1$, $q^1_0=1$, $q^2_1=1$ дает

$$t\to\infty, \quad \lambda^1_0\to\infty, \quad \lambda^2_1\to\infty. \tag{50}$$

Преобразуя интеграл в (49), получим

$$\frac{1}{m}\int Dz_0 \ln\left\{\exp\left[mt+m\sqrt{\lambda_0^1}\,z_0+\frac{1}{2}\lambda_2^1 m^2\right] 2\operatorname{ch} km\right\} = \frac{1}{m}\ln 2\operatorname{ch} km+\frac{1}{2}\lambda_2^1 m+t. \quad (51)$$

Для свободной энергии получаем

$$F = \frac{1}{4}B^2 J^2 m + \frac{1}{m}\ln 2\operatorname{ch} Km - KC + J_0^1 B, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} &\operatorname{th} Km = C, \\ &Bm = \frac{2}{J}\sqrt{h(C)\ln 2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Подставляя (53) в (52), получаем

$$F = J_0^1 B + BJ\sqrt{h(C)\ln 2}. \quad (54)$$

Таким образом, наряду с (48) мы имеем условие

$$J_0^2 > J\sqrt{h(C)\ln 2}. \quad (55)$$

Если бы фазовый переход испытала первая подсистема, то мы получили бы условие

$$J_0^1 > J\sqrt{h(C)\ln 2}. \quad (56)$$

Неравенства (48), (55), (56) имеют два типа решений:

$$\left\{\begin{array}{l} J_0^1 > \sqrt{h(C)\ln 2}, \\ J_0^2 > \sqrt{(1+j^2)h(C)\ln 2} - J_0^1 \end{array}\right. \quad (57)$$

и

$$\left\{\begin{array}{l} J_0^2 > \sqrt{h(C)\ln 2}/J, \\ J_0^1 > \sqrt{(1+j^2)h(C)\ln 2} - J_0^2. \end{array}\right. \quad (58)$$

При этом должно соблюдаться условие

$$J^2 > h(C). \quad (59)$$

Если же первые неравенства в системах (57) или (58) нарушаются, система переходит в смешанную фазу, где одна подсистема находится в ферромагнитной фазе, а другая — в спин-стекольной.

Рассмотрим теперь ферромагнитную фазу при слабой корреляции между подсистемами. Выражение для свободной энергии в смешанной (ферромагнетик + спиновое стекло) фазе имеет такой же вид, что и при сильной корреляции. Вместо (48) мы имеем условие

$$J_0^2 + J_0^1 > \sqrt{h(C)\ln 2}/J + \sqrt{\ln 2}. \quad (60)$$

Опять получаем пару решений

$$\begin{cases} J_0^1 > \sqrt{h(C)\ln 2}, \\ J_0^2 > \sqrt{h(C)\ln 2}/J + \sqrt{\ln 2} - J_0^1 \end{cases} \tag{61}$$

и

$$\begin{cases} J_0^2 > \sqrt{h(C)\ln 2}/J, \\ J_0^1 > \sqrt{h(C)\ln 2}/J + \sqrt{\ln 2} - J_0^2. \end{cases} \tag{62}$$

Это имеет место при

$$J^2 < h(C). \tag{63}$$

6. ПОДХОД МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ЭНЕРГИЙ

Рассмотрим два набора из 2^N уровней с энергиями E_α^1, E_β^2, $1 \le \alpha, \beta \le 2^N$. Энергия системы равна $E = E_\alpha^1 + E_\beta^2$. При этом не все пары уровней E_α^1, E_β^2 разрешены. Введем матрицу связанности $C_{\alpha\beta}$, элементы которой равны 1 для разрешенных пар (E_α^1, E_β^2) и 0 — для запрещенных.

Уровни с энергиями E_α^2, E_β^2 имеют следующие распределения:

$$P_x(E_\alpha^1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\frac{(E_\alpha^1)^2}{N}\right], \tag{64}$$

$$P_y(E_\beta^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}\, J} \exp\left[-\frac{(E_\beta^2)^2}{NJ^2}\right]. \tag{65}$$

Соответственно свободная энергия равна

$$\langle \ln Z \rangle = \int \prod_{\alpha=1}^{M} dE_\alpha^1 dE_\beta^2 \ln\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{M} C_{\alpha\beta} \exp[E_\alpha^1 + E_\beta^2]B\right] P_x(E_\alpha^1) P_y(E_\beta^2), \tag{66}$$

где $M = 2^N$. Для матрицы $C_{\alpha\beta}$ имеем ограничение

$$\sum_{\beta=1}^{M} C_{\alpha\beta} = e^{Nh\ln 2}, \quad \alpha = 1, \ldots, M. \tag{67}$$

Используя формулу

$$\ln Z = \Gamma'(1) - \int_0^\infty \ln Z de^{-iZ} \equiv \Gamma'(1) - \int_{-\infty}^{\infty} u\, de^{-e^u Z} \tag{68}$$

из работы [1] (Γ' — производная функции Эйлера), получаем

$$\langle \ln Z \rangle = \Gamma'(1) - \int_{-\infty}^{\infty} u d\Psi(u), \tag{69}$$

где

$$\Psi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{M} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi} \exp\left\{ -\sum_{\alpha=1}^{M}(x_\alpha^2 + y_\beta^2) - e^u \sum_{\alpha,\beta=1}^{M} C_{\alpha\beta} e^{\lambda_1 x_\alpha + \lambda_2 y_\beta} \right\}, \tag{70}$$

$\lambda_1 = N\sqrt{B}$, $\lambda_2 = N\sqrt{B}\,J$. В главном приближении монотонная функция $\Psi(u)$ имеет вид ступеньки (с центром в точке $-u_0$, которую мы определим в дальнейшем), поэтому из уравнения (68) мы получаем

$$\ln Z \simeq -u_0. \tag{71}$$

Для $u > -u_0$ функция $\Psi(u)$ уменьшается экспоненциально, а для $u < -u_0$ она равняется 1 с экспоненциальной точностью. В зависимости от значений λ_1, λ_2 мы получаем разные асимптотики для следующей похожей функции:

$$\Psi_1(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{\pi} \exp\left\{ -(x^2 + y^2) - e^u(e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y}) \right\}. \tag{72}$$

Когда $|u| \to \infty$ мы имеем два случая.

В первом случае мы можем разложить последний член в экспоненте, тогда

$$\Psi_1(u) \simeq 1 - \exp\left[u + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/4 \right]. \tag{73}$$

Главный вклад дает область около точки

$$x = \frac{\lambda_1}{2}, \quad y = \frac{\lambda_2}{2}. \tag{74}$$

Чтобы вычисления были самосогласованными, значение $\exp[u + (\lambda_1 x + \lambda_2 y)]$ в точке, определяемой (74), должно быть мало. Это выполняется при условии

$$u < -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/2. \tag{75}$$

Поступая аналогично со всеми степенями свободы, получаем

$$\Psi(u) \simeq \exp\left\{ -\exp\left[u + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{4} + (1+h)N\ln 2 \right] \right\}. \tag{76}$$

Отсюда, используя (70), имеем

$$\frac{\langle \ln Z \rangle}{N} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{4} + (1+h)\ln 2 \equiv (1 + J^2)\frac{B^2}{4} + (1+h)\ln 2. \tag{77}$$

Условие (75) дает

$$B < B_c \equiv 2\sqrt{\frac{(1+h)\ln 2}{1 + J^2}}. \tag{78}$$

Таким образом, мы определили критическую температуру перехода парамагнетик — спиновое стекло.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $\exp(u+\lambda_1 x+\lambda_2 y)$ имеет большое (по сравнению с 1) значение в области, дающей основной вклад в интеграл. Тогда

$$\Psi(u) = \int\limits_D \prod_{\alpha=1}^{M} dx_\alpha dy_\alpha \exp\left[-\sum_{\alpha=1}^{M}(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\right], \tag{79}$$

где выпуклая область D определяется условием

$$\lambda_1 x_\alpha + \lambda_2 y_\beta < -u. \tag{80}$$

Значение интеграла (79) определяется точкой на границе области D, в которой значение $(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)$ минимально. Для этой точки получаем

$$x_c = -\frac{\lambda_1 u}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}, \quad y_c = -\frac{\lambda_2 u}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}. \tag{81}$$

Для одной пары конфигураций получаем (пропуская предэкспоненциальный множитель)

$$\Psi_1(u) \simeq 1 - \exp\left[-(x_c^2+y_c^2)\right]. \tag{82}$$

Аналогично,

$$\Psi(u) \simeq \exp\left\{-\exp\left(\frac{-u^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + N(1+h)\ln 2\right)\right\}. \tag{83}$$

Отсюда при $B > B_c$ получим

$$\langle \ln Z\rangle \simeq N\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(1+h)\ln 2} = BN\sqrt{(1+h)(1+J^2)\ln 2}. \tag{84}$$

В общем случае для $\Psi_1(u)$ имеем следующее разложение:

$$\Psi_1(u) \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{1 - \theta\left(-u - \lambda_1 x - \frac{\lambda_2^2}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[u+\lambda_1+\lambda_2^2/4\right] - \theta\left(u+\lambda_1 x + \frac{\lambda_2^2}{2}\right)\exp\left[-(u+\lambda_1 x)^2/\lambda_2^2\right]\right\}. \tag{85}$$

Взяв интеграл по одной переменной x_α и по 2^{Nh} связанных с ней переменным y_β, получим, что выражение в фигурных скобках (85) имеет степень 2^{Nh}. Это приводит к обрезанию области интегрирования в (85). В зависимости от значений λ_1, λ_2 в (85) доминирует один из поправочных членов. В результате мы имеем два режима:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2}dx \simeq 1 - \frac{e^{-x_1^2}}{2x_1\sqrt{\pi}}, \quad x_1 = \left(\frac{\lambda_2^2}{4} + Nh\ln 2 + u\right)\frac{1}{\lambda_1} \tag{86}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x_2} e^{-x^2}dx \simeq 1 - \frac{e^{-x_2^2}}{2\sqrt{\pi}\,x_2}, \quad x_2 = \frac{\lambda_2\sqrt{Nh\ln 2}+u}{\lambda_1}. \tag{87}$$

Возведя (86), (87) в степень 2^N, получим соответствующие выражения для $\Psi(u)$:

$$\Psi(u) \simeq \exp\left\{-\exp\left[\frac{-(u+Nh\ln 2+\lambda_2^2/4)}{\lambda_1^2}+N\ln 2\right]\right\} \tag{88}$$

или

$$\Psi(u) \simeq \exp\left\{-\exp\left[-(u+\lambda_2\sqrt{\frac{Nh\ln 2}{\lambda_1^2}+N\ln 2}\right]\right\}. \tag{89}$$

Отсюда находим, что при $2\sqrt{\ln 2} < B < 2\sqrt{h\ln 2}/J$

$$\frac{\langle \ln Z\rangle}{N} = B\sqrt{\ln 2}+\frac{B^2J^2}{4}+h\ln 2, \tag{90}$$

а при $B > 2\sqrt{h\ln 2}/J$

$$\frac{\langle \ln Z\rangle}{N} = B\sqrt{\ln 2}\,\frac{B^2y^2}{4}+h\ln 2. \tag{91}$$

Решения (90), (91) существуют при

$$h > J^2, \tag{92}$$

а при

$$h < J^2 \tag{93}$$

решением является (84). При высоких температурах мы имеем парамагнитное решение (77). Затем, при условии (93) и при $B = B_c$, система переходит в ферромагнитную фазу (84). В случае (92) мы имеем смесь (спиновое стекло + парамагнетик) и спиновое стекло.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ФАЗЫ МЕТОДОМ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ЭНЕРГИЙ

Теперь для каждой из подсистем мы имеем по одной «ферромагнитной» конфигурации. Для E_1^1, E_1^2 вместо (64) и (65) можно записать

$$P_1(E_1^1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}}\exp\left[-\frac{1}{N}(E_1^1+J_0^1N)^2\right], \tag{94}$$

$$P_2(E_1^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}\,J}\exp\left[-\frac{1}{J^2N}(E_1^2+J_0^2N)^2\right]. \tag{95}$$

Для других E_α^1, E_α^2, $\alpha \geq 2$, остаются старые распределения (64), (65). Константы J_0^1 и J_0^2 положительны. Тогда для $\Psi(u)$ получаем

$$\Psi(u) = \int \prod_{\alpha=1}^{M} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{ -\sum_{\alpha=1}^{M} (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) - \left\{ \exp\left[u + u_1 + u_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1\right] - \right.\right.$$

$$- \sum_{\beta=2}^{M} C_{1\beta} \exp\left[u + u_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_\beta\right] - \sum_{\alpha=2}^{M} C_{\alpha 1} \exp\left[u + u_2 + \lambda_1 x_\alpha + \lambda_2 y_1\right] -$$

$$\left.\left. - \sum_{\alpha,\beta=2}^{M} C_{\alpha\beta} \exp\left[u + \lambda_1 x_\alpha + \lambda_2 y_\beta\right] \right\}\right\}, \tag{96}$$

где

$$u_1 = J_0^1 BN, \quad u_2 = J_0^2 BN. \tag{97}$$

Для ферромагнитной фазы основным является первый член в (96). В главном приближении можно пренебречь тремя другими членами и тогда $\Psi(u)$ можно рассматривать как ступеньку с центром в точке $u_0 = -(J_0^1 + J_0^2)N_B$, правее же этого значения функция $\Psi(u)$ затухает как

$$\Psi(u) \simeq \exp\left[-\frac{(u + u_1 + u_2)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \right]. \tag{98}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\langle \ln Z \rangle}{N} = (J_0^1 + J_0^2) N_B. \tag{99}$$

Это решение верно, когда оно больше, чем соответствующее выражение для спин-стекольных и смешанных (одна подсистема в ферромагнитной, а другая в спин-стекольной) фаз. Смешанные фазы получаются, когда в (96) в фигурных скобках доминируют второй или третий члены. Тогда

$$\frac{\langle \ln Z \rangle}{N} = J_0^1 N_B + B\sqrt{h \ln 2}\, J \tag{100}$$

или

$$\frac{\langle \ln Z \rangle}{N} = J_0^2 N_B + B\sqrt{h \ln 2}. \tag{101}$$

Для $J^2 \le h$ мы получаем следующие условия существования решения (99):

$$\begin{cases} J_0^1 + J_0^2 > \sqrt{\ln 2} + \sqrt{h \ln 2}\, J, \\ J_0^1 > \sqrt{h \ln 2}, \\ J_0^2 > \sqrt{h \ln 2}\, J. \end{cases} \tag{102}$$

В случае же $h \le J^2$ существование решения (99) определяется условиями

$$\begin{cases} J_0^1 + J_0^2 > \sqrt{(1+h)(1+J^2) \ln 2}, \\ J_0^1 > \sqrt{h \ln 2}, \\ J_0^2 > \sqrt{h \ln 2}\, J. \end{cases} \tag{103}$$

8. ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

Нас интересуют поправки к выражению для свободной энергии, появляющиеся при учете конечного объема в ферромагнитной фазе. При вычислении намагниченности в ферромагнитной фазе, рассматривая относительный вес ферромагнитной конфигурации, мы приходим к выражению

$$\left\langle \frac{1}{Z} e^{-B(E_1^1+E_1^2)} \right\rangle = \left\langle e^{-B(E_1^1+E_1^2)} \int_0^\infty dt\, e^{-tZ} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u) du, \tag{104}$$

где $\Psi(u)$ определено в (96). Если в выражении (96) пренебречь тремя последними членами в экспоненте, значение интеграла в (104) будет равно 1. Обозначим выражение для $\Psi(u)$ в этом случае через $\Psi_2(u)$.

Поправочные члены в экспоненте приводят к тому, что интеграл (104) заменяется на выражения типа

$$\int_{-\infty}^{-u_c} \Psi_2(u)\Psi_3(u) du, \tag{105}$$

где точка обрезания $-u_c$ определяется как точка максимума выражений (100), (101), (84) при $h > J^2$ или выражений (100), (101), (91) при $h < J^2$. Функция $\Psi_3(u)$ определяется главным поправочным членом в (97). Она имеет вид ступеньки с центром в точке $-u_c$. Когда доминирующим является выражение (84), мы получаем

$$\int_{-\infty}^{-u_c} \Psi_2(u) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{u^2}{N\beta^2(1+y^2)} + N(1+h)\ln 2 \right] \right\} du \simeq$$

$$\simeq 1 - \int_{-u_c}^{-\infty} \Psi_2(u) du - \int_{-\infty}^{-u_c} \Psi_2(u) \exp\left[-\frac{u^2}{N\beta^2(1+y^2)} + N(1+h)\ln 2 \right] du. \tag{106}$$

Функция $\Psi_2(u)$ равна 1 для всех $u \le -(J_0^1 + J_0^2)/NB$, дальше она экспоненциально уменьшается:

$$\Psi_2(u) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{NB^2(1+J^2)}{2\,|u + (J_0^1 + J_0^2)NB|} \exp\left\{ -\frac{\left(u + (J_0^1 + J_0^2)NB\right)^2}{NB^2(1+J^2)} \right\}. \tag{107}$$

Для вычисления выражения (107) методом перевала есть две возможности . В первом случае точка перевала лежит в области интегрирования, а во втором — вне ее. Во втором случае интеграл определяется значением экспоненты на границе области. Учитывая все это, для намагниченности m получаем

$$m = 1 - a \exp\left\{ \left(\frac{J_0^1 + J_0^2 - \sqrt{(1+J^2)(1+h)\ln 2}}{1+J^2} \right)^2 N \right\} \theta\left[-\frac{J_0^1+J_0^2}{\sqrt{1+J^2}} + 2\sqrt{(1+h)\ln 2} \right] -$$

$$- b \exp\left\{ -\frac{(J_0^1 + J_0^2)^2 N}{2(1+J^2)} + N(1+h)\ln 2 \right\} \theta\left(\frac{J_0^1 + J_0^2}{\sqrt{1+J^2}} + 2\sqrt{(1+h)\ln 2} \right). \tag{108}$$

Это справедливо при условиях

$$\sqrt{(1+J^2)(1+h)\ln 2} > J_0^1 + J\sqrt{h\ln 2}, \tag{109}$$

$$\sqrt{(1+J^2)(1+h)\ln 2} > J_0^2 + J\sqrt{h\ln 2}. \tag{110}$$

Когда же неравенства (109) или (110) нарушаются, получаем

$$m = 1 - a\exp\left\{-\left(J_0^1 - \sqrt{h\ln 2}\right)^2 N\right\}\theta\left(-J_0^1 + 2\sqrt{h\ln 2}\right) - \\ - b\exp\left\{\left[-(J_0^1)^2/2 + h\ln 2\right]N\right\}\theta\left[J_0^1 - 2\sqrt{h\ln 2}\right] \tag{111}$$

при

$$\begin{cases} J_0^1 + J\sqrt{h\ln 2} > \sqrt{(1+J^2)(1+h)\ln 2}, \\ J_0^1 + J\sqrt{h\ln 2} > J_0^2 + \sqrt{h\ln 2} \end{cases} \tag{112}$$

или

$$m = 1 - b\exp\left\{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{J_0^2}{J}\right)^2 + h\ln 2\right]N\right\}\theta\left[\frac{J_0^2}{J} - 2\sqrt{h\ln 2}\right] - \\ - a\exp\left\{-\left(\frac{J_0^2}{J} - \sqrt{h\ln 2}\right)^2 N\right\}\theta\left[-\frac{J_0^2}{J} + 2\sqrt{h\ln 2}\right] \tag{113}$$

при

$$\begin{cases} J_0^2 + J\sqrt{h\ln 2} > \sqrt{(1+J^2)(1+h)\ln 2}, \\ J_0^2 + J\sqrt{h\ln 2} > J_0^1 + \sqrt{h\ln 2}. \end{cases} \tag{114}$$

Аналогичные вычисления можно проделать для случая $J^2 > h$. Мы видим, что при $T = 0$ существует множество подфаз, которые отличаются поправками, возникающими вследствие учета конечного объема.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы решили систему из двух моделей Дерриды с фиксированной связью (скалярным произведением) между спиновыми конфигурациями и независимыми случайными константами. Решение задачи было найдено как методом среднего поля, так и при помощи техники, разработанной Дерридой для модели случайных энергий. Оба решения совпадают, что указывает на надежность (громоздких!) вычислений. Возникает интересный эффект интерференции между подсистемами. Такое же явление должно наблюдаться для других моделей спиновых стекол (сферическая модель, модель Киркпатрика–Шеррингтона). В последнее время близкие модели рассматриваются группой Паризи (Италия) для изучения свойств спин-стекольной фазы. Однако в этих работах обе подсистемы имеют один и тот же набор случайных констант.

Методы последних двух разделов настоящей работы можно обобщить для случая слабой связанности (разреженных констант связи), когда в (2) проводится суммирование не по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_P$, а лишь по αN из них, выбранных случайно из всех возможных C_N^P вариантов. Физическая картина при этом не меняется. Помимо того, что полученные результаты имеют физический интерес, их также можно использовать для кодирования многотерминальных систем в случае каналов с множественным доступом. Более сложные примеры задач о многотерминальных системах [7] типа широковещательного канала остаются нерешенными. Создается впечатление, что идеи и методы модели спиновых стекол могут быть полезны и там.

Наиболее сложным в данной работе был вывод поправок к выражению для свободной энергии, возникающих при учете конечного объема в ферромагнитной фазе (разд. 8). Для случая разреженной системы эти поправки аналогичны найденным в работе [8]. В области значений связанности α около критического они соответствуют максимально возможному подавлению эффектов конечного объема (вероятности ошибки декодирования). В случае же больших α до сих пор не найдено граничного выражения для этой экспоненциально исчезающей (пропорциональной $\exp[-\gamma\alpha N]$) поправки. Коэффициент γ в показателе экспоненты в выражении для поправки является по-видимому некоторой универсальной функцией (типа критических индексов фазовых переходов). Вычисление этой функции по значимости близко к вычислению критических индексов в реальных размерностях. Это обстоятельство наряду с отмеченной ранее возможностью продвинуться вперед в решении проблемы кодирования многотерминальных систем определяет важность исследований в этой области, которая является пограничной между статистической физикой и теорией информации.

Д. Б. С. благодарит Ю Лу за приглашение в Триест и Е. Л. Жидкова за гостеприимство в ЛВТА ОИЯИ (Дубна). Мы благодарны Е. Арутюняну за разъяснения проблемы многотерминальных систем, С. Францу за обсуждение случая реальных реплик и М. Вирасоро за обсуждение проблем спиновых стекол.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке министерства науки и технологий ФРГ (грант № 211-5231).

Литература

1. B. Derrida, Phys. Rev. Lett. **45**, 79 (1980).
2. D. Gross and M. Mezard, Nucl. Phys. B **240**, 43 (1984).
3. N. Sourlas, Nature **239**, 693 (1989).
4. Д. Б. Саакян, Письма в ЖЭТФ **55**, 798 (1992).
5. D. Rujan, Phys. Rev. Lett. **701**, 2968 (1993).
6. H. Nishimori, Physica A **205**, 1 (1994).
7. И. Чисар, Я. Кернер, *Теория информации*, Мир, Москва (1985).
8. A. Allakhverdyan and D. Saakian, E-prints archive cond. matt/95.06.007.