ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 4, стр. 1369–1372

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Л. А. Мельниковский, С. А. Криминский

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 ноября 1996 г.

Внешнее электрическое поле изменяет закон дисперсии волн на поверхности жидкости. Кроме обычных капиллярного ($\propto k^3$, k — волновой вектор) и гравитационного ($\propto k$) членов в выражении для квадрата частоты в однородном поле появляется квадратичный по волновому вектору член. С этими возбуждениями связано изменение коэффициента поверхностного натяжения жидкости при низких температурах. В случае большого касательного к поверхности поля поправка оказывается пропорциональной $T^{8/3}$ в отличие от зависимости $T^{7/3}$ в отсутствие поля.

Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения вблизи абсолютного нуля связана с низкоэнергетическими возбуждениями границы жидкость–газ (поверхностными волнами) [1]. Обычная классификация разделяет капиллярные и гравитационные волны. Свойства первых в основном определяются силами поверхностного натяжения, которые существенны в пределе малых длин волн. Гравитационные силы, напротив, соответствуют длинным волнам. В данной работе исследован эффект изменения спектра, связанного с внешним постоянным во времени электрическим полем. Он существен в промежуточной (по длине волны) между капиллярной и гравитационной области.

Найдем дисперсионное соотношение для поверхностной волны, распространяющейся в присутствии внешнего поля $\mathbf{E}_0$ (пусть, для определенности, $\mathbf{E}_0$ — поле вне жидкости). Направим ось x в сторону распространения волны, а ось z — вверх, перпендикулярно поверхности невозмущенной жидкости. Смещение поверхности от равновесного положения в этой волне описывается функцией вида

$$z = \zeta(x,t) = \zeta e^{ikx - i\omega t}.$$

В предположении несжимаемости жидкости условие непрерывности [2] накладывается на скорость $\mathbf{v}$ и принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Уравнение Эйлера в линейном приближении (отклонения от равновесия считаются малыми) дает второе условие для скорости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{2}$$

где

$$\sigma_{ik} = -(\rho g z + P)\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi} \tag{3}$$

— тензор напряжений [3]. Здесь P — давление, соответствующее такой же плотности ρ в отсутствие поля, а ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Само электрическое поле подчиняется (все скорости существенно меньше скорости света, а жидкость предполагается свободной от сторонних зарядов) уравнениям

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{4}$$

Соответствующее распределение поля, периодическое по оси x, имеет вид

$$\mathbf{E}^g = \mathbf{E}_0 + \mathbf{A}e^{ikx-kz}, \qquad \mathbf{E}^l = \mathbf{E}_0^l + \mathbf{B}e^{ikx+kz},$$

где индексы l и g относятся к жидкости и газу соответственно, причем

$$A_x = -iA_z = -iA, \qquad B_x = iB_z = iB, \qquad A_y = B_y = 0.$$

Для дальнейшего рассмотрения существенна возможность следующего преобразования правой части (2) в силу (4):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-(\rho g z + P) + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right].$$

Вследствие этого движение жидкости оказывается потенциальным, т. е. $\mathbf{v} = \nabla\psi$. Используя (1), получаем

$$\psi = \dot{z}\frac{e^{kz}}{k} = -\zeta\frac{i\omega}{k}e^{ikx+kz-i\omega t}.$$

Само уравнение Эйлера в терминах потенциала ψ принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left(gz + \frac{P}{\rho}\right) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T. \tag{5}$$

На границе раздела электрическое поле удовлетворяет условиям [3]

$$\mathbf{E}^g_{\parallel} = \mathbf{E}^l_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}^g_{\perp} = \varepsilon\mathbf{E}^l_{\perp}.$$

За границу раздела можно принять поверхность $z = 0$ (мы считаем $k\zeta \ll 1$). После элементарных преобразований получаем

$$\begin{gathered} E_{0x} = E^l_{0x}, \qquad E_{0y} = E^l_{0y}, \qquad E_{0z} = \varepsilon E^l_{0z}, \\ A = k\zeta\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}(E_{0z} - iE_{0x}), \qquad B = k\zeta\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\left(\frac{E_{0z}}{\varepsilon} + iE_{0x}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Используя явные выражения для σ^g_{ij} и σ^l_{ij} в граничных условиях для тензора натяжений

$$\sigma^g_{ij}n_j = \sigma^l_{ij}n_j - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}n_i$$

(здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, а α — коэффициент поверхностного натяжения), получим уравнения для давления у границы:

$$P = \text{const} - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{E^{l^2}\rho}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T - \frac{\varepsilon-1}{8\pi}(\varepsilon E_{\perp}^{l\,2} + E_{\parallel}^{l\,2}). \tag{7}$$

Окончательно, подставляя (7) в (5) и используя (6), находим

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3 + \frac{(\varepsilon-1)^2}{4\pi\rho\varepsilon(\varepsilon+1)}\left(\varepsilon E_{\parallel}^2\cos^2\theta - E_{\perp}^2\right)k^2. \tag{8}$$

Выше для краткости опущен индекс 0 у поля и введен в рассмотрение угол θ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и проекцией поля $\mathbf{E}$ на горизонтальную плоскость. Ясно, что дисперсионное соотношение для поверхностных волн в жидкости, находящейся в магнитном поле, получается из (8) заменой диэлектрической проницаемости на магнитную. Действительно, в частных случаях касательного и нормального полей наш результат совпадает с [4].

Применимость полученной формулы ограничена со стороны больших вертикальных полей. В этом случае оказывается невозможно считать невозмущенную поверхность жидкости плоской горизонтальной. Для устойчивости такой поверхности необходима положительность величины ω^2 для всех k, иначе амплитуды волн с соответствующими волновыми векторами будут неограниченно возрастать. Легко получить требуемое ограничение на поле:

$$(\varepsilon-1)^4E_{\perp}^4 < 64\pi^2\rho\alpha g\varepsilon^2(\varepsilon+1)^2.$$

Например, у воды плотность $\rho = 1$ г/см^3, $\varepsilon = 81$, $\alpha = 73$ дин/см и критическая напряженность составляет $E = 2.5$ кВ/мм. В пределе $\varepsilon \to \infty$, соответствующем проводнику, условие устойчивости переходит в неравенство $E_{\perp}^4 < 64\pi^2\rho\alpha g$ (Я. И. Френкель, 1935, см., например, [3], § 5).

Обобщение дисперсионного соотношения на слабо неоднородное внешнее поле очевидно. Если характерный масштаб l, на котором изменяется E_0^2, гораздо больше соответствующего масштаба волны (ζ или $1/k$), в (8) изменится только коэффициент g (который теперь уже, конечно, не будет иметь смысла ускорения силы тяжести, а будет характеризовать силу, действующую на единичную массу вещества в совместном электрическом и гравитационном полях). Например, в геометрии заряженной струны, окруженной цилиндрическим слоем жидкости радиуса r,

$$g = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{E_0^2}{\rho r}.$$

Здесь E_0 — поле у поверхности, гравитация считается малой, а условием применимости является $\zeta \ll r$.

В сильном горизонтальном поле, когда можно пренебречь капиллярным и гравитационным членами, $\omega \propto k|\cos\theta|$ и групповая скорость оказывается не зависящей от $\mathbf{k}$ и направленной всегда параллельно полю. Таким образом, поверхность приобретает эффективную жесткость в направлении поля.

Поправка к коэффициенту поверхностного натяжения $\delta\alpha$ (по сравнению со значением при $T = 0$) равна производной от «квазичастичного» (связанного с поверхностными волнами) потенциала Ω по площади поверхности:

$$\delta\alpha = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)_T,$$

для идеального двумерного бозе-газа она определяется выражением [5]

$$\delta\alpha = T\int \ln\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right]\frac{d^2k}{4\pi^2}.$$

Считая изменение спектра, связанное с полем, малым, получаем

$$\delta\alpha = -\frac{T}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty}\frac{k^2}{e^q-1}\,dq \approx$$

$$\approx -\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\zeta\left(\frac{7}{3}\right)\frac{\rho^{2/3}T^{7/3}}{4\pi\alpha^{2/3}\hbar^{4/3}} + \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\zeta\left(\frac{5}{3}\right)\frac{(\varepsilon-1)^2\rho^{1/3}(\varepsilon E_\parallel^2 - 2E_\perp^2)T^{5/3}}{48\pi^2\varepsilon(\varepsilon+1)\alpha^{4/3}\hbar^{2/3}} \approx$$

$$\approx -0.1341\frac{\rho^{2/3}T^{7/3}}{\alpha^{2/3}\hbar^{4/3}} + 0.004\frac{(\varepsilon-1)^2\rho^{1/3}(\varepsilon E_\parallel^2 - 2E_\perp^2)T^{5/3}}{\varepsilon(\varepsilon+1)\alpha^{4/3}\hbar^{2/3}},$$

где $q = \hbar\omega/T$. В противоположном же случае сильного касательного поля

$$\delta\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{T^8}{\alpha\hbar^5}}\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\pi^3}}\frac{2\rho^{5/6}}{(\varepsilon-1)E}\int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_0^{\infty} ds\ \ln\left[1-\exp\left(-\sqrt{r^2+s^3}\right)\right] \approx$$

$$\approx -0.59\frac{\rho^{5/6}T^{8/3}\sqrt{\varepsilon+1}}{\alpha^{1/3}\hbar^{5/3}(\varepsilon-1)E}.$$

Отметим, что для экспериментального измерения поверхностного натяжения удобно использовать волны, распространяющиеся перпендикулярно направлению поля. Их дисперсионное соотношение зависит от поля только через перенормированное поверхностное натяжение. Реально теория Аткинса применима только к жидким гелию и водороду. Так как первый поляризуем очень слабо ($\varepsilon = 1.047$), обсуждаемый эффект, видимо, не может быть измерен при современной экспериментальной технике. У водорода восприимчивость гораздо больше ($\varepsilon = 1.231$), а температура может быть достигнута достаточно низкая. Таким образом, выбор водорода для измерения поправки к поверхностному натяжению предпочтителен.

Существенным для написании этой статьи было стимулирующее обсуждение с А. Ф. Андреевым, К. О. Кешишевым и А. Я. Паршиным. Кроме того, хотелось бы поблагодарить Ю. А. Косевича, указавшего ссылку на работу [4].

Литература

1. K. R. Atkins, Canad. J. Phys. **31**, 1165 (1953).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика, Наука, Москва (1988).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Наука, Москва (1992).
4. J. R. Melcher, *Fluid Coupled Surface Waves*, MIT Press, Cambridge (1963).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).