

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННОГО СВЧ-ГЕНЕРАТОРА НА КАБЕЛЬНОЙ ВОЛНЕ

М. Биро, М. А. Красильников, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе*

*Институт общей физики Российской академии наук
117942, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 1996 г.

Рассмотрена нестационарная задача возбуждения плазменного СВЧ-генератора конечной длины импульсным релятивистским пучком. Аналитически и численными методами исследована временная динамика процессов в системе при заданных параметрах пучка (геометрии, энергии электронов и импульсе тока) при изменении геометрии плазмы для различных длин системы. Для параметров, максимально приближенных к реальному эксперименту, определены такие характеристики генератора, как мощность излучения, эффективность генератора, спектр. Указаны условия оптимального режима работы генератора.

1. Релятивистские плазменные СВЧ-генераторы на кабельных волнах в последние годы интенсивно исследуются как экспериментально, так и теоретически. Первая успешная экспериментальная реализация такого генератора относится к 1982 г. [1]. В дальнейшем были проведены более детальные эксперименты, позволившие не только установить сам факт генерации и измерить мощности генерируемого излучения, но и промерить спектральные характеристики этого излучения [2].

В теории, как ни странно, намечилось определенное отставание от потребностей эксперимента. В большинстве теоретических работ исследовались различные предельные случаи, когда есть возможность существенного упрощения теоретической модели и даже получения аналитических результатов [3]. Параметры реальных экспериментов, на которые мы здесь ссылаемся, оказались не столь предельными (вполне умеренный релятивизм электронного пучка, ток пучка порядка предельного вакуумного и т. д.), чтобы безоговорочно применять при интерпретации этих экспериментов существующие теоретические результаты и оценки. Результаты численного моделирования пучково-плазменной системы с параметрами реального эксперимента в постановке начальной задачи [4] не вполне применимы к генератору, в котором существенны процессы пространственного переноса и усиления излучения и его вынос в окружающее пространство. Кроме того, все упомянутые работы не учитывают факта, что в экспериментах электронный пучок является импульсным с определенной формой переднего и заднего фронтов.

Имеются, правда, работы, в которых СВЧ-генератор моделируется путем прямого численного решения уравнений Максвелла–Власова [5]. С физической интерпретацией результатов подобных работ часто возникают трудности, подобные трудностям при интерпретации реального эксперимента. Кроме того, постановка граничных условий на излучающей границе генератора, адекватных точным уравнениям Максвелла–Власова,

* Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

является сложной задачей, достоверно решаемой лишь в ряде предельных случаев [6]. И наконец, даже при современном уровне развития вычислительной техники численная реализация точных моделей является трудоемкой задачей, тем более, что теоретическая обработка эксперимента требует рассмотрения многочисленных вариантов вплоть до решения задачи оптимизации.

Целью настоящей работы является создание и исследование достаточно простой модели релятивистского плазменного СВЧ-генератора на кабельной волне, основанной на двух предположениях:

— частота генерации ω (средняя частота в спектре излучения) порядка частоты, на которой коэффициент усиления плазменной волны (пространственный инкремент) достигает максимума;

— ширина спектра излучения $\Delta\omega$ мала по сравнению со средней частотой ω .

Предположения эти подтверждаются при моделировании генератора путем прямого решения полной системы уравнений Максвелла–Власова [5] и частично оправдываются экспериментальными данными. Впрочем, говорить о полном согласии с экспериментом пока рано [2, 7], необходимы уточненные экспериментальные данные.

Модель, основанная на названных выше предположениях, использована в работе [8], посвященной плазменному СВЧ-генератору на объемной волне. Кабельная плазменная волна является поверхностной, с чем связан ряд существенных особенностей. Поэтому плазменный СВЧ-генератор на кабельной волне требует специального рассмотрения. Заметим, что основные удачные экспериментальные реализации плазменного СВЧ-генератора связаны с использованием именно плазменных кабельных волн.

2. Приведем сначала некоторые сведения о кабельных плазменных волнах [9].

Рассмотрим металлический волновод произвольного сечения. Обозначим через z продольную координату в волноводе, а через r_{\perp} — координату в поперечном сечении. В волноводе находится бесконечно тонкая плазма с невозмущенной плотностью, определяемой формулой $n_p S_p \delta(r_{\perp} - r_p)$, где $n_p S_p$ — погонная плотность плазмы, а r_p — координата плазмы в поперечном сечении волновода. Плазма полностью замагничена сильным внешним магнитным полем параллельным оси z . Считаем, что собственные функции поперечного сечения волновода $\varphi_n(r_{\perp})$ и соответствующие собственные значения $k_{\perp n}^2$ известны ($n = 1, 2, 3, \dots$).

В линейном приближении собственные колебания такого волновода с плазмой определяются из уравнений [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi &= 4\pi \rho_p S_p \delta(r_{\perp} - r_p), \\ \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial t^2} &= -\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ψ — поляризационный потенциал, E_z — продольная компонента электрического поля, ρ_p — возмущение плотности плазмы, Δ_{\perp} — поперечная часть оператора Лапласа. На металлической поверхности волновода $\Psi = 0$. Зависимости величин Ψ и ρ_p от z и

t ищем в виде $\exp(-i\omega t + ik_z z)$, а Ψ разложим еще и в ряд по собственным функциям:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(\mathbf{r}_{\perp}) \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (2)$$

$$\rho_p = \bar{\rho}_p(\mathbf{r}_{\perp}) \exp(-i\omega t + ik_z z).$$

Подставим (2) в (1), из первого уравнения (1) выразим коэффициенты A_n и подставим их во второе уравнение (1), домножим второе уравнение (1) на $\delta(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_p)$ и проинтегрируем его по поперечному сечению волновода. Исключая далее из полученного соотношения $\bar{\rho}_p$, найдем дисперсионное соотношение для спектров колебаний рассматриваемого волновода:

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2}, \quad (3)$$

$$k_{\perp p}^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_p}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{\varphi_n^2(\mathbf{r}_p)}{\|\varphi_n\|^2} \right]^{-1}.$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_p / m}$ — ленгмюровская частота, $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2 / c^2$, а $k_{\perp p}^2$ — квадрат поперечного волнового числа волны тонкой плазмы в волноводе. Поперечные компоненты волны (3) выражаются через Ψ по известным общим формулам [10]. В области частот $\omega < k_z c$ волна со спектром (3) является поверхностной, т. е. поля волны убывают при удалении от плазмы.

Если волновод является круглым с радиусом R , то выражение (3) допускает дальнейшее упрощение. В этом случае плазма является трубкой со средним радиусом $r_p < R$ и толщиной Δ_p (погонная плотность плазмы $2\pi r_p \Delta_p n_p$), а собственные функции есть функции Бесселя. Тогда, ограничиваясь аксиально симметричным случаем и выполняя суммирование во втором выражении (3), получим

$$k_{\perp p}^2 = \left\{ r_p \Delta_p J_0^2(\chi r_p) \left[\frac{K_0(\chi r_p)}{I_0(\chi r_p)} - \frac{K_0(\chi R)}{I_0(\chi R)} \right] \right\}^{-1}, \quad (4)$$

где I_0 и K_0 — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно.

При $k_z \rightarrow 0$ из (3) и (4) находим явное выражение для спектра:

$$\omega = k_z c \left(1 + \frac{k_{\perp p}^2 c^2}{\omega_p^2} \right)^{-1/2}, \quad (5)$$

$$k_{\perp p}^2 = [r_p \Delta_p \ln(R/r_p)]^{-1}.$$

Видно, что при большой плотности плазмы, когда $\omega_p^2 \gg k_{\perp p}^2 c^2$, фазовая скорость волны (5) близка к скорости света. Можно показать [9], что структура поля волн (5) близка к структуре поля кабельной (или *ТЕМ*) волны металлического коаксиала [10], поэтому волну со спектром (5) назвали кабельной плазменной волной. При $\omega_p \rightarrow \infty$ (плазма переходит в металл) волна (5) в точности переходит в кабельную волну коаксиала.

В области более коротких длин волн, когда $k_z r_p \geq 1$, поверхностная плазменная волна как по фазовой скорости, так и по структуре поля значительно отличается от кабельной. В частности спектр похож на спектр волн на глубокой воде:

$$\omega = \omega_p \sqrt{k_z \Delta_p / 2}. \quad (6)$$

3. Важной деталью плазменного генератора является устройство для вывода излучения (рупор). Обозначим через $z = L$ местоположение рупора, а через $z = 0$ обозначим плоскость инжекции пучка в генератор. Плазма, очевидно, занимает в волноводе область $0 \leq z \leq L$. Пусть в плоскости инжекции расположена металлическая сетка (или запредельное сужение волновода), прозрачная для электронов пучка и абсолютно непрозрачная для излучения. Формулировка граничных условий для поля при $z = 0$ очевидна — полное отражение. Остается плоскость излучения $z = L$.

В экспериментах в качестве рупора используется металлический коаксиал с внешним радиусом R и внутренним r_p , т. е. осуществляется переход плазменного коаксиала в металлический. Необходимо поставить на этом переходе граничное условие для поля. Общие, весьма сложные, условия имеются в [5, 6]. Для наших целей достаточна постановка более простых качественных условий при $z = L$.

Электронный пучок возбуждает поверхностную плазменную волну с фазовой скоростью, близкой к невозмущенной скорости электронов пучка u . На границе $z = L$ плазменная волна частично излучается в виде кабельной волны в металлический коаксиал, а частично отражается обратно в плазменный волновод. Если возбуждаемая пучком плазменная волна с хорошей степенью точности является кабельной ($k_z r_p \ll 1$, $\omega_p \gg k_{\perp p} c$), то ее отражение от металлического коаксиала определяется разностью фазовых скоростей волн в плазме и коаксиале (как в задаче Френеля). Так как фазовая скорость плазменной волны порядка u , а в металлическом коаксиале фазовая скорость равна скорости света c , то для коэффициента отражения при релятивистской скорости u получаем оценку $\kappa = 1/4\gamma^2$, где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор электронного пучка.

При $k_z r_p \sim 1$ необходимо учитывать не только различие фазовых скоростей, но и различие поперечных структур поверхностной плазменной и кабельной волн. Очевидно, что с ростом k_z (или частоты) коэффициент отражения будет расти и при $\omega \rightarrow \omega_p$ обратится в единицу.

Оценивая распределение потоков энергии плазменной кабельной волны внутри плазменной трубки ($r < r_p$) и вне ее ($r > r_p$) [9] и используя некоторые данные эксперимента [1, 7], можно предложить следующую экстраполяцию для коэффициента отражения в область более высоких частот

$$\kappa = \frac{1}{4\gamma^2} \left(1 + 0.25 \frac{\omega^2 r_p^2}{u^2 \gamma^2} \ln \frac{R}{2r_p} \right). \quad (7)$$

Формула (7) заведомо неприменима при $\omega \sim \omega_p$, но на таких частотах, когда плазменные волны потенциальны, не имеет никакого смысла вообще говорить о каком-либо генераторе, как об источнике электромагнитного излучения, да и сама модель бесконечно тонкой плазмы неприменима. Поэтому далее, полагая частоты не слишком высокими, будем пользоваться оценочной формулой (7). Из дальнейшего будет видно, что данное предположение оправдано. На рис. 1 представлены зависимости коэффициента

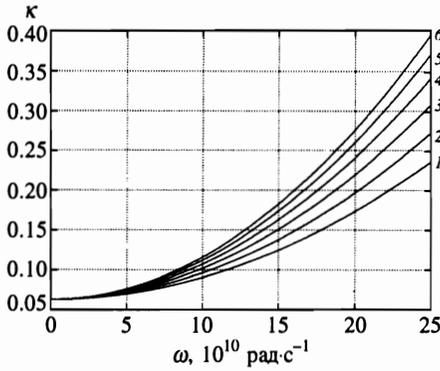


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения от частоты для различных радиусов плазмы $r_p = 0.7$ (1), 0.8 (2), 0.9 (3), 1.0 (4), 1.1 (5), 1.2 (6) см

отражения κ от частоты ω , рассчитанные по формуле (7) для различных радиусов плазмы. Остальные параметры как здесь, так и далее зафиксированы: радиус волновода $R = 1.8$ см, скорость пучка $u = 2.6 \cdot 10^{10}$ см/с, релятивистский фактор $\gamma = 2$.

4. Перейдем теперь к выводу основных нелинейных уравнений настоящей работы. При наличии электронного пучка, который также считается бесконечно тонким, первое уравнение системы (1) изменится:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 4\pi \rho_p S_p \delta(r_{\perp} - r_p) + 4\pi \rho_b S_b \delta(r_{\perp} - r_b), \quad (8)$$

где ρ_b — возмущение плотности заряда пучка, определяемое формулой [8]:

$$\rho_b = en_b \frac{\lambda}{N} \sum_j \delta(z - z_j). \quad (9)$$

Здесь $n_b S_b$ — погонная плотность электронов пучка, z_j — продольная координата j -го электрона, λ — некоторая характерная длина (см. ниже), а N — число электронов (крупных частиц) на участке невозмущенного пучка длиной λ .

Координаты электронов пучка можно найти из релятивистских уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= v_j, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{v_j}{\sqrt{1 - v_j^2/c^2}} \right) &= \frac{e}{m} E_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где v_j — скорость j -го электрона, а E_z определяется третьим соотношением системы (1). Что касается электронов плазмы, то, следуя обычному в плазменной СВЧ-электронике подходу, описываем их в линейном приближении [11]. Поэтому возмущение плотности электронов плазмы определяется вторым уравнением системы (1).

Уравнения движения (10) дополняются условиями инжекции электронов пучка в волновод через сечение $z = 0$. Обозначим через t_{0j} время инжекции j -го электрона (крупной частицы). Тогда, учитывая, что инжектируемый пучок моноскоростной, запишем следующие условия инжекции:

$$\begin{aligned} z_j|_{t=t_{0j}} &= 0, \\ v_j|_{t=t_{0j}} &= u. \end{aligned} \quad (11)$$

Если электронный пучок начинает инжектироваться при $t = 0$, то все $t_{0j} > 0$. Временной интервал между последовательными влетами крупных частиц в волновод удобно выбрать постоянным с помощью следующего соотношения:

$$t_{0j+1} - t_{0j} = \frac{2\pi}{N\omega}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где ω — средняя частота генерируемого сигнала. Отсюда и из второго соотношения (11) определяем характерную длину λ , входящую в (10):

$$\lambda = 2\pi u/\omega.$$

Для моделирования фронтов пучка удобно использовать весовые множители $q(t_{0j})$, вводя их под знак суммы в (9). При $q(t_{0j}) = 0$ передний фронт еще не пришел, при $q(t_{0j}) = 1$ ток пучка вышел на стационар. В работе функция $q(t_{0j})$ определялась из реальных экспериментальных осциллограмм [1, 2, 7].

Представим поляризационный потенциал поля в плазменно-пучковом волноводе в виде

$$\begin{aligned} \Psi(z, t, r_{\perp}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r_{\perp}) [A_n(z, t) \exp(-i\omega t + ik_z z) + \\ & + B_n(z, t) \exp(-i\omega t - ik_z z) + \text{c.c.}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь пропорциональные A_n слагаемые соответствуют волне, резонансно возбуждаемой электронным пучком и распространяющейся в направлении от $z = 0$ к $z = L$. Слагаемые с B_n соответствуют отраженной волне, распространяющейся в противоположном направлении и осуществляющей обратную связь в генераторе. Отраженная волна в среднем с электронным пучком не взаимодействует.

В соответствии с тем, что резонансное возбуждение плазменной волны электронным пучком происходит за счет эффекта Черенкова (одночастичного или коллективного [12]) и в согласии с определением характерной длины λ следует положить в (13) $k_z = \omega/u$.

В (13) введены медленные амплитуды волн $A_n(z, t)$ и $B_n(z, t)$. Это не амплитуды разных поперечных мод волновода. Возбуждается только одна мода — поверхностная. Мода эта формируется благодаря бесконечным суммам в (13) от $\varphi_n A_n$ и $\varphi_n B_n$. Медленность амплитуд понимается в смысле основных предположений настоящей работы: есть средняя частота спектра ω и ширина спектра $\Delta\omega \ll \omega$. Поэтому под дифференциальными операторами следует подразумевать следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega + \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \pm ik_z + \frac{\bar{\partial}}{\partial z},$$

где значок «тильда» означает дифференцирование только медленной амплитуды, верхний знак в операторе $\partial/\partial z$ здесь и далее относится к резонансной волне, а нижний — к отраженной. Медленность амплитуд означает выполнение неравенств

$$\left| \frac{1}{\omega A_n} \frac{\bar{\partial} A_n}{\partial t} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{k_z A_n} \frac{\bar{\partial} A_n}{\partial z} \right| \ll 1. \quad (14)$$

Такие же неравенства верны и для амплитуд B_n . В дальнейшем знак «тильда» у производных от медленных амплитуд для краткости опускается.

По аналогии с (13) возмущение плотности заряда плазмы, определяемое из второго линейного уравнения системы (1), представим в виде

$$\rho_p = \frac{1}{2} (\rho_p^+ \exp(-i\omega t + ik_z z) + \rho_p^- \exp(-i\omega t - ik_z z) + \text{с.с.}), \quad (15)$$

где первое слагаемое с амплитудой ρ_p^+ относится к резонансной волне, а второе слагаемое с амплитудой ρ_p^- — к отраженной волне. Так как плазма бесконечно тонкая, то амплитуды ρ_p^\pm имеют смысл только в одной точке поперечного сечения волновода при $r_\perp = r_p$. Поэтому функции ρ_p^\pm не требуется раскладывать по собственным функциям $\varphi_n(r_\perp)$.

Подставляя (13) и (15) в уравнение (8), после усреднения по быстрым переменным (см. ниже) и с учетом неравенств (14) получим выражения для амплитуд A_n и B_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \hat{L}_n^{-1} 4\pi (G_{pn} \rho_p^+ + e n_b G_{bn} \langle \rho_b \rangle), \\ B_n &= \hat{L}_n^{-1} 4\pi G_{pn} \rho_p^-. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $G_{\alpha n} = S_\alpha \varphi_n(r_\alpha) / \|\varphi_n\|^2$, $\alpha = p, b$ — геометрические факторы, учитывающие положение плазмы и пучка в поперечном сечении волновода, а

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^{-1} &= \pm i k_z \left(1 + \frac{i}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{k_{\perp n}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{2i k_z^2}{k_{\perp n}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}} \left(\pm \frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\beta^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

— обратный оператор n -ой гармоники поляризационного потенциала ($\beta = u/c$). При получении (17) учтены неравенства (14).

Процедура усреднения, использованная при получении (16), определяется соотношением [8]:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_{z-\lambda/2}^{z+\lambda/2} \Phi(z') \exp(i\omega t \mp ik_z z') dz', \quad (18)$$

где Φ — усредняемая величина. Поэтому $\langle \rho_b \rangle$ из (16), как легко видеть, определяется формулой

$$\langle \rho_b \rangle = \frac{2}{N} \sum_j q(t_{0j}) \exp(i\omega t - ik_z z_j). \quad (19)$$

Суммирование в (19) осуществляется по всем крупным частицам из области $(z - \lambda/2, z + \lambda/2)$. Полученное значение приписывается координате z .

При численном моделировании, чтобы избежать шумовых эффектов вычислительной природы, целесообразно осуществить дополнительное усреднение и по времени. Рассмотрим временной интервал $(t - 2\pi/\omega, t)$, где t — текущий момент времени. Разобьем этот интервал на M слоев и на каждом слое вычислим величину (19). В качестве

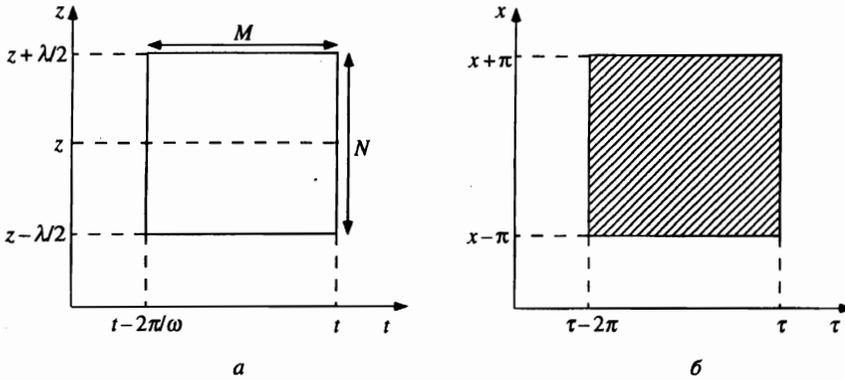


Рис. 2. К процедуре усреднения

$\langle \rho_b \rangle$ используется среднее арифметическое этих величин. На рис. 2а поясняется процедура усреднения. Вычисленное значение приписывается точке (t, z) . В промежуточных точках используется интерполяция кубическими сплайнами.

Подставим далее коэффициенты A_n и B_n во второе уравнение системы (1) и во второе уравнение (10) (с учетом (13), определения E_z и того, что отраженная волна в среднем на пучок не действует). В результате после громоздких, но простых по смыслу преобразований, получим основные уравнения настоящей работы:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\eta_0}{1 + f_p} \right) a^+ = \\ & = -\alpha_b \bar{\alpha} \left[\frac{i}{2\gamma^2(1 + f_p)} + \frac{1 + f_G}{1 + f_p} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] \langle \rho_b \rangle, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\eta_0}{1 + f_p} \right) a^- = 0, \\ & \langle \rho_b(x, \tau) \rangle = \frac{2}{MN} \sum_j q(\tau_{0j}) \exp(i\tau - ix_j) \theta(x, \tau), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{dx_j}{d\tau} = y_j,$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y_j}{\sqrt{1 - \beta^2 y_j^2}} \right) =$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{i}{2} \gamma^3 \left\{ \left[1 - i2\gamma^2(1 + f_G) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] a^{++} \right. \\ & \left. + \alpha_b \left[1 - i2\gamma^2(1 + f_b) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] \langle \rho_b \rangle \right\} \exp(-i\tau + ix_j) + \text{с.с.} \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные время $\tau = \omega t$, координата $x = k_z z$ и скорость $y = v/u$. Явный вид безразмерных амплитуд резонансной и отраженной плазменных волн a^\pm значения не имеет, поскольку в дальнейшем они приводятся в относительных единицах. Функция $\theta(x, \tau)$ в выражении для $\langle \rho_b \rangle$ равна единице в области, заштрихованной

на рис. 2б, и нулю вне этой области. Кроме того, в (20) использованы следующие обозначения:

$$\alpha_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp b}^2 u^2 \gamma^2},$$

$$\tilde{\alpha} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_b) \varphi_n(\mathbf{r}_p)}{\|\varphi_n\|^2} \right]^2 S_p k_{\perp p}^2 S_b k_{\perp b}^2, \quad (21)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_p} \right), \quad v_g = \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha_p \gamma^2 (1 + f_p)} \right)^{-1}.$$

Здесь $k_{\perp p}^2$ — величина, введенная в (3), $k_{\perp b}^2$ — ее аналог ($k_{\perp b}^2$ получается из $k_{\perp p}^2$ заменой индекса «р» на индекс «b»), $\tilde{\alpha}$ — коэффициент связи пучковой и плазменной волн (интеграл перекрытия полей [12]), η_0 — отстройка частоты волны от точного черенковского резонанса¹⁾, v_g — отношение групповой скорости плазменной волны к u . Под χ в выражениях (21) следует понимать $\chi = \omega/u\gamma$.

Зависимость величин (21) от ω отражает нелинейный закон дисперсии пучковых и плазменных волн. Дисперсией определяются и величины f_p, f_b и f_G , входящие в систему (20). При $\omega \rightarrow 0$ эти величины обращаются в нуль, а при $\chi R > 1$ стремятся к $-1/2$. Они существенны на частотах, когда спектр имеет вид (6). Мы не приводим здесь выражения для этих величин ввиду их громоздкости.

В случае круглого волновода, когда пучок является тонкостенной трубкой радиусом r_b и толщиной Δ_b , коэффициент связи $\tilde{\alpha}$ имеет вид (для определенности при $r_p > r_b$):

$$\tilde{\alpha} = \frac{I_0(\chi r_b) [K_0(\chi r_p) I_0(\chi R) - K_0(\chi R) I_0(\chi r_p)]}{I_0(\chi r_p) [K_0(\chi r_b) I_0(\chi R) - K_0(\chi R) I_0(\chi r_b)]}. \quad (22)$$

При $r_b = r_p$ коэффициент $\tilde{\alpha} = 1$. При увеличении разности $r_p - r_b$ коэффициент $\tilde{\alpha}$ уменьшается, причем тем сильнее, чем выше частота. На высоких частотах

$$\tilde{\alpha} = \exp \left(-2 \frac{\omega}{u\gamma} |r_p - r_b| \right).$$

Уравнения (20) дополняются граничными условиями (условия обратной связи)

$$a^-(x = \omega L/u, \tau) = \kappa a^+(x = \omega L/u, \tau),$$

$$a^+(x = 0, \tau) = -a^-(x = 0, \tau), \quad (23)$$

где коэффициент отражения κ дается формулой (7), а знак «минус» во втором соотношении отвечает изменению фазы волны при отражении от металлической поверхности. Кроме того, требуются начальные условия $a^{\pm}(x, \tau = 0) = 0$ и условия инжекции электронов пучка (11). Для моделирования механизма возбуждения системы предполагалось, что при влете в систему электроны пучка имеют малую случайную модуляцию по релятивистскому импульсу ($\sim 1\%$) (или другой вариант — малую случайную модуляцию по плотности).

¹⁾ Положим в (3) $k_z = \omega/u$. В результате получим $\alpha_p = 1$ или $\eta_0 = 0$.

Эффективность генерации будем оценивать через относительные кинетические потери пучка по формуле

$$\eta = \frac{W_{in} - W_0 - W_{out}}{W_{in}}. \quad (24)$$

Здесь W_{in} — энергия всех электронов, инжектированных в волновод к моменту времени τ , W_{out} — энергия всех электронов, вылетевших к моменту времени τ через сечение $z = L$, W_0 — энергия электронов, находящихся в момент времени τ в волноводе при $0 < z < L$.

5. Рассмотрим систему (20) в линейном приближении. Причем для дальнейшего достаточно ограничиться рассмотрением только резонансной волны. Можно показать, что в линейном приближении уравнение для $\langle \rho_b \rangle$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \langle \rho_b \rangle = - \left[1 - i2\gamma^2(1 + f_G) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] a^+ - \alpha_b \left[1 - i2\gamma^2(1 + f_b) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] \langle \rho_b \rangle, \quad (25)$$

а уравнение для a^+ остается таким же, как и в системе (20).

Положим $\partial/\partial\tau = 0$, что соответствует граничной задаче об усилении стационарного сигнала с фиксированной частотой и будем искать решение в виде $\langle \rho_b \rangle$, $a^+ \propto \exp(i\delta x)$. Тогда из (25) и первого уравнения системы (20) получим дисперсионное соотношение

$$\left(\delta + \frac{\eta_0}{1 + f_p} \right) [\delta^2 - \alpha_b (1 + 2\gamma^2(1 + f_b)\delta)] = - \frac{\tilde{\alpha}\alpha_b}{2\gamma^2(1 + f_b)} [1 + 2\gamma^2(1 + f_G)\delta]^2. \quad (26)$$

Если принять во внимание определение безразмерной координаты x и вид (15), в котором искалось возмущение плотности заряда плазмы, то легко видеть, что полное продольное волновое число колебаний в пучково-плазменной системе определяется соотношением

$$k_{\parallel} = k_z(1 + \delta) = \frac{\omega}{u}(1 + \delta). \quad (27)$$

Мнимая часть (27) определяет коэффициент усиления колебаний.

В пределе низких частот уравнение (26) переходит в подробно исследованное уравнение работы [13]. Мы не будем здесь аналитически исследовать уравнение (26), так как при параметрах пучково-плазменной системы, которые здесь нас интересуют, не представляется возможным получить наглядные аналитические решения. Параметры берутся из реального эксперимента [2] и являются следующими: ток пучка $J_b^{max} = 2$ кА, радиус пучка $r_b = 0.65$ см, толщина пучка $\Delta_b = 0.1$ см, плазменная частота $\omega_p = 35 \cdot 10^{10}$ рад/с, скорость пучка $u = 2.6 \cdot 10^{10}$ см/с ($\gamma = 2$). В настоящей работе варьировались длина системы $L = 10, 15, 20$ см и радиус плазмы r_p .

Дисперсионное соотношение (26) необходимо для получения важной для дальнейшего информации. Ноль первой скобки в левой части уравнения (26),

$$\delta = - \frac{\eta_0}{1 + f_p}, \quad (28)$$

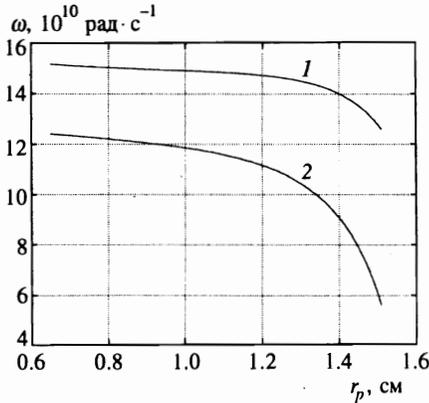


Рис. 3

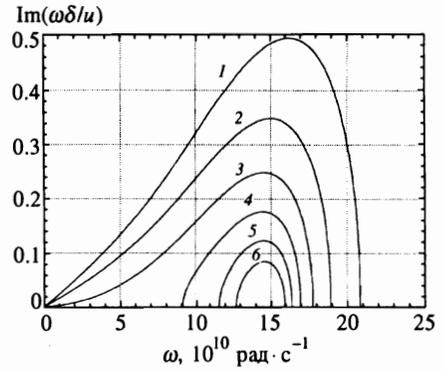


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость резонансных частот (кривая 1 — рамановский резонанс, кривая 2 — черенковский резонанс) от радиуса плазмы. Радиус пучка равен 0.65 см

Рис. 4. Зависимость пространственного инкремента неустойчивости от частоты для различных радиусов плазмы $r_p = 0.7$ (1), 0.8 (2), 0.9 (3), 1.0 (4), 1.1 (5), 1.2 (6) см

определяет волновое число резонансной поверхностной плазменной волны. В этом легко убедиться, подставив в (3) представление (27) и разложив (3) по степеням δ . При $\delta = 0$, как видно из (27), $k_{||} = k_z = \omega/u$, что означает точное равенство скорости пучка u и фазовой скорости плазменной волны, т. е. черенковский резонанс. Частота черенковского резонанса определяется из уравнения $\eta_0 = 0$. Эта частота как функция r_p представлена на рис. 3 — кривая 2 (остальные параметры здесь и далее — как указано выше). Усиление на частоте черенковского резонанса называют усилением за счет одночастичного эффекта Черенкова [12].

Нули второй скобки в левой части уравнения (26) определяют продольные волновые числа пучковых волн плотности заряда — быстрой и медленной [14]. Для медленной волны имеем

$$\delta = \alpha_b \gamma^2 (1 + f_b) + \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_b 2 \gamma^2 (1 + f_b))^2 + 4 \alpha_b}. \quad (29)$$

Частоту, на которой равны фазовые скорости плазменной волны и медленной пучковой волны, называют частотой рамановского резонанса²⁾. Частота рамановского резонанса определяется как совместное решение уравнений (28) и (29). Эта частота, как функция r_p , представлена на рис. 3 — кривая 1. Усиление на частоте рамановского резонанса называют усилением за счет эффекта Рамана или, что предпочтительнее, коллективного эффекта Черенкова [14, 12]. В качестве частоты, входящей в (13), (15), а следовательно,

²⁾ В литературе для определения такого механизма излучения также используется понятие аномального эффекта Доплера, представляющего собой взаимодействие волн с энергиями различных знаков [14].

в уравнения (20), параметры (21) и коэффициент отражения κ , разумно выбрать одну из названных выше частот.

На вопрос о конкретном выборе частоты можно ответить, исследовав численные решения уравнения (26). На рис. 4 представлены зависимости от частоты величин $\text{Im}(\omega\delta/u)$, т. е. коэффициентов усиления, полученных для различных радиусов плазмы r_p . Из рис. 3 и рис. 4 можно видеть, что максимум коэффициентов усиления приходится на частоту рамановского резонанса, а частота черенковского резонанса ничем не выделяется. Более того, при $r_p > 1.1$ см на частоте черенковского резонанса усиление вообще отсутствует. Поэтому в дальнейшем в (20), (21) и (26) подставляется частота рамановского резонанса как частота наиболее вероятного возбуждения генератора. Если это не так, то спектры излучения, полученные с помощью численного решения системы (20), покажут соответствующее отклонение.

Несколько слов о терминологии. Полосой усиления будем называть область частот, в которой коэффициент усиления отличен от нуля (см. рис. 4). Те режимы, при которых полоса усиления начинается с нулевой частоты, будем называть комптоновскими. Режимы, при которых полоса усиления начинается с частоты, отличной от нуля, будем называть рамановскими. При удалении плазмы от пучка комптоновский режим усиления и генерации трансформируется в рамановский. Следует, однако, иметь в виду, что при параметрах, которые диктуются экспериментом, комптоновский и рамановский режимы, как предельные случаи, подробно исследованные в работах [9, 12, 13], не существуют. Здесь мы имеем дело с самой сложной с теоретической точки зрения промежуточной областью параметров.

6. Перейдем к обсуждению результатов численного решения системы (20). Зададим, основываясь на экспериментальных данных [1, 2], параметры импульса тока пучка: полная длительность 37 нс, длительность переднего фронта 10 нс, а заднего — 14 нс.

Основными характеристиками плазменного генератора, приводимыми в настоящей работе, являются следующие: зависимости мощности излучения от времени для различных радиусов плазмы; время включения генератора в зависимости от радиуса плазмы; суммарные относительные кинетические потери пучка за все время инжекции в зависимости от радиуса плазмы для различных длин системы; распределение амплитуд волн по длине плазменно-пучкового волновода и фазовые плоскости электронов пучка в момент времени перед началом заднего фронта; спектр излучения за все время работы генератора.

Под временем включения понимается момент времени, когда эффективность (24) становится порядка 0.001 (начало инжекции $t = 0$). Спектр излучения рассчитывается по формулам:

$$S^2(\Omega) = \bar{a}\bar{a}^*, \quad \bar{a} = \int_0^{\infty} a^+(\omega L/u, \tau) e^{i\Omega\tau} d\tau. \quad (30)$$

Здесь $\Omega = \tilde{\omega}/\omega$, где ω — частота рамановского резонанса, а $\tilde{\omega}$ — частота генерации.

Отметим, что, строго говоря, для произвольного момента времени величина (24) не есть эффективность излучения. Но после прохождения импульса пучка, когда величина (24) выходит на константу, она определяет ту часть энергии, которую пучок потерял. Эти потери состоят из следующего: нагрев плазмы, отражение электронов в области $z < 0$ и излучение. В данной модели нагрев плазмы не учитывается, да и в реальных условиях он несуществен. Отраженные электроны, как показывает численный

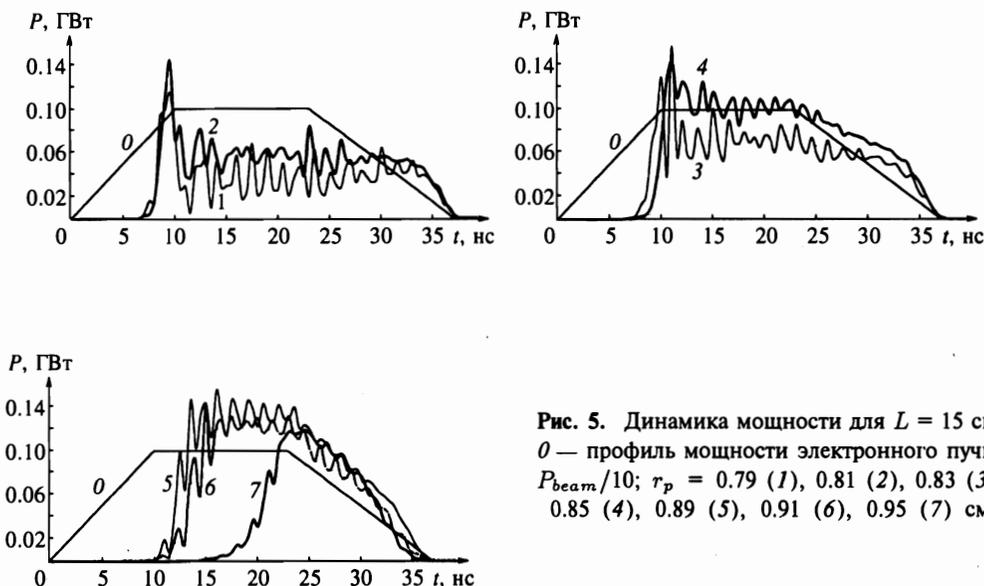


Рис. 5. Динамика мощности для $L = 15$ см: 0 — профиль мощности электронного пучка $P_{\text{пучка}}/10$; $r_p = 0.79$ (1), 0.81 (2), 0.83 (3), 0.85 (4), 0.89 (5), 0.91 (6), 0.95 (7) см

счет, отсутствуют. Остается только излучение.

На рис. 5 для $L = 15$ см и некоторых радиусов плазмы представлены зависимости от времени мощности излучения, а также приведена форма импульса пучка. Видно, что с увеличением расстояния между пучком и плазмой возрастает время включения генератора. При $r_p = 1$ см генератор вообще не включается, не хватает длительности импульса пучка. При увеличении длительности импульса генератор включился бы и при этом радиусе плазмы³⁾.

На рис. 6а показана зависимость от радиуса плазмы времени включения генератора для различных длин волновода L . В комптоновском режиме, когда расстояние между пучком и плазмой мало, время включения при увеличении радиуса плазмы растет сравнительно медленно. В рамановском режиме рост времени включения более существенный. Численные значения для времени включения от 5 до 30 нс согласуются с данными эксперимента [7].

На рис. 6б показана зависимость от радиуса плазмы итоговой эффективности излучения η для различных длин генератора. Каждой длине системы соответствует взаимное оптимальное расположение пучка и плазмы в поперечном сечении, отвечающее максимальным потерям энергии электронного пучка. Причем при увеличении длины системы максимум становится меньше и смещается в область большего расстояния между пучком и плазмой.

При каждой фиксированной длине L прослеживаются определенные закономерности. Имеется оптимальный радиус плазмы, когда эффективность максимальна. При

³⁾ Из теории известно понятие стартового условия (тока) включения плазменного СВЧ-генератора [9]. Это условие типа $\text{Im}(\omega\delta L/u) > \ln(3/\kappa)$ для параметров, рассматриваемых в настоящей работе, выполнено. Мы это условие здесь не применяем по двум причинам: во-первых, пучок короткоимпульсный, во-вторых, стартовое условие получено аналитически для предельных случаев и в рассматриваемых условиях вряд ли корректно, но порядки величин определить оно позволяет.

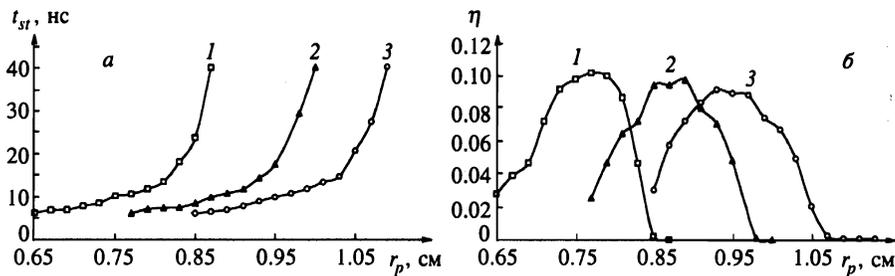


Рис. 6. а — Время включения генератора в зависимости от радиуса плазмы для различных длин системы $L = 10$ (1), 15 (2), 20 (3) см. б — Эффективность генератора в зависимости от радиуса плазмы для различных длин системы $L = 10$ (1), 15 (2), 20 (3) см

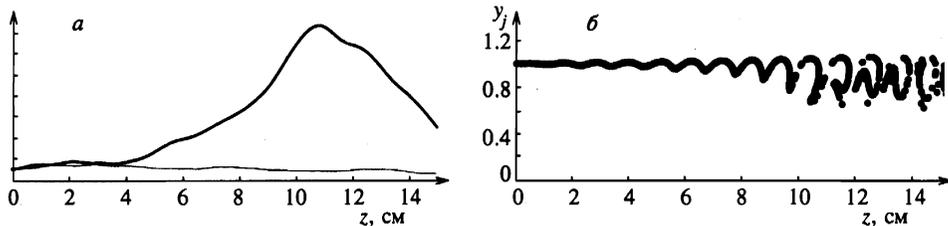
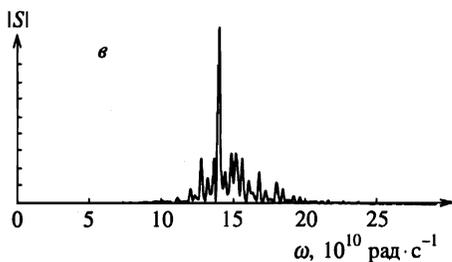


Рис. 7. а — Распределение амплитуд резонансной (жирная линия) и встречной (тонкая линия) волн в момент времени $t = 22$ нс для $L = 15$ см и $r_p = 0.79$ см. б — Фазовая плоскость электронов пучка в момент времени $t = 22$ нс для $L = 15$ см и $r_p = 0.79$ см. в — Спектр выходного излучения резонансной плазменной волны для $L = 15$ см и $r_p = 0.79$ см



больших и меньших r_p эффективность уменьшается. Уменьшение эффективности с увеличением r_p объясняется просто: из-за уменьшения коэффициента связи возрастает время включения генератора и успевает использоваться только часть импульса пучка; при очень больших r_p длительность импульса пучка оказывается вообще меньше времени включения.

Падение эффективности с уменьшением r_p также имеет объяснение. С уменьшением плазменного радиуса режим генерации приближается к комптоновскому. Известно, что при комптоновском режиме стабилизация пучково-плазменного взаимодействия осуществляется захватом электронов пучка полем плазменной волны [15]. После захвата пучок разбит на сгустки, которые колеблются в потенциальных ямах поля плазменной волны, то отдавая волне энергию, то отбирая ее у волны. Максимум эффективности наблюдается при таком радиусе плазмы, когда с учетом обратной связи захват электронов происходит вблизи излучающего устройства, где электроны покидают си-

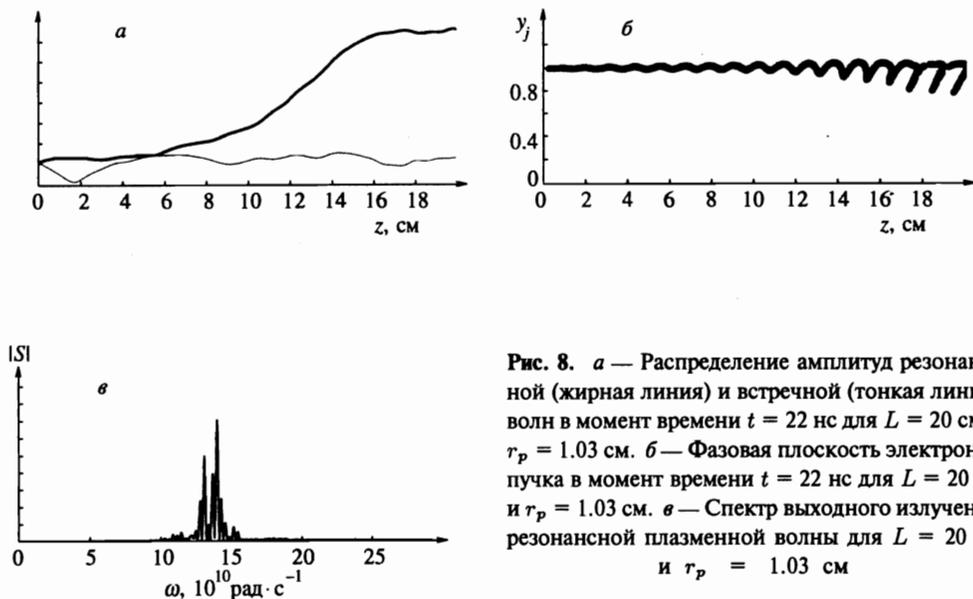


Рис. 8. а — Распределение амплитуд резонансной (жирная линия) и встречной (тонкая линия) волн в момент времени $t = 22$ нс для $L = 20$ см и $r_p = 1.03$ см. б — Фазовая плоскость электронов пучка в момент времени $t = 22$ нс для $L = 20$ см и $r_p = 1.03$ см. в — Спектр выходного излучения резонансной плазменной волны для $L = 20$ см и $r_p = 1.03$ см

стему. При уменьшении плазменного радиуса связь электронов пучка и плазменной волны увеличивается, точка захвата смещается внутрь системы и электроны пучка покидают систему в фазах послезахватных осцилляций, соответствующих отбору сгустками энергии у возбужденной плазменной волны. Поэтому эффективность генератора падает.

На рис. 7а показана мгновенная фотография распределения в плазменно-пучковом резонаторе амплитуд резонансной (жирная линия) и отраженной (тонкая линия) волн для момента времени $t = 22$ нс при $L = 15$ см и $r_p = 0.79$ см. На рис. 7б для этих же параметров и момента времени показана фазовая плоскость электронов пучка в резонаторе. По оси ординат отложены безразмерные скорости $y_j = v_j/u$. И наконец, на рис. 7в изображен интегральный спектр излучения для этого случая. При $r_p = 0.79$ см, как видно из рис. 4, реализуется комптоновский режим. Для него характерны послезахватные осцилляции электронов пучка в поле резонансной плазменной волны, что видно из фазовой плоскости (рис. 7б). Захват, как видно из рис. 7а, для данных параметров происходит внутри резонатора ($z \sim 11$ см). Эти параметры соответствуют именно неоптимальному комптоновскому режиму. Быстрый захват электронов пучка с последующим перемещением, осцилляциями и разрушением электронных сгустков обуславливает широкий спектр излучения (рис. 7в). Основная часть излучения сосредоточена в диапазоне от частоты черенковского ($12 \cdot 10^{10}$ рад/с) до частоты рамановского резонанса ($15 \cdot 10^{10}$ рад/с).

На рис. 8а-в изображены те же зависимости, что и на рис. 7а-в, но для $L = 20$ см и $r_p = 1.0$ см, когда режим близок к рамановскому. Видно отсутствие существенных пространственных осцилляций амплитуды резонансной волны, обусловленных захватом. Нелинейная стабилизация плазменно-пучковой неустойчивости в данном случае связана с опрокидыванием пучковой волны [9], что видно из фазовой плоскости электронов пучка (рис. 8б). Отсутствие осцилляции амплитуды резонансной плазменной

волны обуславливает сужение спектра излучения (рис. 8в).

С нашей точки зрения к настоящему моменту в публикациях отсутствуют надежные данные о спектрах плазменного СВЧ-генератора, поэтому мы не проводим здесь более подробного сравнения теоретических и экспериментальных спектров. К этому вопросу можно вернуться после появления новых результатов проводимого в настоящее время эксперимента.

Литература

1. М. В. Кузелев, Ф. Х. Мухаметзянов, М. С. Рабинович и др., ЖЭТФ **83**, 1358 (1982); ДАН СССР **267**, 829 (1978).
2. М. В. Кузелев, О. Т. Лоза, А. В. Пономарев и др., ЖЭТФ **109**, 2048 (1996).
3. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Ю. В. Бобылев и др., ЖЭТФ **91**, 1620 (1986).
4. T. D. Pointon and J. S. De Groot, Phys. Fluids **31**, 908 (1988).
5. М. В. Кузелев, А. Р. Майков, А. Д. Поезд и др., ДАН СССР **300**, 1112 (1988).
6. А. Р. Майков, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, ЖВМиМФ **25**, 883 (1984).
7. А. Г. Шкварунец, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, Физика плазмы **20**, 682 (1994).
8. М. А. Красильников, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ **108**, 521 (1995).
9. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме*, Наука, Москва (1990).
10. Б. З. Каценелембаум, *Высокочастотная электродинамика*, Наука, Москва (1966).
11. А. А. Иванов, *Физика сильнонеравновесной плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).
12. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **152**, 285 (1987).
13. А. Ф. Александров, М. В. Кузелев, А. Н. Халилов, Физика плазмы **14**, 455 (1988).
14. М. В. Незлин, УФН **120**, 181 (1976).
15. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Изв. вузов. Радиофизика **19**, 767 (1976).