ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 2, стр. 528–535

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ТОКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. А. Битюрин, А. Л. Цескис

Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 1996 г.,
после переработки 5 сентября 1996 г.

Рассмотрены различные аспекты влияния внешнего магнитного поля на турбулентно движущуюся проводящую жидкость. При малых магнитных полях найдено распределение электрических величин (как электрическое поле, так и ток при этом отличны от нуля). Для очень больших магнитных полей показано, что турбулентное движение приобретает двумерную структуру. В случае температурно-стратифицированной среды при наличии турбулентного потока тепла описан эффект появления составляющей электрического тока, перпендикулярной потоку и магнитному полю.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания магнитогидродинамического турбулентного движения включает два сорта задач. С одной стороны, она касается, например, генерации магнитных полей при турбулентном движении проводящей жидкости (такого рода эффекты имеют важнейшее значение для различных астрофизических приложений). Соответствующий математический аппарат при этом сводится к системе уравнений, содержащей как гидродинамические уравнения движения (включающие лоренцеву силу $[\mathbf{jB}]$) и неразрывности, так и все уравнения Максвелла [1]. С другой стороны, изучение магнитогидродинамического турбулентного движения в каналах различных МГД-устройств, а также исключительно важная задача об изменении свойств турбулентного движения как такового под воздействием внешнего поля приводит к ситуациям, когда оказывается возможным пренебречь флуктуирующим магнитным полем. Такая возможность связана с малостью магнитного числа Рейнольдса,

$$\mathrm{Re}_m \ll 1,$$

где $\mathrm{Re}_m = vL/\nu_m$ (v — порядок значения гидродинамической скорости, L — характерный размер задачи, ν_m — магнитная вязкость жидкости). В этом так называемом безындукционном приближении уравнение Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

в случае однородного внешнего поля $\mathbf{B}$ сводится к $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$, так что электрическое поле потенциально:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

С учетом закона Ома $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$ и условия неразрывности электрического тока $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ это приводит к уравнению (при постоянной проводимости жидкости)

$$\nabla^2\varphi = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{1}$$

Уравнение (1) вместе с гидродинамическими уравнениями движения и неразрывности (мы рассматриваем несжимаемую жидкость, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) составляет, таким образом, полную систему из пяти уравнений для определения пяти неизвестных функций — трех компонент скорости, давления и электрического потенциала φ, а компоненты электрического тока при необходимости могут быть определены из закона Ома.

Поскольку решение указанных уравнений не может быть получено в сколько-нибудь общем виде[1)], для исследования соответствующих явлений обычно используются дополнительные полуэмпирические гипотезы или формальные предположения. Следует отметить здесь, что последние зачастую бывают неверными; например, в литературе иногда встречается утверждение, согласно которому при $\mathrm{Re}_m \ll 1$ можно положить $\mathbf{E} = 0$ [2, 4]. Бессодержательность этого условия может быть очевидным образом продемонстрирована с помощью уравнения (1): решение задачи при этом сводится к тривиальному случаю покоящейся жидкости [5]. В то же время экспериментальные данные показывают, что наложение внешнего магнитного поля на первоначально изотропную турбулентность (в проводящей жидкости) приводит к целому ряду нетривиальных эффектов. Ниже исследованы распределение электрического тока (и поля) в случае малого значения B, образование двумерной турбулентности в противоположном случае больших магнитных полей, а также некоторый «нечетный» эффект, имеющий место в температурно-неоднородной проводящей жидкости при наличии турбулентного потока тепла.

2. СЛАБЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

«Малость» магнитного поля должна определяться какой-либо безразмерной величиной; в рассматриваемом случае она соответствует малости отношения величины силы Лоренца jB к величине нелинейного по v члена в гидродинамическом уравнении движения, $\rho v^2/L$, так что

$$\frac{\sigma B^2 L}{\rho v} \ll 1,$$

где σ и B отличны от нуля; при этом, разумеется, должны выполняться неравенства $\sigma L/c\varepsilon_0 \gg 1$ и, тем более, $\sigma L/v\varepsilon_0 \gg 1$, обеспечивающие квазистационарность электромагнитного поля (см. [1], § 58). Интересуясь распределением электрического поля, можно при этом полностью пренебречь влиянием лоренцевой силы на движение, поскольку, как легко видеть, соответствующие поправки к электрическому полю сводились бы к высшим по B порядкам в разложении $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ по степеням B (здесь и далее

[1)] Кроме тех случаев, которые сводятся к задачам на устойчивость ламинарного течения и возникновение турбулентности [2] или связаны с вырождением турбулентности, когда нелинейными членами в уравнениях гидродинамики можно пренебречь [3].

угловые скобки отвечают статистическому усреднению). Поскольку в однородном поле **B**, наложенном на изотропную турбулентность, распределение **E** должно быть также однородным, а статистические средние должны совпадать со средним по объему (относительно эргодичности гидродинамических полей см. [6]), в силу известного равенства

$$(\nabla\varphi)^2 = \mathrm{div}(\varphi\nabla\varphi) - \varphi\nabla^2\varphi$$

и с учетом превращения интеграла по объему от div(...) в поверхностный имеем

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \left\langle(\nabla\varphi)^2\right\rangle = -\langle\varphi\nabla^2\varphi\rangle. \qquad (2)$$

Поскольку решение (1) имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\pi}\int \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\frac{d^3r}{r},\\ \boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v},\end{gathered} \qquad (3)$$

получаем из (1)–(3)

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \frac{B_iB_j}{4\pi}\left\langle\int \omega_i(\mathbf{x})\omega_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\frac{d^3r}{r}\right\rangle \qquad (4)$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся строчным латинским индексам). Рассматривая однородное магнитное поле, направленное вдоль одной из координатных осей, $\mathbf{B} = (0,0,B_3)$, $B_3 \equiv B$, и учитывая известные соотношения для средних значений от произведений производных скорости по координатам [7], можно (4) привести к виду (при очевидной престановочности операции усреднения и интегрирования)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}^2\rangle &= \frac{B^2}{4\pi}\left\langle\int \omega_3(\mathbf{x})\omega_3(\mathbf{x}+\mathbf{r})\frac{d^3r}{r}\right\rangle = \\ &= \frac{B^2}{4\pi}\int\left[-\Delta b_{ii}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 b_{ii}(\mathbf{r})}{\partial r_3^2} + \Delta b_{33}(\mathbf{r})\right]\frac{d^3r}{r}.\end{aligned} \qquad (5)$$

В изотропном случае тензор двухточечной корреляции скорости b_{ij} выражается через продольный b_{LL} и поперечный b_{NN} скаляры, зависящие от r [7]:

$$b_{ij}(\mathbf{r}) = [b_{LL}(r) - b_{NN}(r)]\,\frac{r_ir_j}{r^2} + b_{NN}\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. С учетом последнего выражения имеем

$$b_{ii} = b_{LL} + 2b_{NN},$$

$$b_{33} = (b_{LL} - b_{NN})\frac{r_3^2}{r^2} + b_{NN},$$

так что выражение в квадратных скобках в (5) превращается в $(-1/3)\nabla^2(b_{LL} + 2b_{NN})$. Таким образом,

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = -\frac{B^2}{12\pi}\int\frac{d^3r}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(b_{LL} + 2b_{NN}).$$

После интегрирования по углам это дает (для краткости полагаем $b_{LL} + 2b_{NN} = A$)

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = -\frac{B^2}{3} \int \left(r\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + 2\frac{\partial A}{\partial r} \right) dr = -\frac{B^2}{3} \left(2A\Big|_0^\infty + r\,\frac{\partial A}{\partial r}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{\partial A}{\partial r} dr \right). \quad (6)$$

Для вычисления соответствующих величин в (6) следует учесть, что корреляционные функции убывают при $r \to \infty$ во всяком случае не медленнее, чем r^{-5} (это является следствием конечности инварианта Лойцянского, связанного с сохраняющимся моментом импульса [8]); следовательно, окончательный результат имеет вид

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{B^2}{3} A(0) = \frac{B^2}{3} \langle \mathbf{v}^2 \rangle, \quad (7)$$

так как $b_{LL}(0) + 2b_{NN}(0)$ есть просто средний квадрат скорости турбулентного движения. Из (7) видно, что энергия электрического поля пропорциональна кинетической энергии жидкости и в рассматриваемом случае не связана со средним квадратом вихря в том смысле, что в (7) не содержится какого-либо множителя, имеющего размерность длины (в противном случае правая часть (7) включала бы некоторое характерное значение длины, отвечающей соотношению между $\langle (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$), вопреки часто встречающемуся утверждению о том, что $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ определяется мелкомасштабными движениями, дающими основной вклад в $\langle (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})^2 \rangle$ (см. [9]).

Вычисляя аналогичным образом средние значения величин $([\mathbf{vB}])^2$ и $(\mathbf{E}[\mathbf{vB}])$, легко убедиться в том, что средний квадрат тока отличается от (7) постоянным множителем, так что в рассматриваемом случае отличны от нуля как электрическое поле, так и плотность тока $\mathbf{j}$. Понятно также, что эти утверждения остаются в силе, вообще говоря, при произвольных (но не слишком больших значениях B). Выше уже было сказано, что выбор тривиального решения уравнений Максвелла, $\mathbf{E} = 0$, при турбулентном движении проводящей жидкости лишен каких бы то ни было логических оснований; в следующем разделе, однако, будет показано, что при достаточно больших значениях B реализуется другой специальный случай, $\mathbf{j} = 0$, который сводится к двумерному турбулентному движению.

3. СИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ. ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

При достаточно больших значениях B, когда неравенство $\sigma B^2 L/\rho v \ll 1$ не выполняется, пренебречь влиянием магнитного поля на турбулентность в проводящей жидкости становится уже невозможно, и все соответствующие величины принимают анизотропный характер. При однородном магнитном поле в пространстве имеется лишь одно выделенное направление, и тензор двухточечной корреляции скоростей должен быть осесимметричным:

$$b_{ij}(\mathbf{r}) = a_1 r_i r_j + a_2 \lambda_i \lambda_j + a_3 \delta_{ij} + a_4 r_i \lambda_j + a_5 r_j \lambda_i,$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{B}$, $a_1, \ldots, a_5$ — функции от r^2 и $\mathbf{r}\boldsymbol{\lambda}$. Разумеется, и уравнения, включающие b_{ij} (и соответствующие трехточечные моменты), и обобщающие уравнения Кармана–Ховарта могут быть получены сравнительно легко также и в рассматриваемом случае, однако их решение представляется еще более трудной задачей, чем решение уравнения Кармана–Ховарта. С другой стороны, физически наиболее интересным является вопрос о том, каков характер анизотропии турбулентности при достаточно больших значениях магнитного поля, при которых выполняется неравенство обратное приведенному в разд. 2:

$$\frac{\sigma B^2 L}{\rho v} \gg 1. \tag{8}$$

Важность этой проблемы связана с тем, что, как показывают опытные данные [10], для $\mathrm{Re}_m \ll 1$ при выполнении указанного неравенства турбулентное движение становится двумерным со скоростью, направленной перпендикулярно магнитному полю; такое движение обладает целым рядом нетривиальных особенностей, отличающих его от трехмерного (см. [11, 12]). Здесь необходимо отметить также, что, как показано в [1], двумерное турбулентное движение, перпендикулярное внешнему полю, имеет место и в обратном предельном случае $\mathrm{Re}_m \gg 1$, поскольку при этом уравнение генерации поля выполняется тождественно. Представляется очевидным, что наилучший путь теоретического достижения этих результатов должен был бы заключаться в решении соответствующих уравнений. Поскольку это оказывается невозможным, для получения указанного результата обычно используются какие-либо дополнительные соображения [11, 13] или численные эксперименты, см., например, [14]. Как правило, эти соображения опираются на аналогию с движением жидкости во вращающейся системе отсчета, при котором имеет место так называемая теорема Праудмена–Тейлора [15].

В то же время качественные «механические» соображения указывают во всяком случае, каким образом МГД-взаимодействие обусловливает стремление к двумерности. Действительно, рассматривая недеформируемую плоскую замкнутую линию электрического тока во внешнем магнитном поле, легко заметить, что взаимодействие поворачивает плоскость контура с током до тех пор, пока она не установится перпендикулярно магнитному полю. Ясно, однако, что в жидкости не существует недеформируемых контуров с током, и указанные соображения не могут считаться доказательством обсуждаемого результата. Таковое могло бы содержать получение каких-либо локальных соотношений, являющихся следствием гидро- и электродинамических уравнений и приводящих к двумерности.

С целью выбора этих соотношений, имея в виду (8), можно пренебречь в уравнении движения членом $\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ по сравнению с лоренцевой силой. Считая, что производная $\partial\mathbf{v}/\partial t$ также мала, и пренебрегая этой производной, получим

$$-\nabla p + [\mathbf{jB}] = 0, \tag{9}$$

что полностью аналогично исходному для вывода теоремы Праудмена–Тейлора соотношению (с той лишь разницей, что последнее содержит член, пропорциональный $[\mathbf{v\Omega}]$ вместо $[\mathbf{jB}]$). Заметим здесь, что, как и в случае теоремы Праудмена–Тейлора, выписывание (9) без $\partial\mathbf{v}/\partial t$ не может быть обосновано строго и является по сути предположением. Применяя операцию rot к (9), с учетом однородности $\mathbf{B}$ и неразрывности тока получаем

$$(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{j} = 0. \tag{10}$$

В случае теоремы Праудмена–Тейлора было бы $(\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{v} = 0$, и двумерность движения оказалось бы обеспеченной; в рассматриваемом случае (10) требует дополнительного обсуждения. Считая, что $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси z, и замечая, что уравнению (10) удовлетворяют все компоненты плотности тока, имеем

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Поскольку $[\mathbf{vB}]$ вообще не вносит вклада в z-компоненту тока, последняя связана только с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ (точнее, с ее z-компонентой); таким образом, при отсутствии разности потенциалов вдоль z в силу (11) имеем просто $E_z = 0$ (или, равносильно, $j_z = 0$), и распределение тока и электрического поля является двумерным. В силу этого вектор $\operatorname{rot}\mathbf{j}$ направлен вдоль z, так что из потенциальности $\mathbf{E}$ и закона Ома легко получить

$$(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{k}\psi(x, y, t),$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор вдоль z, ψ — функция, не зависящая от z. Из последнего соотношения следует

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \psi(x, y, t).$$

Поскольку скорость v_z должна быть во всяком случае ограничена, $\psi(x, y, t)$ обращается в нуль, так что имеем

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

а уравнения движения также, как легко видеть, превращаются в двумерные. Поскольку фактически оказывается $\operatorname{rot}\mathbf{j} = 0$ и распределение тока в этом случае соответствует минимуму джоулевой диссипации (см. задачу 3 к § 21 в [1]), можно сказать, что переход к двумерной структуре турбулентности в проводящей жидкости под действием однородного поля оказывается эквивалентным выполнению требования минимизации джоулева тепловыделения. Наконец, рассматривая физически интересный случай непроводящих границ (отсутствия тока на границе), из $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j} = 0$ в силу теоремы Лиувилля имеем также и $\mathbf{j} = 0$. Последнее просто означает, что электрическое поле связано со скоростью соотношением $\mathbf{E} = -[\mathbf{vB}]$, так что магнитное поле уже не взаимодействует с образовавшимся двумерным движением.

В заключение этого раздела необходимо оговорить, что перечисленные результаты имеют место в тех случаях, разумеется, когда это допускается граничными условиями. В реальной ситуации это означает, что соответствующие эффекты следует рассматривать на большом расстоянии от границ, нормаль к которым параллельна полю; эти расстояния должны, по крайней мере, значительно превышать основной масштаб турбулентного движения.

4. УСРЕДНЕНИЕ ЗАКОНА ОМА ПРИ НАЛИЧИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

Описанные в предыдущих разделах результаты имеют место в температурно-однородной среде, если же распределение температуры неоднородно, то ее флуктуации, обязанные своим происхождением турбулентности жидкости, могут коррелировать с флуктуациями скорости. Ниже показано, что наличие такой корреляции при учете зависимости проводимости среды от температуры ведет к нетривиальному эффекту, который может наблюдаться в соответствующих экспериментах.

При описании движения проводящей жидкости обычно приходится пользоваться некоторыми усредненными значениями соответствующих величин. При малых магнитных числах Рейнольдса в безындукционном приближении это, в частности, относится к величинам, фигурирующим в законе Ома, в котором проводимость заменяется ее эффективным значением, зависящим от распределения пространственно-временных неоднородностей. В случае турбулентного движения жидкости усредненный закон Ома имеет вид

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \sigma \rangle \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \sigma \rangle \left[\langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{B} \right] + \langle \sigma' \mathbf{E}' \rangle + \langle \sigma' [\mathbf{v}' \mathbf{B}] \rangle \tag{12}$$

(в последнем выражении штрихи относятся к пульсациям соответствующих величин, эффект Холла для простоты не рассматривается).

Величина $\langle \sigma' \mathbf{E}' \rangle$ включает в себя также и составляющую $\langle \sigma' \mathbf{E}'_{\sigma'} \rangle$, обязанную своим происхождением наличию неоднородности электрического поля в среде с неоднородной проводимостью даже при отсутствии движения (в некоторых случаях вычисления соответствующих эффективных значений проводимости могут быть проведены до конца [16]). Поскольку в рассматриваемой ситуации значение σ' мало (см. ниже), величина $\mathbf{E}'_{\sigma'}$ также мала и ею можно пренебречь по отношению к флуктуациям поля $\mathbf{E}'$, определяемым турбулентным движением при однородной проводимости. Действительно, при наличии малой неоднородности проводимости соответствующее возмущение электрического поля $\mathbf{E}'_{\sigma'}$ является некоторым функционалом от σ', таким что члены нулевого по σ' порядка в нем отсутствуют. Таким образом, величина $\sigma' \mathbf{E}'_{\sigma'}$ имеет порядок по малой величине σ', во всяком случае, выше первого; в то же время определяемая турбулентным движением величина $\mathbf{E}'$ не мала, так что $\sigma' \mathbf{E}'$ имеет первый порядок по σ'.

Разумеется, при произвольных значениях соответствующих величин вычисление $\langle \sigma' \mathbf{E}' \rangle$ и $\langle \sigma' [\mathbf{v}' \mathbf{B}] \rangle$ не представляется возможным. Однако, как следует из предыдущих разделов, при не слишком больших B это величины одного порядка и того же порядка, вообще говоря, их сумма. При наличии турбулентного потока тепла $\mathbf{q}$ оказывается возможным точное выражение составляющей $\langle \sigma' [\mathbf{v}' \mathbf{B}] \rangle$ через величину этого потока.

Из самого вида выражения для этой составляющей тока легко усмотреть, что она может быть отличной от нуля только в том случае, когда отлично от нуля среднее значение величины $\sigma' \mathbf{v}'$. Поскольку, например, для плазмы проводимость зависит от температуры (в пренебрежении неравновесными эффектами и слабой зависимостью от давления [17]), следует писать $\sigma' \equiv \sigma'(T')$, причем знаки σ' и T' совпадают.

Таким образом, при отличии от нуля величины $\langle T' \mathbf{v}' \rangle$ величина $\langle \sigma' \mathbf{v}' \rangle$ также, вообще говоря, отлична от нуля. В случае, когда $T' \ll \overline{T}$ (среднее значение температуры), который и имеет обычно место на практике, это утверждение становится точным, поскольку $\sigma' = (d\sigma/dT)T'$ и

$$\langle \sigma' \mathbf{v}' \rangle = \left\langle \frac{\sigma'}{T'} T' \mathbf{v}' \right\rangle = \frac{d\sigma}{dT} \langle T' \mathbf{v}' \rangle. \tag{13}$$

Вспоминая теперь, что величина $\langle T' \mathbf{v}' \rangle$ есть не что иное как (с точностью до множителя) турбулентный тепловой поток [6],

$$\mathbf{q} = \rho c_p \langle T' \mathbf{v}' \rangle,$$

имеем для дополнительного вклада в плотность тока

$$\mathbf{j}_{\sigma'} \sim \langle \sigma' [\mathbf{v}' \mathbf{B}] \rangle = \frac{d\sigma}{dT} \frac{1}{\rho c_p} [\mathbf{q} \mathbf{B}]. \tag{14}$$

Соответствующая этому значению плотности тока эдс есть

$$\mathscr{E} \sim \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dT}\frac{Bq}{\rho c_p}.$$

Указанный эффект может быть продемонстрирован в лабораторных условиях с использованием, например, водного раствора NaCl, для которого величина $(1/\sigma)(d\sigma/dT)$ имеет порядок 10^{-2} K^{-1}. Тогда для $q \sim 10$ Вт/см^2, $B \sim 1$ Тл имеем индуцированное электрическое поле $\sim 10^{-3}$ В/см — величину вполне доступную для измерений.

Укажем кроме того, что формально аналогичные выводы могут быть сделаны для случая $\mathrm{Re}_m \gg 1$, так что фактически имеет место некоторый дополнительный к α-эффекту [18] механизм генерации крупномасштабных полей при турбулентном движении. Рассмотрение его, однако, значительно сложнее, чем приведенное для $\mathrm{Re}_m \ll 1$, поскольку при отличии от нуля флуктуаций магнитного поля $\mathbf{B}'$ следовало бы учитывать также и тройную корреляцию в (12), именно, величину $\langle\sigma'[\mathbf{v}'\mathbf{B}']\rangle$, которая при $\mathrm{Re}_m \gg 1$ не является малой.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
2. Т. Каулинг, *Магнитная гидродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1959).
3. Б. В. Елисеев, ДАН СССР **161**, 560 (1965).
4. С. Б. Пикельнер, *Основы космической электродинамики*, Наука, Москва (1966).
5. А. Л. Цескис, ТВТ **33**, 496 (1995).
6. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статическая гидромеханика*, ч. I, Наука, Москва (1965).
7. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статическая гидромеханика*, ч. II, Наука, Москва (1967).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехтеориздат, Москва (1953).
9. Р. Моро, Магнитная гидродинамика (4), 31 (1970).
10. Л. Г. Кит, А. Б. Цинобер, Магнитная гидродинамика (3), 37 (1972).
11. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Repts. Progr. Phys. **4**, 547 (1980).
12. А. Л. Цескис, ЖЭТФ **83**, 176 (1982).
13. J. Sommeria and R. Moreau, J. Fl. Mech. **118**, 507 (1982).
14. J. Verron and J. Sommeria, Phys. Fluids **30**, 732 (1987).
15. Х. Гринспен, *Теория вращающихся жидкостей*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1975).
16. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
17. Д. А. Франк-Каменецкий, *Лекции по физике плазмы*, Атомиздат, Москва (1968).
18. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН **106**, 432 (1972).